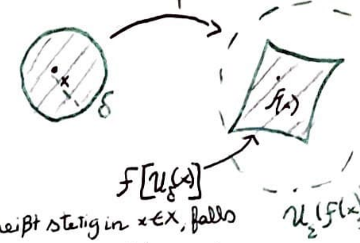
jede Norm induziert eine Metrik
$d(x,y) = \|x-y\|$

Urbilder / Bilder

Bild: Die Punkte, die im Bildraum Y getroffen werden.
$\rightsquigarrow f[\mathcal{U}_\delta(x)] := \{f(y) \mid y \in \mathcal{U}_\delta(x)\}$

Urbild: Die Punkte die auf dem Bildraum abbilden
$f^{-1}[f[\mathcal{U}_\delta(x)]] \supseteq \mathcal{U}_\delta(x)$



STETIGKEIT

def: Eine Abb. $f: \overset{MR}{X} \longrightarrow \overset{MR}{Y}$ heißt stetig in $x \in X$, falls
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : y \in B(x,\delta) \Rightarrow f(y) \in B(f(x),\varepsilon)$

Aufg 1 2011-Termin 2

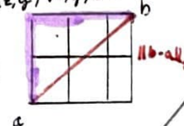
$\Leftrightarrow$ Das Urbild jeder offen Menge ist offen

METRISCHER RAUM (X, d)

X-IKVR eine Metrik von einer Norm induziert $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{i) } d(x,y) = d(x+z, y+z) & \forall x,y,z \in X \\ \text{ii) } d(\alpha x, 0) = |\alpha| d(x,0) & \alpha \in \mathbb{K}, x \in X \end{cases}$

def: Sei X Menge, $d: X \times X \to \mathbb{R}$ mit $\forall x,y,z \in X$
i) $d(x,y) \geq 0 \wedge d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
ii) $d(x,y) = d(y,x)$
iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ $\forall x,y,z \in X$.

Bsp (Mannheimer-Metrik)
$d(a,b) = \sum_i |a_i - b_i|$



in einem m.R. sind konv. Folgen CF.

Aufg 6a 2011-Termin 1
Aufg 2-2017-Termin 2

NORMIERTER RAUM $(X, \|\cdot\|)$

def: Sei X IK-VR, $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ mit $\forall x \in X$
i) $\|x\| \geq 0 \wedge \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$
iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Bsp: · p-Norm für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$
$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$
· sup-Norm
$\|x\|_\infty = \sup |x_i|$

BANACHRAUM

VOLLSTÄNDIG

def: Ein metr. R (X, d) heißt vollständig, wenn auch jede CF konv.

jede kompakte Menge ist vollständig

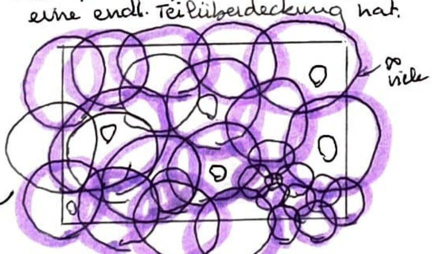
def: i) CF: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: d(x_n, x_m) < \varepsilon\ \forall n,m \geq N$
ii) Konv. F: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: d(x_n, x) < \varepsilon\ \forall n \geq N$

Kochrezepte: Wann Menge offen, abg, kompakt?

Das Bild einer kompakten Menge ist wieder kompakt

KOMPAKT

def: Der metr. R. heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung, eine endl. Teilüberdeckung hat.



in $\mathbb{K}^n$

Heine-Borel
abg und beschränkt bzgl $\|\cdot\|_p$
$\Leftrightarrow$ kompakt

$A \subseteq M$ (metr. R.) ist beschränkt, wenn $\forall x \in X: \{d(x,y) \mid y \in A\}$ beschränkt in $\mathbb{R}$.

$\Updownarrow$
Jede Folge in (X, d) besitzt eine konv TF.

L.S.

Aufg 4-2014-Termin 2

def: Die Abb. heißt L.S, falls
$\exists L > 0: d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x,y)\ \forall x,y \in X$.

in $\mathbb{K}^n$

Der Satz 9.56
W, V norm. R. dann
A stetig $\Leftrightarrow$ A. L.S.
$\Updownarrow$
A auf B(0,1) beschränkt

LINEARE OPERATOREN

def: Eine Abb. $A: V \to W$ heißt linear, wenn
i) $A(v+w) = A(v) + A(w) = Av + Aw$
ii) $A(\lambda v) = \lambda A(v) = \lambda Av$

$\Rightarrow$ Sei V, W norm. VR, dann $h(V,W)$ die Menge aller stetigen Abb. lineare!
z. B. $D(f) = f'$ mit $f \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \notin h(C^1, C)$
aber $I(f) = \int_a^x f(t)\,dt$, $f \in C([a,b],\mathbb{R}) \in h(C, C^1)$

$\Rightarrow h_c(V,W)$ bzgl Operatornorm ein norm. R.

Operatornorm: Sei $A \in h(V,W)$
$\|A\| = \sup \{\|Av\|_W \mid v \in B(0,1)\}$
$= \sup_{\|v\| \leq 1} \|Av\|_W$

WBR

$f'(x_0) \in h(X,Y)$

DIFFBARKEIT

def: X, Y norm. R
$F: X \supseteq \mathcal{U} \longrightarrow Y$ heißt in $x_0 \in \mathcal{U}$ diffbar, wenn $A \in h(X,Y)$ ex, s. d.

$$\begin{cases} \mathcal{U} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\|f(x) - f(x_0) - A(x-x_0)\|}{\|x - x_0\|} & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases} \end{cases}$$

stetig ist.

Bsp: $f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \binom{x}{y} \mapsto x^3 + xy^2 + x \end{cases}$

$\Rightarrow f'\binom{x_0}{y_0}\binom{x}{y} = (3x_0^2 + y_0^2 + 1,\ 2y_0x_0)\binom{x}{y}$

Termin 2 Klausur 2014

SCHRANKENSATZ

· $f \in \mathcal{C}([a,b], Y)$, $\phi \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$
Wenn f, ϕ auf M^c diffbar mit $M \subseteq (a,b)$ und dort $\|f'\| \leq \phi'$
$\Rightarrow \|f(b) - f(a)\| \leq \phi(b) - \phi(a)$