

12. Übung

42. Integralberechnung mit der Jacobischen Transformationsformel.

- (a) Es sei  $A$  das rautenförmige Gebiet, welches durch die Geraden  $x + 2y = 2$ ,  $x - 2y = 2$ ,  $x + 2y = -2$  und  $x - 2y = -2$  berandet wird.
- (i) Finde Koordinaten  $u, v$  so dass es eine lineare Abbildung  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(u, v) \mapsto (x, y)$  gibt, so dass  $A' = \Phi^{-1}[A]$  ein Quadrat der Seitenlänge 4 ist. Drücke  $(x, y)$  mit Hilfe der Koordinaten  $(u, v)$  aus. (5 Punkte)
- (ii) Benutze diese Koordinaten, um  $\int_A (3x + 6y)^2 d\mu$  zu berechnen. (4 Punkte)

- (b) Es sei

$$B := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0 \text{ und } x + y \leq 3 \} .$$

Berechne  $\int_B \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right) d\mu$  mit Hilfe der Transformationsformel. (8 Punkte)

- (c) Gegeben seien die Parabeln  $P_1 : y = x^2$ ,  $P_2 : y = 2x^2$ ,  $P_3 : x = y^2$ ,  $P_4 : x = 3y^2$  für  $x, y > 0$ . Wir betrachten die Fläche  $C$  zwischen den Stücken von  $P_1$  und  $P_2$ , die jeweils Schnittpunkte mit  $P_3$  und  $P_4$  haben und den Stücken von  $P_3$  und  $P_4$ , die jeweils Schnittpunkte mit  $P_1$  und  $P_2$  haben.

Skizziere die Fläche  $C$  im  $\mathbb{R}^2$  und berechne deren Flächeninhalt  $\mu(C) = \int \chi_C d\mu$  mit Hilfe der Jacobischen Transformationsformel. (7 Bonuspunkte)

Tipp: Beachte, dass auf den Rändern von  $C$  gilt, dass entweder  $\frac{y}{x^2}$  oder  $\frac{x}{y^2}$  konstant ist und dass es ausreicht die inverse Transformation  $\Phi^{-1}(x, y)$  zu kennen, um  $\det(\Phi(u, v))$  zu bestimmen.

- (d) Es sei  $D$  das durch die Ellipsen  $9x^2 + y^2 = 9$  und  $9x^2 + y^2 = 81$  sowie die Geraden  $y = -x$  und  $y = 0$  eingeschlossene Gebiet im zweiten Quadranten der  $xy$ -Ebene.
- (i) Bestimme das Gebiet  $D'$  der  $r\varphi$ -Ebene, in das  $D$  unter der Koordinatentransformation  $x = r \cdot \cos(\varphi)$ ,  $y = 3r \cdot \sin(\varphi)$  übergeht. (5 Punkte)
- (ii) Skizziere  $D$  in der  $xy$ -Ebene sowie  $D'$  in der  $r\varphi$ -Ebene. (3 Bonuspunkte)
- (iii) Berechne die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (r, \varphi) \mapsto (x, y) = (r \cdot \cos(\varphi), 3r \cdot \sin(\varphi)) ,$$

die zu der Transformation aus (i) gehört, sowie ihre Determinante. (3 Punkte)

- (iv) Berechne mit Hilfe von (i)–(iii) das Integral

$$\int_D \frac{xy}{9x^2 + y^2} d\mu . \quad (5 \text{ Punkte})$$

Tipp: Der Wert  $\sin\left(\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$  könnte nützlich sein.

### 43. Polarkoordinaten.

- (a) Es sei  $R \in (0, \infty]$ ,  $B_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$  die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius  $R$  um Null in  $\mathbb{R}^2$  und  $f \in L^1(B_R)$  eine auf  $B_R$  beschränkte Funktion, deren Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bilden. *Zeige*, dass dann gilt:

$$\int_{B_R} f \, d\mu = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} r \cdot f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \, d\varphi \, dr .$$

Diese Formel beschreibt die sogenannte *Integration in Polarkoordinaten*. (7 Punkte)

*Tipp:* Sei  $O := B_R \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\})$  und  $U := (0, R) \times (-\pi, \pi)$  sowie  $\Phi : U \rightarrow O$ ,  $(r, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ . Man zeige, dass in dieser Situation die Voraussetzungen der Jacobischen Transformationsformel (Satz 12.33) erfüllt sind. Warum gilt  $\int_{B_R} f \, d\mu = \int_O f \, d\mu$ ?

- (b) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \exp(-(x^2 + y^2)) .$$

*Zeige*, dass  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$  ist und *berechne*  $\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\mu$ . (7 Punkte)

*Tipp:* Verwende Aufgabenteil (a) und betrachte zunächst  $f \cdot \chi_{B_R}$ .

- (c) Verwende das Ergebnis von (b), um zu *zeigen*, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \, dx = \sqrt{\pi}$$

gilt.

(6 Punkte)

### 44. Eine $L^1$ -Nullfolge, die nirgends punktweise konvergiert.

Zu jeder natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  existieren eindeutig bestimmte  $p, q \in \mathbb{N}_0$  mit  $n = 2^p + q$  und  $q < 2^p$ . Sei

$$I_{p,q} := [q \cdot 2^{-p}, (q+1)2^{-p}] \quad \text{und} \quad f_n := \chi_{I_{p,q}} .$$

Dann ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  offenbar eine Folge in  $L^1(\mathbb{R})$ .

- (a) *Zeige*, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge in  $L^1(\mathbb{R})$  ist. (5 Bonuspunkte)  
(b) *Zeige*, dass  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  für kein  $x \in [0, 1]$  konvergiert. (5 Bonuspunkte)

Die Übungsblätter werden online eingereicht. Abgabefrist ist, aufgrund des Feiertags *Christi Himmelfahrt* am 21. Mai, **Freitag, der 22. Mai um 08:00 Uhr**. Wichtig ist dabei, dass pro Übungsblatt nur eine PDF-Datei erzeugt wird. Diese muss gut lesbar sein und folgenden Dateinamen haben:  $\langle \text{PGnr\_nachname1\_nachname2\_Blattnr.pdf} \rangle$ .

**WICHTIG:** Die Dateigröße darf 5MB nicht überschreiten. Schicken Sie bitte Ihrem Tutor die Lösungen, die Emailadressen erfahren Sie auf unserer Website.