

11. Übung

37. Integralberechnung mit dem Satz von Fubini.

Berechne $\int (f \cdot \chi_M) d\mu$ für die folgenden Mengen $M \subset \mathbb{R}^d$ und Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

(a) $M := [0, a] \times [0, b]$, $f(x, y) := x^2 y^3$ (4 Punkte)

(b) $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f(x, y) := \sin(x) + y + 6$. (4 Punkte)

(c) $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ und } \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$, $f(x, y) := e^{(y^3)}$. (5 Punkte)

[Tipp: Man überlege sich, welche Integrationsreihenfolge die sinnvollere ist.]

38. Eine Lebesgue-integrierbare Funktion, die nicht beschränkt ist.

Wir zeigen in mehreren Schritten, dass

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lebesgue-integrierbar ist, obwohl $f(x)$ in der Nähe von $x = 1$ nicht beschränkt ist.

(a) Finde eine monoton wachsende Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen (nicht unbedingt Treppenfunktionen) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf \mathbb{R} , die fast überall (punktweise) gegen f konvergiert. (4 Punkte)

(b) Begründe, dass f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ Lebesgue-integrierbar ist und berechne $\int f_n d\mu$. (5 Punkte)

(c) Folgere mittels des Satzes der monotonen Konvergenz von Beppo Levi (Satz 12.22), dass f Lebesgue-integrierbar ist und berechne den Wert des Integrals $\int f d\mu$. (4 Punkte)

39. Eine Funktion, die nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & \text{für } (x, y) \in ([0, 1] \times [0, 1]) \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(a) Berechne $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$ und $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy$. (7 Punkte)

(b) Folgere aus dem Ergebnis von (a), dass f nicht Lebesgue-integrierbar ist. (3 Punkte)

40. Warnung vor bedenkenlosem Vertauschen von Integration und Grenzwertbildung.

Betrachte die Funktionenfolgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

(a) $f_n := \frac{1}{n} \cdot \chi_{[0,n]}$

(b) $f_n := n \cdot \chi_{[1/n, 2/n]}$

Man bearbeite jeweils für (a) und (b) die folgenden Punkte:

i) *Skizziere* die Funktionen f_n für $n \in \{1, 2, 3\}$. (je 3 Zusatzpunkte)

ii) *Zeige*, dass die Funktionenfolgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus Lebesgue-integrierbaren Funktionen bestehen und fast überall gegen $f \equiv 0$ konvergieren. (je 3 Punkte)

iii) *Untersuche*, ob

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = 0$$

gilt. (je 2 Punkte)

iv) *Gebe an*, welche der Voraussetzungen des Satzes der monotonen Konvergenz von Beppo Levi (Satz 12.22) und des Satzes der beschränkten Konvergenz von Lebesgue (Korollar 12.24) erfüllt bzw. nicht erfüllt sind und begründe dieses. (je 2 Punkte)

41. Weitere Grenzwertaussagen für das Lebesgue-Integral.

Es sei (f_n) eine Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$, die fast überall gegen eine Funktion f konvergiert.

(a) Es existiere ein $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, so dass fast überall $|f| \leq g$. *Zeige*, dass dann auch $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist. (8 Bonuspunkte)

[*Tipp*: Man wende Lebesgues Satz der beschränkten Konvergenz (Korollar 12.24) auf die Folge (g_n) , wobei

$$g_n := \max\{-g, \min\{f_n, g\}\}, \quad \text{d.h.} \quad g_n(x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} \begin{cases} g(x) & \text{für } f_n(x) > g(x) \\ f_n(x) & \text{für } -g(x) \leq f_n(x) \leq g(x) \\ -g(x) & \text{für } f_n(x) < -g(x) \end{cases}$$

an. Die Formeln $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ und $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$ für $x, y \in \mathbb{R}$

(b) Es existiere ein $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ fast überall $|f_n - f| \leq h$ gilt. *Zeige*, dass dann auch $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist und dass $\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$ gilt. (6 Bonuspunkte)

[*Tipp*: Man verwende zunächst (a), um $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ zu zeigen und dann Lebesgues Satz, um die Vertauschbarkeit von Integral und Grenzwert zu beweisen.]

Die Übungsblätter werden online eingereicht, Abgabefrist ist Donnerstag, der 14. Mai um 10:00 Uhr. Wichtig ist dabei, dass pro Übungsblatt nur eine PDF-Datei erzeugt wird. Diese muss gut lesbar sein und folgenden Dateinamen haben: >PGnr_nachname1_nachname2_Blattnr.pdf<.

WICHTIG: Die Dateigröße darf 5MB nicht überschreiten. Schicken Sie bitte Ihrem Tutor die Lösungen, die Emailadressen erfahren Sie auf unserer Website.