

10. Übung

33. Über Quader, Treppenfunktionen und charakteristische Funktionen.

(a) Seien Q_1, Q_2 zwei Quader des \mathbb{R}^d .

(i) Zeige: $Q_1 \cap Q_2$ ist die leere Menge oder ein Quader des \mathbb{R}^d . (3 Punkte)

(ii) Beweise oder widerlege: $Q_1 \cup Q_2$ ist ein Quader des \mathbb{R}^d . (1 Punkt)

(b) Wie in der Vorlesung definieren wir zu einer jeden Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ die charakteristische Funktion $\chi_M : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\chi_M(x) = 1$ für $x \in M$ und $\chi_M(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^d \setminus M$. Es seien nun A, B zwei Teilmengen des \mathbb{R}^d . Zeige:

(i) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ (2 Punkte)

(ii) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$ (3 Punkte)

(c) Es seien $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Treppenfunktionen. Zeige, dass dann auch

$$f + g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad f \cdot g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

Treppenfunktionen sind. (4 Punkte)

34. Nullmengen.

(a) Eine Teilmenge

$$H_j(c) := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_j = c\}$$

des \mathbb{R}^n heißt Hyperebene. Zeige, dass $H_j(c)$ eine Nullmenge ist. [Tipp: In der großen Übung wurde diese Aufgabe schon für $c = 0$ gelöst. Schauen Sie sich hier doch mal das Video an, anstatt die Lösungen abzuschreiben.] (4 Punkte)

(b) Sei $f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und deren Graph sei gegeben durch

$$G(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^{n-1}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Zeige, dass $G(f)$ eine Nullmenge ist. (4 Punkte)

Tipp: Begründe zunächst, warum es ausreicht, die Funktion f auf einem kompakten Quader $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ mit Kantenlänge 1 zu betrachten, d.h. $|a_i - b_i| = 1$ für $i = 1, \dots, n-1$. Um zu zeigen, dass $G(f)|_Q$ eine Nullmenge ist zerlege man diesen Quader in endlich viele Teilquader Q_k , auf denen man die Schwankung $\sup_{x,y \in Q_k} |f(x) - f(y)|$ kontrollieren kann.

35. Lesbegue-integrierte Funktionen.

(a) Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 3 & \text{falls } x \in [0, 2] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lesbegue-integriert (Kapitel 12), aber auf dem Intervall $[0, 2]$ nicht Riemann-integriert (Kapitel 8) ist und berechne $\int f \, d\mu$ im Sinne der Lesbegueschen Theorie. (5 Punkte)

(b) Zeige, dass die Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} n & \text{falls } x \in \left(\frac{1}{(n+1)!}, \frac{1}{n!}\right] \text{ für ein } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lesbegue-integriert ist. (4 Punkte)

(c) Berechne $\int g \, d\mu$ für die Funktion g aus (b). (5 Punkte)

[Tipp: Man benutze die Reihendarstellung von e .]

36. Die ist doch nicht ganz dicht!

Betrachte das Intervall $[0, 1]$. Wir erstellen nun induktiv die Smith-Volterra-Cantor Menge: Im ersten Schritt entferne man das offene Intervall der Länge $\frac{1}{4}$ zentriert am Punkt $\frac{1}{2}$. Man erhält so die Menge

$$\left[0, \frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8}, 1\right]$$

Im n -ten Schritt entferne man die offenen Teilintervalle der Länge $\frac{1}{4^n}$ von der Mitte der aus dem vorherigen Schritt entstandenen 2^{n-1} Intervallen. Sei nun D_n die so entstandene übrig gebliebene Teilmenge von $[0, 1]$.

Die Smith-Volterra-Cantor Menge ist nun definiert als

$$SVC := \bigcap_{n=0}^{\infty} D_n$$

(a) Skizziere D_n für $n = 0, 1, 2$. (2 Punkte)

(b) Zeige, dass C kompakt ist. (2 Punkte)

(c) Man zeige, dass SVC nirgends dicht ist, das heißt, es kein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gibt, mit $I \subset SVC$. (5 Punkte)

(d) Man zeige, dass

$$\mu(SVC) := \int \chi_{SVC} = \frac{1}{2}.$$

[Tipp: Man konstruiere eine monoton steigende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit beschränktem Integral, mit $\chi_{SVC} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \chi_{SVC}$ fast überall und berechne das Integral wie üblich.] (6 Punkte)

[Bemerkung: Durch (c) wird gezeigt, dass die SVC Menge in der Art unendlich zerfasert ist und trotzdem zeigt (d), dass diese Menge nicht verschwindendes Maß hat.]

Die Übungsblätter werden online eingereicht, Abgabefrist ist Donnerstag, der 07. Mai um 10:00 Uhr. Wichtig ist dabei, dass pro Übungsblatt nur eine PDF-Datei erzeugt wird. Diese muss gut lesbar sein und folgenden Dateinamen haben: ›PGnr_nachname1_nachname2_Blattnr.pdf‹.

WICHTIG: Die Dateigröße darf 5MB nicht überschreiten. Schicken Sie bitte Ihrem Tutor die Lösungen, die Emailadressen erfahren Sie auf unserer Website.