

9. Übung

31. Singularitäten.

Es sei

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - x^3 - y^2.$$

(a) *Untersuche* die Niveaumengen von g daraufhin, ob sie glatte Teilmengen von \mathbb{R}^2 sind, und *bestimme* andernfalls ihre Singularitäten. (5 Punkte)

(b) *Skizziere* die Niveaumengen von g , die Singularitäten besitzen sowie einige (mindestens drei) weitere. (4 Punkte)

Sei nun

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(x) \sin(y)$$

(c) *Untersuche* die Niveaumengen von h daraufhin, ob sie glatte Teilmengen von \mathbb{R}^2 sind, und *bestimme* andernfalls ihre Singularitäten. (5 Punkte)

(d) *Skizziere* die Niveaumengen von h , die Singularitäten besitzen für $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$.
Hinweis: Da h sowohl periodisch in x - als auch in y -Richtung ist, genügt es die Singularitäten auf dieser Teilmenge des \mathbb{R}^2 zu skizzieren. (4 Punkte)

32. Extremwertsuche unter Nebenbedingungen.

(a) Sei $U := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^2$ und

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y \quad \text{und} \quad g : U \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy.$$

(i) *Zeige*, dass die Niveaumengen zu $g(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ glatt sind. (3 Punkte)

(ii) *Bestimme* die Gesamtheit aller kritischen Punkte von f auf den Niveaumengen $g(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. (Wenn man festzustellen versucht, welcher der kritischen Punkte auf einer vorgegebenen Niveaufläche liegt, kommt man auf eine kubische Gleichung, die nicht gelöst zu werden braucht.) (5 Punkte)

(b) *Begründe*, dass die folgenden Funktionen Maximum und Minimum unter den gegebenen Nebenbedingungen annehmen und *bestimme* die Stellen, an denen die (globalen) Extrema angenommen werden.

(i) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x - 6y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 4$, (5 Punkte)

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 - xy + y^2 = 3$, (7 Punkte)

(iii) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 5x + y - 3z$ unter der Nebenbedingung $x + y + z = 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (5 Punkte)

(c) *Begründe*, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 4(x^2 + xy + y^2) + z^2$$

auf der Menge

$$M := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \}$$

Maximum und Minimum annimmt und *bestimme* den maximalen und den minimalen Wert.

(7 Punkte)

[*Tipp*: Betrachte den Rand $\partial M := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9 \}$ und das Innere $M^\circ := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 9 \}$ einzeln.]

Die Übungsblätter werden online eingereicht, Abgabefrist ist Donnerstag, der 30. April um 10:00 Uhr. Wichtig ist dabei, dass pro Übungsblatt nur eine PDF-Datei erzeugt wird. Diese muss gut lesbar sein und folgenden Dateinamen haben: ›PGnr_nachname1_nachname2_Blattnr.pdf‹.

WICHTIG: Die Dateigröße darf 5MB nicht überschreiten. Schicken Sie bitte Ihrem Tutor die Lösungen, die Emailadressen erfahren Sie auf unserer Website.