Martin Schmidt
Volker Eing

Analysis II

12. März 2020

5. Übung

14. abstraktere Schulmathematik.

Sei $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ die Banachalgebra der reellwertigen stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1] \subset \mathbb{R}$, versehen mit der Supremumsnorm und für ein $n \in \mathbb{N}$ seien $f_0, \ldots f_n \in C([0,1],\mathbb{R})$. Ziel dieser Aufgabe ist es die Ableitung folgender Abbildung zu bestimmen:

$$\begin{aligned} P_n : C([0,1],\mathbb{R}) &\to C([0,1],\mathbb{R}) \\ x &\mapsto P_n(x) := f_0 + f_1 x + \ldots + f_n x^n = \sum_{k=0}^{n} f_k x^k \end{aligned}$$

(a) Zeige im Fall $n = 0$, dass $P_0'(x_0) = 0$ für alle $x_0 \in C([0,1],\mathbb{R})$. *(1 Punkt)*

(b) Sei nun für ein $g \in C([0,1],\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \mu_g : C([0,1],\mathbb{R}) &\to C([0,1],\mathbb{R}) \\ x &\mapsto g \cdot x. \end{aligned}$$

Zeige, dass μ_g linear ist und berechne die Operatornorm $\|\mu_g\|_{\text{op}}$. *(4 Punkte)*

(c) Sei nun $n = 1$ und $x_0 \in C([0,1],\mathbb{R})$. Zeige, dass die Ableitung $P_1'(x_0)$ gleich der Abbildung

$$\begin{aligned} P_1'(x_0) : C([0,1],\mathbb{R}) &\to C([0,1],\mathbb{R}) \\ x &\mapsto P_1'(x_0)(x) = f_1 \cdot x \end{aligned}$$

ist und dass $P_1'(x_0) \in \mathcal{L}(C([0,1],\mathbb{R}))$, berechne die Operatornorm $\|P_1'(x_0)\|_{\text{op}}$. *(3 Punkte)*

(d) Zeige für alle $x_0 \in C([0,1],\mathbb{R})$, dass $P_2'(x_0) = (x \mapsto (f_1 + 2f_2 x_0)x)$. Folgere durch Induktion in n, dass $P_n'(x_0) = (x \mapsto (\sum_{k=1}^{n} k f_k x_0^{k-1})x)$ und dass $P_n'(x_0) \in \mathcal{L}(C([0,1],\mathbb{R}))$. [Tipp: Satz 10.4 und Beispiele 10.3]. *(5 Punkte)*

(e) Sei nun

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : C[0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^1 x(t)dt \end{aligned}$$

Zeige, dass $\mathcal{I} \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ und berechne die Ableitung $(\mathcal{I} \circ P_n)'(x_0)$ an einer Stelle $x_0 \in C([0,1],\mathbb{R})$. Berechne zusätzlich für ein $x \in C([0,1],\mathbb{R})$ die Auswertung $(\mathcal{I} \circ P_n)'(x_0)(x)$. [Tipp: Satz 10.4 (iii)] *(2 Punkte)*

Bemerkung: Ersetzt man hier $C([0,1],\mathbb{R})$ mit einer beliebigen kommutativen (!) normierten Algebra X so zeigen die gleichen Argumente, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} P_n : X &\to X \\ x &\mapsto f_0 + f_1 x + \ldots + f_n x^n \end{aligned}$$

für jedes $x_0 \in X$ differenzierbar ist mit $P_n'(x_0) = (x \mapsto (\sum_{k=1}^{n} k f_k x_0^{k-1})x)$.

15. Ableitungen im Mehrdimensionalen.

(a) Man *untersuche* für die folgenden Funktionen $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jeweils, an welchen Stellen f partiell differenzierbar ist, und *berechne* dort $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$.

(i) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 5$ *(3 Punkte)*

(ii) $f(x,y) = \ln\left|-\frac{1}{3}x^3 + x - y^3\right|$ *(3 Punkte)*

(iii) $f(x,y) = \sin(x+y) \cdot \sin(x-y)$ *(3 Punkte)*

(b) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (y^2 \exp(x), \cos(2x-y)).$$

Begründe ausführlich, warum f differenzierbar ist, und *berechne* $f'\left(0, \frac{3}{2}\pi\right)$. *(4 Punkte)*

(c) Es sei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (x-y, x^3+y^3+z^2) \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x+y, xy)\ .$$

Berechne $(g \circ f)'$. *(4 Punkte)*

(d) *Berechne* den Gradienten von f für $(x,y) \neq (0,0)$ sowie die Richtungsableitungen von

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - y^3x}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

an $(x,y) = (0,0)$ in Richtung $(v,w) \in \mathbb{R}^2$ und an $(x,y) = (1,1)$ in Richtung $(v,w) = (3,4)$. *(6 Punkte)*

16. Ableitung affiner Abbildungen.

Es seien X, Y normierte Vektorräume und $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung.

(a) *Beweise:* Ist $f'(x) = 0 \in \mathcal{L}(X,Y)$ für jedes $x \in X$, so ist f konstant. *(4 Punkte)*
[*Tipp:* Schrankensatz.]

(b) *Beweise:* Ist f' konstant, d.h. gibt es ein $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $f'(x) = A$ für jedes $x \in X$, so gibt es ein $c \in Y$ mit $f(x) = A(x) + c$ für jedes $x \in X$. *(4 Punkte)*
[*Tipp:* $x \mapsto f(x) - A(x)$.]

17. Über die Lipschitz-Stetigkeit differenzierbarer Funktionen.

Es seien X, Y normierte Vektorräume, $U \subset X$ eine offene und konvexe Teilmenge und $f : U \to Y$ eine differenzierbare Funktion, so dass $\|f'\|$ auf U beschränkt ist. *Zeige,* dass f Lipschitz-stetig ist. *(4 Punkte)*

Die Lösungen sind bis spätestens **Donnerstag, den 19. März 2020, 10:15 Uhr (Osteingang)** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen. Abgaben zu zweit sind erlaubt und erwünscht.