

4. Übung

11. Stetigkeit und Linearität

(a) Untersuche die folgenden Abbildungen auf Linearität und Stetigkeit. Berechne gegebenenfalls die Operatornorm.

(i)

$$f_1 : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} rx \\ r \cos(t)y - r \sin(t)z \\ r \sin(t)y + r \cos(t)z \end{pmatrix}, \quad 0 < r \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(5 Punkte)

(ii)

$$f_2 : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{|x|}y}{|x|+|y|} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(5 Punkte)

(b) Seien V, W normierte Räume, Zeige, dass für die Operatornorm eines $A \in \mathcal{L}(V, W)$ gilt:

$$\begin{aligned} \|A\|_{op} &:= \sup\{\|Av\|_W \mid \|v\|_V \leq 1\} \\ &= \sup\{\|Av\|_W \mid \|v\|_V = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V} \mid v \in V \setminus \{0\}\right\} \\ &= \inf\{C \in \mathbb{R} : \|Av\| \leq C\|v\| \mid v \in V\}. \end{aligned}$$

(5 Punkte)

12. Die Exponentialfunktion für Matrizen.

Wir bezeichnen im Folgenden mit $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ auch den Raum der reellen $(n \times n)$ -Matrizen. Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, konvergiert für jedes $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ die Potenzreihe $\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Die Abbildung $\exp : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ heißt die (*matrixwertige*) *Exponentialabbildung*.

(a) Seien $t, s \in \mathbb{R}$. Berechne $\exp(A)$ für die folgenden $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$:

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \qquad (ii) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} \qquad (iii) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

(3+4+4 Punkte)

[Tipp: Man rechne jeweils zuerst A^n für $n \leq 3$ aus, um auf Ideen zu kommen, wie A^n allgemein aussieht.]

(b) Berechne $e^A \cdot e^B$ und $e^B \cdot e^A$ für

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2 \text{ Punkte})$$

(c) Sei $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $A \cdot B = B \cdot A$. Zeige: $\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$. Hierbei darf ohne Beweis benutzt werden, dass auch für miteinander kommutierende Matrizen die binomische Formel $(A+B)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A^j B^{k-j}$ gilt. (4 Punkte)

(d) Folgere aus (c), dass $\exp(A)$ stets invertierbar ist mit $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$. (3 Punkte)

(e) Zeige, dass für beliebiges $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ und invertierbares $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ gilt, dass $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$ gilt und folgere hieraus, dass für diagonalisierbares $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ auch e^A diagonalisierbar ist. (3 Punkte)

13. Derivationen.

Sei V ein Banachraum. Für $A \in \mathcal{L}(V)$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$D_A : \mathcal{L}(V) \rightarrow \mathcal{L}(V), \quad L \mapsto A \cdot L - L \cdot A.$$

(a) Berechne $D_A(L)$ für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ und $L = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. (2 Punkte)

(b) Zeige, dass D_A eine Derivation auf $\mathcal{L}(V)$ ist, d.h. dass für alle $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ gilt:

$$D_A(L_1 \cdot L_2) = D_A(L_1) \cdot L_2 + L_1 \cdot D_A(L_2). \quad (3 \text{ Punkte})$$

(c) Sei $A \in \mathcal{L}(V)$. Dann sind Links- und Rechtsmultiplikation $\ell(A)$ und $r(A)$ in $\mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$ definiert als

$$\ell(A) : \mathcal{L}(V) \rightarrow \mathcal{L}(V), \quad L \mapsto A \cdot L$$

und

$$r(A) : \mathcal{L}(V) \rightarrow \mathcal{L}(V), \quad L \mapsto L \cdot A.$$

Zeige, dass für $A, B \in \mathcal{L}(V)$ gilt

$$r(B)\ell(A) = \ell(A)r(B). \quad (2 \text{ Punkte})$$

(d) Zeige, dass $\exp(\ell(A)) = \ell(\exp(A))$ und dass $\exp(r(A)) = r(\exp(A))$.

Tipp: Zeige, dass $\ell(A^n) = (\ell(A))^n$ bzw. $r(A^n) = (r(A))^n$ und benutze dieses. (3 Punkte)

(e) Zeige mit Hilfe von Aufgabe 12(c) sowie (c) und (d), dass

$$\exp(D_A)L = \exp(A) \cdot L \cdot \exp(-A).$$

Dabei wird $\exp(D_A)$ in $\mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$ und $\exp(\pm A)$ in $\mathcal{L}(V)$ gebildet. (2 Punkte)

Die Lösungen sind bis spätestens **Donnerstag, den 12. März 2020, 10:15 Uhr (Osteingang)** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen. Abgaben zu zweit sind erlaubt und erwünscht.