

3. Übung

8. Entweder oder, und, keins von beidem.

(a) Man *untersuche*, ob die folgenden Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$  offen oder abgeschlossen sind:

(i)  $M_1 := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 \leq 1 \}$  (2 Punkte)

(ii)  $M_2 := \{ (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \}$  (2 Punkte)

(b) Es sei nun  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen.

(i) *Zeige*:  $\{ x \in X \mid f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0 \}$  ist abgeschlossen in  $X$ . (4 Punkte)

(ii) *Zeige*:  $\{ x \in X \mid f_1(x) > 0, \dots, f_n(x) > 0 \}$  ist offen in  $X$ . (4 Punkte)

(c) Man *belege durch ein Beispiel*, dass die Aussage aus (b)(ii) falsch wird, wenn man unendlich viele stetige Funktionen  $f_1, f_2, f_3, \dots : X \rightarrow \mathbb{R}$  betrachtet. Wie steht es mit der Aussage aus (b)(i)? (4 Punkte)

9. Stetigkeit steckt in den Komponenten.

Sei  $n, m \in \mathbb{N}$ . Wir betrachten in dieser Aufgabe den  $\mathbb{K}^n$  und den  $\mathbb{K}^m$  jeweils mit der von einer Norm induzierten Metrik. Die Wahl der Norm ist dabei für die folgenden Stetigkeitsuntersuchungen beliebig, weil auf diesen Räumen nach Satz 9.37 je zwei Normen zueinander äquivalent sind.

(a) *Untersuche*, ob die folgende Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  stetig ist:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (3 \text{ Punkte})$$

[Tipp: Aufgabe 5(a)]

(b) Sei  $k \in \{1, \dots, n\}$ . *Zeige*, dass die „ $k$ -te Projektion“, d.h. die Abbildung

$$\text{pr}_k : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$$

Lipschitz-stetig ist. [Tipp: Beim betrachten einer bestimmten Norm auf  $\mathbb{K}^n$  ist diese Aufgabe schnell gelöst.] (3 Punkte)

(c) Sei  $f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$  eine Abbildung. Für  $k \in \{1, \dots, n\}$  sei  $f_k := \text{pr}_k \circ f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}$  die „ $k$ -te Komponente“ von  $f$ .

*Zeige*:  $f$  ist genau dann stetig, wenn  $f_k$  für alle  $k \in \{1, \dots, n\}$  stetig ist. [Tipp: Aufgabe 5(a) und Aufgabenteil (b).] (4 Punkte)

(d) Sei  $f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$  eine Abbildung. Dann ist der *Graph* von  $f$  die Menge

$$G(f) := \{ (x, f(x)) \mid x \in \mathbb{K}^m \} \subset \mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n \cong \mathbb{K}^{m+n}.$$

*Zeige*: Ist  $f$  stetig, so ist  $G(f)$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{K}^{m+n}$ . (3 Punkte)

## 10. HDI mal anders.

Sei  $a < b$ . Wir betrachten den Vektorraum  $C([a, b], \mathbb{R})$  der stetigen Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  als normierten Raum mit der Norm  $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}$ . (Da stetige Funktionen auf Kompakta beschränkt sind, ist die Norm wohldefiniert.) Weiter sei  $C^1([a, b], \mathbb{R})$  der in Aufgabe 3(c) definierte Unterraum von  $C([a, b], \mathbb{R})$ . Für  $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  bezeichnen wir mit  $f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  die stetige Fortsetzung der Ableitung von  $f$  auf  $[a, b]$ .

Wir untersuchen den „Differentialoperator“ von  $C^1([a, b], \mathbb{R})$ , d.h. die Abbildung

$$D : C^1([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}), f \mapsto f'.$$

- (a) Zeige, dass die Abbildung  $D$  linear ist und bestimme ihren Kern, d.h. die Menge (sogar linearen Unterraum)  $\ker(D) = \{f \in C^1([a, b], \mathbb{R}) \mid D(f) = 0\}$ . (3 Punkte)
- (b) Zeige, dass  $D$  an keiner Stelle  $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  stetig ist. (4 Punkte)  
[Tipp: Zu zeigen ist, dass ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass für jedes  $\delta > 0$  eine Funktion  $g \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  existiert mit  $\|f - g\|_\infty < \delta$  und  $\|D(f) - D(g)\|_\infty \geq \varepsilon$ . Dabei kann hier  $\varepsilon := 1$  gewählt werden. Um eine Idee zu bekommen, wie eine geeignete Funktion  $g$  aussehen könnte, kann man noch einmal den Tipp zu Aufgabe 3(c)(ii) anschauen.]

Nun betrachten wir den „Integraloperator“  $I : C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C^1([a, b], \mathbb{R}), f \mapsto I(f)$ , der durch

$$I(f)(x) := \int_a^x f(t) dt \quad \text{für } x \in [a, b]$$

gegeben ist.

- (c) Zeige, dass die Abbildung  $I$  linear ist und bestimme ihren Kern. (3 Punkte)
- (d) Zeige, dass  $I$  Lipschitz-stetig ist. (3 Punkte)
- (e) Zeige, dass  $I$  ein „Rechts-Inverses“ von  $D$  ist, d.h. dass

$$D \circ I : C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}), f \mapsto f$$

gilt und bestimme das Bild von  $D$ . (Kurzschreibweise:  $D \circ I = \mathbb{1}_{C([a, b], \mathbb{R})}$ .) (4 Punkte)

- (f) Zeige, dass

$$I \circ D : C^1([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C^1([a, b], \mathbb{R}), f \mapsto f - f(a)$$

und bestimme das Bild von  $I$ . (4 Punkte)

- (g) Zeige, dass

$$I : C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \{f \in C^1([a, b], \mathbb{R}) \mid f(a) = 0\}$$

und

$$D : \{f \in C^1([a, b], \mathbb{R}) \mid f(a) = 0\} \rightarrow C([a, b], \mathbb{R})$$

zueinander inverse lineare Abbildungen sind. (4 Zusatzpunkte)

- (h) Zeige, dass für die Abbildungen  $I$  und  $D$  aus (g) gilt, dass

$$\|I(f)'\|_\infty = \|f\|_\infty \quad \text{und} \quad \|D(f)\|_\infty = \|f'\|_\infty.$$

Folgere hieraus, dass  $\|f'\|_\infty$  eine Norm auf  $\{f \in C^1([a, b], \mathbb{R}) \mid f(a) = 0\}$  ist und dass  $I$  und  $D$  aus (g) Isometrien sind, wenn man die Menge  $\{f \in C^1([a, b], \mathbb{R}) \mid f(a) = 0\}$  mit der durch  $\|f'\|_\infty$  induzierten Metrik versieht. (6 Zusatzpunkte)

Die Lösungen sind bis spätestens **Donnerstag, den 05. März 2020, 10:15 Uhr (Osteingang)** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen. Abgaben zu zweit sind erlaubt und erwünscht.