Martin Schmidt
Volker Eing

Analysis II

20. Februar 2020

2. Übung

5. Wie man's macht, man macht's richtig!

(a) Es sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben das Element $x_k \in \mathbb{R}^n$ jeweils in „Komponenten“, d.h. in der Form $x_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)$ mit $x_k^j \in \mathbb{R}$.

Zeige: Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$, wenn für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ die „Komponentenfolge“ $(x_k^j)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Ist dies der Fall, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \Big(\lim_{k\to\infty} x_k^1, \ldots, \lim_{k\to\infty} x_k^n \Big) \in \mathbb{R}^n .$$

(6 Punkte)

Bemerkung. In Satz 9.37 haben wir gesehen, dass je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Die obige Aussage gilt deshalb nicht nur bezüglich der Maximumnorm, sondern auch bezüglich jeder beliebigen anderen Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Wenn also von der „Konvergenz im $\mathbb{R}^n$“ (ohne ausdrückliche Angabe einer Metrik bzw. Norm) die Rede ist, sind damit die Konvergenz bezüglich aller möglichen Normen beziehungsweise der Konvergenz der Komponentenfolgen gemeint.

(b) *Untersuche,* ob die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_k := \Big(\sqrt[k]{k}\, , \, (1 + \tfrac{1}{k})^k \, , \, \tfrac{1}{k} \Big) \in \mathbb{R}^3$$

in $\mathbb{R}^3$ konvergiert und *bestimme* gegebenenfalls den Grenzwert. *(4 Punkte)*

(c) Konvergiert die Folge aus (b) bezüglich der diskreten Metrik (Beispiel 9.2(i)) auf $\mathbb{R}^3$? *(3 Punkte)*

6. Offen für Neues.

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. *Zeige*, dass jeder offene Ball in (X, d) eine offene Menge in (X, d) ist. *(3 Punkte)*

(b) *Beweise oder widerlege:* Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen X und Y und ist $K \subset Y$ kompakt, so ist auch $f^{-1}[K] \subset X$ kompakt. *(3 Punkte)*

(c) *Beweise oder widerlege:* Für jede Menge X ist die diskrete Metrik auf X (siehe Beispiel 9.2(i)) vollständig. *(4 Punkte)*

(d) *Gebe explizit* eine offene Überdeckung des Intervalls $(0, 1)$ *an*, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. *(4 Punkte)*

7. Eine konstruktive Alternative.

In dieser Aufgabe wollen wir $\mathbb{R}$ als die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ konstruieren.

Sei dazu $\mathfrak{C}$ die Menge der Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$. Wir definieren für zwei Cauchyfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{C}$ die Relation $(x_n) \sim (\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ ein N existiert, so dass $|x_n - \tilde{x}_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

(a) Zeige, dass durch "$\sim$" eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Cauchyfolgen definiert ist. *(3 Punkte)*

(b) Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen $\mathfrak{C}/\sim$ suggestiv mit $\mathbb{R}$ und Elemente in $\mathbb{R}$ mit $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$. Zeige, dass die Addition und Multiplikation definiert durch

$$\begin{cases} [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \\ [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \end{cases}$$

jeweils wohldefiniert ist, d.h. dass erstens die Addition und die Multiplikation von zwei Cauchyfolgen selbst eine Cauchyfolge ist und zweitens, dass die obigen Abbildungen nicht von den jeweiligen Repräsentanten (x_n) und (y_n) der Äquivalenzklassen abhängen.

[*Tipp:* Benutze: Cauchyfolgen sind beschränkt] *(6 Punkte)*

(c) Zeige, dass durch die Rechenregeln in (b) die Körperaxiome A1-A3 [Kapitel 2 Analysis I] für $\mathbb{R} = \mathfrak{C}/\sim$ erfüllt sind. [*Tipp:* Benutze, dass $\mathbb{Q}$ die Axiome A1-A3 erfüllt.] *(4 Punkte)*

(d) Wir definieren eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$ wie folgt: Es gilt $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] > [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, genau dann, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n - y_n \geq \frac{1}{N}$ für alle $n \geq N$. Zeige, dass dadurch eine wohldefinierte (!) Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$ definiert, die Axiom A4 [Kapitel 2 Analysis I] erfüllt. *(5 Punkte)*

(e) Definiere die Einbettungsabbildung,

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto [q], \end{aligned}$$

wobei für jedes $q \in \mathbb{Q}$, $[q]$ die konstante (Cauchy-)folge $q_n = q$ bezeichnet. Diese Abbildung ist offenbar injektiv. Zeige, dass $\mathbb{R}$ archimedisch ist. Hierbei kann ohne Beweis benutzt werden, dass die natürlichen Zahlen in $\mathbb{R}$ das Bild von $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ unter Φ sind. In einem zweiten Schritt, zeige, dass das Bild $\Phi[\mathbb{Q}] \subset \mathbb{R}$ dicht liegt. *(5 Punkte)*

(f) Zeige, dass $\mathbb{R}$ vollständig ist. *(5 Bonuspunkte)* [*Tipp:* Es sei eine Cauchyfolge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegeben. Da nach (e) das Bild $\Phi[\mathbb{Q}]$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, existiert zu $n \in \mathbb{N}$ jeweils ein $x_n \in \mathbb{Q}$ mit $\Phi(-\frac{1}{n}) < \Phi(x_n) - \xi_n < \Phi(\frac{1}{n})$. Zeige, dass die hierdurch definierte Folge (x_n) eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ ist, welche ein Element $\xi := [(x_n)] \in \mathbb{R}$ repräsentiert und dass die Folge (ξ_n) in $\mathbb{R}$ gegen ξ konvergiert.]

Bemerkung: Wegen der Funktionsvorschrift von Φ ist das Bild $\Phi[\mathbb{Q}]$ als eine "Kopie" von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ zu verstehen. In dem man also $\Phi[\mathbb{Q}]$ mit $\mathbb{Q}$ identifiziert, kann man daher $\mathbb{R}$ als eine Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ auffassen. Diese ist eindeutig und daher hat man auf diese Weise $\mathbb{R}$ konstruktiv eingeführt.

Die Lösungen sind bis spätestens **Donnerstag, den 27. Februar 2020, 10:00 Uhr (Osteingang)** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen. Abgaben zu zweit sind erlaubt und erwünscht.