Martin Schmidt
Volker Eing

Analysis II

27. Mai 2020

14. Großübung

1. Der Gauß'sche Satz.
Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \nabla \ln \| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \|_2$.

(a) Bestimme $\operatorname{div}(f)$.

(b) Sei $B(0, r)$ der Ball von $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_2)$ mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt im Ursprung und sei $\Phi : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$. Berechne die Ableitung Φ' und zeige, dass Φ bijektiv auf $\partial B(0, r) \setminus \{\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}\}$ abbildet. Berechne das Integral $\int_{\partial B(0,r)} \mathrm{d}\sigma$.

(c) Berechne $\int_{\partial B(0,r)} f \cdot N_B \, d\sigma$, wobei N_B das äußere Normalenvektorfeld auf $\partial B(0, r)$ ist. Wieso ist dies kein Widerspruch zum Satz von Gauß?

(d) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte, offene Teilmenge mit zweimal differenzierbarem Rand, welche den Ursprung $(0, 0)$ enthält. Zeige

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot N \, d\sigma = 2\pi.$$

Tipp: Benutze den Gaußschen Satz für $\Omega \setminus B(0, r)$ mit geeignetem $r > 0$.