

12. Großübung

1. Fubini.

Es seien $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \mid x - 1 < y < x\}$ und $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \mid x - 2 < y < x - 1\}$.

- (a) Zeige, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ die Mengen $R(y) := \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in R\}$ und $S(y) := \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in S\}$ Intervalle sind und bestimme diese.
- (b) Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Mengen $R(x) := \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in R\}$ und $S(x) := \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in S\}$ Intervalle sind und bestimme diese.
- (c) Sei $f := \chi_S - \chi_R$. Zeige: $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy \neq \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dy dx$. Wieso widerspricht dies nicht dem Satz von Fubini?

2. monotone und dominierte Konvergenz.

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $|f|$ uneigentlich Riemann-integrierbar. Zeige, dass f Lebesgue-integrierbar ist.

Tipp: Zeige zunächst, dass $|f| \in L^1(\mathbb{R})$ und folgere hieraus, dass $f \in L^1(\mathbb{R})$.