Martin Schmidt
Volker Eing

Analysis II

29. April 2020

10. Großübung

1. Eine wichtige Nullmenge

Betrachte die Teilmenge $\mathbb{R}_j^{d-1} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^d \mid x_j = 0\}$ des $\mathbb{R}^d$. Offenbar ist für jedes $j \in \{1, \ldots d\}$ ein Untervektorraum der Dimension $d-1$. Zeige, dass $\mathbb{R}_j^{d-1}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^d$ ist. Benutze hierfür offene Quader, das heißt ihre zugrundeliegenden Intervalle sind offen. [*Tipp:* Suche zunächst eine Folge von endlichen Quadern, die alle Komponenten außer der $j-$ten als reelle Zahlengerade abdeckt und passe danach die Quader in der $j-$ten Komponente an. Die Quader müssen nicht disjunkt sein!] Wie verhält es sich, wenn beliebige Intervalle erlaubt sind?

2. Lebesgue-Integral

Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x \notin (0,1) \\ k & \text{falls} \quad x \in [10^{-(k+1)}, 10^{-k}) \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Zeige, dass f Lebesgue-integrierbar ist und bestimme $\int f d\mu$.

[*Tipp*: Versuche f direkt als unendliche Linearkombination von Treppenfunktionen zu schreiben.]