Aufgabe 1.

Betrachte die Menge

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ oder } y \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$$

1. Gebe eine Formel für die kürzeste Wegstrecke an (in Y), die zwischen zwei Punkten $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in Y$ zurückgelegt werden muss.
2. Der so definierte Abstand stimmt mit einer aus der Vorlesung bekannten Metrik überein. Um welche handelt es sich?
3. Warum wird diese Metrik "Manhattan-Metrik"genannt?

Aufgabe 2 Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeige, dass eine Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ genau dann von einer Norm induziert ist, wenn die folgenden Bedingungen gelten: *Translationsinvarianz:* Für alle $x, y, z \in X$ gilt

$$d(x, y) = d(x + z, y + z)$$

Homogenität: Für alle $x \in X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$d(\alpha x, 0) = |\alpha| d(x, 0)$$