Martin Schmidt
Volker Eing

Analysis II

01. April 2020

8. Großübung

1. Fixe Punkte.

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ induktiv definiert durch

$$x_0 \in [0,\infty), \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}.$$

Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert und bestimme den Grenzwert.

(b) Gibt es ein Beispiel eines vollständigen metrischen Raumes und einer lipschitzstetigen Abbildung $f : X \to X$ mit kleinster Lipschitzkonstante $L > 1$, sodass f genau einen Fixpunkt hat?

2. Umkehren.
Beweise oder widerlege: Für jede stetig differenzierbare bijektive Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist f^{-1} differenzierbar.

3. Implizit gemeint.

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^x + \tan(y) \\ x^2 + z^3 + z \end{pmatrix}$.

Zeige, dass für $f(x,y,z) = \left(1,0\right)^T$ lokal um $\left(x,y,z\right)^T = \left(0,0,0\right)^T$ eine implizite Lösung der Form $g(x) = (y(x), z(x))^T$ existiert.