Martin Schmidt
Volker Eing

Analysis II

11. Mai 2020

Bonuszettel

1. Lineare Operatoren

Seien $X \neq \{0\}$ ein normierter Raum und $A, B : X \to X$ lineare Abbildungen, mit $A \circ B - B \circ A = \mathbb{1}$.

(a) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (hier bedeutet B^n das $n-$fache anwenden von B):

$$A \circ B^n - B^n \circ A = nB^{n-1}.$$

(4 Bonuspunkte)

(b) folgere aus (a), dass mindestens eine der linearen Abbildungen A, B nicht stetig ist. [Tipp: man schätze die rechte Seite der Gleichung aus (a) gewinnbringend ab. Benutze außerdem, dass $\|A \circ B\| \leq \|A\|\|B\|$ *(7 Bonuspunkte)*

2. Richtungsableitungen.

Seien X, Y Banachräume, $U \subset X$ offen und $f : U \to Y$ differenzierbar in x_0. Für $x_1 \in X$ ist die Abbildung $x : \mathbb{R} \to X$, $t \mapsto x(t) = x_0 + tx_1$ differenzierbar mit $x'(t) = x_1$.

(a) **(i)** Erläutere, warum es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x^{-1}[U]$. *(2 Bonuspunkte)*

(ii) Zeige, dass die Abbildung $(-\varepsilon, \varepsilon) \to Y$, $t \mapsto f(x(t))$ bei $t = 0$ differenzierbar ist und berechne die Ableitung [Per Definitionem stimmt diese Ableitung nun mit der Richtungsableitung in x_0 in Richtung x_1 überein.] *(3 Bonuspunkte)*

(b) Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y^2+y^4}{x^3+xy^2} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Funktion ist offenbar für alle (x, y) mit $x \neq 0$, differenzierbar. Folgere aus Aufgabenteil (a), dass diese Funktion nicht in $(0, 0)$ differenzierbar ist. *(4 Bonuspunkte)*

3. Extrema. Man untersuche die folgende Funktion auf lokale Extrema.

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$$

(6 Bonuspunkte)

4. Lagrangemultiplikatoren.

Sei

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^4 = x^3 - x^4\}$$

(a) Zeige, dass M kompakt ist. [Tipp: zeige zunächst, dass $|x| \leq 1$ für alle $(x, y) \in M$ gilt.]

(5 Bonuspunkte)

(b) Weil nun M kompakt ist hat die stetige Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to R^2, \quad (x, y) \mapsto y$$

ein Maximum und Minimum. Bestimme diese. [Achtung: auch mögliche Singularitäten der Niveaumenge, also Punkte wo $\nabla g(x, y) = 0$, wobei $g(x, y) = y^4 - x^3 - x^4$ kommen als mögliche Kandidaten für Extrema infrage.]

(9 Bonuspunkte)

5. Nullmengen.

(a) Zeige, dass das Bild $f[A]$ einer Nullmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ unter eine lipschitzstetigen Abbild $f : A \to \mathbb{R}^d$ eine Nullmenge ist. [Tipp: Zeige zuerst, dass wenn eine für die Menge A entsprechende Folge von endlichen Quadern gefunden wurde, dass diese Quader auch ohne Einschränkung als Würfel betrachet werden können (d.h. dass alle Kantenlängen gleich sind). Im zweiten Schritt ist es dann einfacher die Lipschitzstetigkeit unter $\|\cdot\|_\infty$ zu betrachten].

(9 Bonuspunkte)

(b) Sei nun $f : U \to \mathbb{R}^d$ eine stetig differenzierbare Funktion einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^d$ und $A \subset U$ eine Nullmenge. Zeige, dass $f(A)$ auch eine Nullmenge ist. *(4 Bonuspunkte)*

6. Lebesgueintegration.

Seien $\Delta^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0 \quad \text{und} \quad x + y \leq 1\}$ das Standard "2-Simplex" und $n, m \in \mathbb{N}$. Berechne das folgende Integral:

$$\int_{\mathbb{R}^2} x^{n-1} y^{m-1} \chi_{\Delta^2} \mathrm{d}\mu$$

(7 Bonuspunkte)

Die Übungsblätter werden online eingereicht, Abgabefrist ist Freitag, der 22. Mai um 8:00 Uhr zusammen mit dem "normalen" Übungszettel. Wichtig ist dabei, dass pro Übungsblatt nur eine PDF-Datei erzeugt wird (d.h. ihr erstellt 2 Dateien!). Diese muss gut lesbar sein und folgenden Dateinamen haben: ›PGnr_nachname1_nachname2_Blattnr.pdf‹.

WICHTIG: Die Dateigröße darf 5MB nicht überschreiten. Schickt bitte eurem Tutor die Lösungen, die Emailadressen erfahrt ihr auf unserer Website.