

UNIVERSITÄT MANNHEIM

SEMINAR

FSS 2020

---

**Ausgewählte Themen gewöhnlicher  
Differentialgleichungen und dynamischer  
Systeme**

---

*Name*

Tian Chu GAN

*Betreuer*

Prof. Dr. M.U. SCHMIDT

2. April 2020

$X$  ist ein kompakter metrischer Raum.  $f : X \rightarrow X$  ist ein Homöomorphismus.

**Definition 1. Dynamische Systeme**

$f^n := f \circ f \circ \dots \circ f$ ,  $f^0 = Id$ ,  $f^{-n} = (f^n)^{-1}$  heißen *Iterationen* von  $f$ .

Offensichtlich gilt,

$$f^n \circ f^m = f^{n+m}, \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Die Familie von Iterationen  $\{f^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  heißt ein *dynamisches System*.

**Definition 2. Orbit/Trajektorie**

Sei  $x \in X$  beliebig, die Menge  $\{f^n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$  bezeichnet man als *Orbit* von  $x$  unter  $f$ , man schreibt  $Orb(x, f)$  oder  $Orb(x)$ .

Jede 2 Orbits sind entweder identisch oder disjunkt. Die positiven und negativen Orbits lassen sich wie folgendes definieren.

$$Orb^+(x) := \{x, fx, f^2x, \dots\}$$

$$Orb^-(x) := \{x, f^{-1}x, f^{-2}x, \dots\}$$

Man nennt  $x \in X$  einen *periodischen Punkt* genau dann, wenn

$$f^n(x) = x, \text{ für } n \geq 1$$

Somit ist  $\{f^n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$  ein periodischer Orbit.

Die *Periode* ist definiert durch

$$n := \min\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) = x\}$$

$x \in X$  heißt *Fixpunkt*, falls  $n = 1$  ist. Die Menge aller periodischen Punkte bzw. aller Fixpunkte schreibt man als  $P(f)$  bzw.  $Fix(f)$ .

**Bemerkung 2.1.**  $x \in X$  periodisch  $\Leftrightarrow Orb(x)$  endlich

*Beweis.* " $\Rightarrow$ " Sei  $x \in P(f)$  mit Periode  $n$ . D.h. Nach allen Vielfachen der Periode werden die gleichen Punkte durchlaufen. Dann ist der Orbit von  $x$  angegeben durch

$$|Orb(x)| = |\{f^{m \bmod n}(x) : m \in \mathbb{Z}\}| < \infty, \text{ denn } n < \infty$$

" $\Leftarrow$ " Wenn  $Orb(x)$  endlich ist, dann stimmen mindestens 2 von unendlich vielen Folgenmitgliedern  $f^n(x)$  übereinstimmen. D.h.  $\exists m, n \geq 1, m > n$ , sodass gilt  $f^n(x) = f^m(x)$ . Da  $f$  ein Homöomorphismus ist, gilt  $x = f^{m-n}(x)$ . Wir erhalten eben die Definition für  $x$  periodisch, das ist aber widersprüchlich zu Definition von  $x$ . □

**Definition 3. Invariante Menge**

Sei  $\Lambda \subset X$ ,  $\Lambda$  heißt *invariant* (bezüglich  $f$ ) genau dann, wenn  $f(\Lambda) = \Lambda$ .

**Anmerkung.** 1. Jeder Orbit ist invariant.

2.  $\Lambda$  ist invariant genau dann, wenn  $\Lambda$  sich als Vereinigung von Orbits darstellen lässt.

**Satz 4.** Wenn  $\Lambda$  invariant ist, so sind  $\bar{\Lambda}$ ,  $\partial\Lambda$  und  $\Lambda^\circ$ .

*Beweis.* Da  $f$  ein Homöomorphismus ist,  $f(\bar{\Lambda}) = \overline{f(\Lambda)} = \bar{\Lambda}$ .

Analog folgt,

$$\begin{aligned} f(\partial\Lambda) &= f(\bar{\Lambda} \setminus \Lambda) = f(\bar{\Lambda}) \setminus f(\Lambda) = \bar{\Lambda} \setminus \Lambda = \partial\Lambda \\ f(\Lambda^\circ) &= f(\Lambda \setminus \partial\Lambda) = f(\Lambda) \setminus f(\partial\Lambda) = \Lambda \setminus \partial\Lambda \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 4.1.**  $Fix(f)$  ist kompakt und invariant, kann aber leer sein.

*Beweis.* Zu Invarianz: Sei  $x \in Fix(f)$  beliebig. D.h. die Periode

$$n = \min\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) = x\} = 1$$

Es gilt daher,

$$f^n(x) = x, \forall x \in X, n \geq 1 \Rightarrow f(Fix(f)) = Fix(f)$$

Zu Kompaktheit:  $X$  ist schon kompakt und  $Fix(f) \subset X$ . Man muss nur noch Abgeschlossenheit von  $Fix(f)$  zeigen.

Sei  $d$  die Metrik auf  $X$ , definiere eine Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} g : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(f(x), x) \end{aligned}$$

$g$  ist stetig, denn die Verkettung 2er stetigen Funktionen ist wieder stetig. Wir zeigen  $Fix(f) = g^{-1}(\{0\})$  mit Inklusion von beiden Richtungen.

" $\subset$ " Sei  $x \in Fix(f)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(x) &= d(f(x), x) \\ &= d(x, x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

" $\supset$ " Sei  $y \in g^{-1}(\{0\}) := \{x \in X | g(x) = 0\}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow g(y) &= 0 \\ \Leftrightarrow d(f(y), y) &= 0 \\ \Leftrightarrow f(y) &= y \\ \Rightarrow y &\in Fix(f) \end{aligned}$$

Daher ist Inklusion von beiden Richtungen gezeigt. □

**Beispiel.** Sei

$$\begin{aligned} f : S^1 &\rightarrow S^1 \\ \phi &\mapsto \phi + \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Q}) \end{aligned}$$

wobei  $S^1$  der Einheitskreis ist.

**Beh:**  $P(f) = \emptyset$

*Beweis.* Widerspruchsbeweis! Sei  $\phi \in P(f)$ , dann gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  so dass  $f^n(\phi) = \phi + n\alpha = \phi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ . Das bedeutet, dass  $\alpha = 2\pi \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ , ein Widerspruch zur Definition von  $\alpha$ . Deshalb ist  $P(f)$  in diesem Fall leer. □

**Bemerkung 4.2.**  $P(f)$  ist entweder invariant aber eventuell leer oder nichtleer aber nicht kompakt.

*Begründung:* Sei  $x \in P(f)$ , dann müssen alle Punkte aus  $Orb(x)$  auch periodisch sein. Dann ist das Bild von  $P(f)$  sich selbst und ist daher invariant. Bild einer leeren Menge ist offensichtlich leer. Für Nicht-Kompaktheit kann man Abgeschlossenheit widerlegen. Siehe Beispiel.

**Beispiel.**  $\Sigma_2$  sei ein symbolischer Raum definiert durch

$$\Sigma_2 = \prod_{n=-\infty}^{\infty} A_n \text{ wobei } A_n = \{0, 1\} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Ein Punkt aus einem symbolischen Raum heißt *Symbolsequenz*  $\dots a_{-2} \cdot a_{-1} \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \dots$  wobei  $a_n \in \{0, 1\}$ . Eine Basis von Umgebungen von  $a \in \Sigma_2$  ist definiert durch

$$C_j(a) = \{b \in \Sigma_2 \mid b_n = a_n, \forall -j \leq n \leq j\}$$

Ferner definiert man eine zugehörige Metrik

$$d(a, b) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^{|n|}}$$

**Behauptung:** Die Menge aller periodischen Punkte der Linksschift-Abbildung  $\sigma$  ist nicht kompakt.

*Idee:* man muss nur die Abgeschlossenheit der Menge widerlegen.

*Beweis.* Seien  $a \in \Sigma_2$  fest und  $b \in \Sigma_2$  eine Symbolsequenz, die das  $(2j+1)$ -Tupel  $a_{-j} \dots a_j$  unendlich in beiden Richtungen wiederholt. Offenbar hat  $b$  Periode  $(2j+1)$ . Ferner ist  $b$  ein Element aus der  $j$ -Umgebung von  $a$ . Die Symbolsequenz  $\{\dots, 0, 1, 1, \dots\}$  ist nicht periodisch, weil die Abbildung  $x \mapsto f^n(x)$  injektiv ist (man kann  $n$  daran ablesen, um wieviel die erste 1 nach links oder rechts verschoben wurde). Also sind nicht alle Punkte periodisch, deshalb sind die Menge der periodischen Punkte dicht aber nicht abgeschlossen. Daher wurde Dichtheit und somit Nicht-Abgeschlossenheit von  $Per(\sigma)$  gezeigt.  $\square$

**Bemerkung 4.3.** Sei  $x \in X$ , der positive Orbit  $x, fx, f^2x, \dots$  konvergiert i.A. nicht, sonst ist das Limes ein Fixpunkt.

*Begründung:* Sei  $f^n x \rightarrow x^*$ . Aus Stetigkeit von  $f$  gilt,  $f(f^n(x)) \rightarrow f(x^*) = f^{n+1}(x) \rightarrow x^*$

Jetzt definieren wir einige invariante Mengen.

**Definition 5.**  $\omega$ -Limes &  $\alpha$ -Limes

$y \in X$  heißt  $\omega$ -Limes von  $x \in X$ , wenn es eine unbeschränkte, positive Teilfolge  $(n_i)_{i \geq 1} \subset \mathbb{N}$  gibt, sodass gilt

$$f^{n_i}(x) \rightarrow y$$

Die Menge aller  $\omega$ -Limes schreibt man als  $\omega(x)$ .

Analog ist  $y \in X$  ein  $\alpha$ -Limes von  $x \in X$ , wenn gilt

$$f^{-n_i}(x) \rightarrow y \text{ für } n_i \rightarrow \infty$$

Offenbar ist  $\alpha(x) = \omega(x, f^{-1})$ .

**Bemerkung 5.1.** Wenn  $x \in P(f)$ , dann  $\omega(x) = \alpha(x) = Orb(x)$ .

*Begründung:*  $x \in P(f) \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |Orb(x)| = N \Rightarrow \forall n \in \{0, \dots, N-1\} : x_n$  Fixpunkt für die Folgen  $(f^{n+kN}(x))_{k \geq 1} \Rightarrow Orb(x) \subseteq \omega(x)$ .  $\omega(x) \subseteq Orb(x)$  folgt direkt aus der Definition.

Analog für  $\alpha(x)$  mit  $f^{-(n+kN)}$ .

**Satz 6.**  $\forall x \in X, \omega(x)$  nichtleer, kompakt und invariant. Es gilt außerdem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), \omega(x)) = 0$$

*Beweis.* Aus Kompaktheit folgt direkt, dass  $\omega(x)$  nichtleer.

*Zu Kompaktheit:* Sei zunächst  $(y_k)_{k \geq 1} \subset \omega(x)$  eine konvergente Folge. Dann für jedes  $k$  gibt es eine Teilfolge von  $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  mit

$$f^{n_k^i}(x) \rightarrow y_k$$

wobei  $(n_k^i)_{i \geq 1}$  eine Teilfolge zu jedem  $k$  ist. Wir verwenden das Diagonalfolgenargument und wähle dann ein geeignetes Element aus jeder Teilfolge  $(f^{n_k^i}(x))_{i \geq 1}$ , ohne Einschränkung nennen wir das Element  $f^{n_k^k}(x)$  und bilden aus den ausgewählten Elementen eine Folge.  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall k, j > N :$

$$\begin{aligned}
\|f^{n_k}(x) - y\| &= \|f^{n_k}(x) - f^{n_j}(x) + f^{n_k}(x) - f^{n_j}(x) + f^{n_j}(x) - y_j + y_j - y\| \\
&\leq \|f^{n_k}(x) - f^{n_j}(x)\| + \|f^{n_k}(x) - f^{n_j}(x)\| + \|f^{n_j}(x) - y_j\| + \|y_j - y\| \\
&\leq \epsilon/4 + \epsilon/4 + \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon
\end{aligned}$$

Das heißt, dass es eine Teilfolge von  $(y_k)_{k \geq 1}$  existiert, die gegen  $y \in \omega(x)$  konvergiert. Daraus folgt die Abgeschlossenheit von  $\omega(x)$

*Zu Invarianz:* Z.Z.  $f(\omega(x)) = \omega(x)$ . Wir zeigen durch Inklusion von beiden Richtungen.

Zeige zunächst, dass  $f(\omega(x)) \subset \omega(x)$ .

Sei  $y \in \omega(x)$ ,  $\exists (n_i)_{i \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$  Teilfolge, sodass gilt

$$f^{n_i}(x) \rightarrow y$$

Aus Stetigkeit von  $f$  folgt,

$$f^{n_i+1}(x) \rightarrow f(y) \in \omega(x)$$

Dann zeige, dass  $\omega(x)$  auch in  $f(\omega(x))$  enthalten ist.

Seien  $y$  und  $(n_i)_{n \geq 1}$  wie oben mit  $f^{n_i}(x) \rightarrow y \Rightarrow f^{n_i-1}(x) = f^{-1}(y) \Rightarrow f(\omega(x)) \supset \omega(x)$

*Zur Gleichung: Widerspruchsbeweis!*

Wir nehmen an:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), \omega(x)) \neq 0 \\
&\Rightarrow \exists (n_i)_{i \geq 1} \text{ Teilfolge mit } d(f^{n_i}(x), \omega(x)) \geq \epsilon_0, \forall i
\end{aligned}$$

Es existiert eine Teilfolge, die gegen ein Element nicht in  $\omega(x)$  konvergieren. Für eine beliebige Teilfolge  $(n_i^k)_{k \geq \infty}$  von  $(n_i)_{i \geq 1}$  mit

$$f^{n_i^k}(x) \rightarrow z \notin \omega(x)$$

Das ist widersprüchlich zur Definition von  $\omega(x)$ , weil jeder Grenzwert einer Teilfolge laut Definition der Limesmenge in der Limesmenge liegen muss.  $\square$

### Definition 7. Limesmenge

Wir interessieren uns für das langfristige Verhalten eines Orbits, welches in der Limesmenge  $L(f)$  enthalten ist.

$$L(f) := \overline{\bigcup_{x \in X} \omega(x) \cup \alpha(x)}$$

$L(f)$  ist nichtleer, kompakt und invariant.

### Definition 8. Positive u. negative Rekurrenz

Ein periodischer Orbit ist die stärkste Form von Rekurrenz. Es gibt außerdem 2 schwächere Arten von Rekurrenzen, nämlich positive bzw. negative Rekurrenz. Ein Punkt  $x \in X$  heißt positive rekurrent, wenn  $x$  ein Element aus  $\omega(x)$  ist. Man kann positive Rekurrenz so verstehen, dass  $f^{n_i}(x) \rightarrow x, n_i \rightarrow \infty$ . Analog für negative Rekurrenz.

$R(f)$  bezeichnet die Menge aller positiven oder negativen oder beide positiven und negativen rekurrenten Punkte.

**Lemma 9.**  $R(f)$  ist nichtleer, invariant aber nicht unbedingt kompakt.

*Beweis. Zu Nichtleer:* Wir zeigen Nichtleer mit Satz 15, den wir später zeigen werden. Da  $X$  nichtleer, bzgl.  $f$  invariant und Kompakt ist, gibt es eine minimale Teilmenge  $\Lambda$  von  $X$ . Sei  $x \in \Lambda \subset X$ . Dann liegen  $\omega(x)$  und  $\alpha(x)$  wegen Invarianz auch in  $\Lambda$ . Nach Satz 6 sind  $\omega(x)$  und  $\alpha(x)$  nicht leer, dann folgt  $\omega(x) = \alpha(x) = \Lambda$ . Deswegen liegt  $x \in \omega(x)$  und  $x \in \alpha(x)$  und somit auch in  $R(f)$ . Laut Definition einer minimalen Menge ist  $R(f) = \Lambda(x) \neq \emptyset$ .

*Zu Invarianz:* Sei  $x \in R(f)$ , wir nehmen ohne Einschränkung an, dass es eine konvergente Teilfolge des positiven Orbits gibt. D.h.  $\exists (n_i)_{i \geq 1} \rightarrow \infty : f^{n_i}(x) \rightarrow x$ .  
 $\Rightarrow f(f^{n_i}(x)) \rightarrow f(x)$  aus Stetigkeit von  $f$ , daher ist  $f(x)$  auch rekurrent.  
*Nicht notwendige Kompaktheit:* Siehe Beispiel. □

**Beispiel.** Wir betrachten nochmals das vorherige Beispiel über  $\Sigma_2$ . Wir wissen schon, dass die Menge aller periodischen Punkte der Linksshift-Abbildung dicht ist und wir werden später noch zeigen, dass  $P(f)$  eine Teilmenge von  $R(f)$  ist, aber jetzt verwenden wir das Resultat ohne Beweis. Wir nehmen an, dass  $R(f)$  abgeschlossen ist. (Spoiler alert: Wir wollen eigentlich Abgeschlossenheit widerlegen.)  $P(f)$  ist auch eine Teilmenge von  $R(f)$  ist und gilt außerdem,  $\overline{P(f)} = \Sigma_2$ . Es folgt, dass Abschluss von  $R(f)$  auch der Raum ist. Wir zeigen nun, dass  $R(f)$  selbst nicht gleich  $\Sigma_2$ . Wir definieren nun eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  mit alle 1's für  $n$  strikt positive, sonst sind die Einträge alle 0. Wir untersuchen das Verhalten der  $\omega$ - und  $\alpha$ -Limesmenge. Es gilt offenbar, dass  $(x_n)_{n \geq 1}$  unter Rechtsshift gegen eine Folge mit allen 0-Einträgen konvergiert und gegen Folge mit allen 1-Einträgen unter Linksshift. Dann gehört die Folge zu weder  $\omega((x_n)_{n \in \mathbb{Z}})$  noch  $\alpha((x_n)_{n \in \mathbb{Z}})$ . Wir haben somit gezeigt, dass eine Folge aus  $\Sigma_2$  nicht unbedingt in  $R(f)$  liegt. Daher ist  $R(f)$  nicht gleich  $\Sigma_2$  und nicht abgeschlossen.

**Definition 10. Nicht-wandernde Punkte**

Ein Punkt  $x \in X$  heißt nicht-wandernd bzgl.  $f$ , wenn es ein  $n \geq 1$  für alle Umgebungen  $V$  von  $x$  gibt, sodass gilt  $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$ . Das heißt, alle Umgebungen  $V$  werden von einem nicht-wandernden Punkt mindestens 2 mal getroffen.  
 $\Omega(f)$  ist die Menge aller nicht-wandernden Punkte von  $f$ .

**Bemerkung 10.1.**  $\Omega(f)$  ist nichtleer, kompakt und invariant.

*Beweis. Zu Nichtleer:* Alle Umgebungen von  $x \in \omega(x)$  erfüllen die Bedingungen.

*Zu Kompaktheit:* Offenbar gilt  $\Omega(f) \subset X \Rightarrow$  Man muss nur noch Abgeschlossenheit zeigen.

Sei  $(x_n)_{n \geq 1} \subset \Omega(f)$  eine konvergente Folge mit Grenzwert  $x$ . Definiere einen Ball um einen Punkt als  $V_x := B(x, \epsilon), \epsilon > 0$ . Es gilt nach Definition,  $\exists n \geq 1 : f^n(V_{x_n}) \cap V_{x_n} \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$ . Aus Folgenkonvergenz enthält  $V_x$  alle bis auf endlich viele  $x_n$ , deswegen finden wir ein geeignetes  $m \geq 1$  und ein  $n \in \mathbb{N}$  groß genug, sodass gilt,  $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$ . Bisher ist Abgeschlossenheit bzw. Kompaktheit gezeigt.

*Zu Invarianz:* Sei  $x \in \Omega(f)$  beliebig ausgewählt. Nach Definition gilt  $\forall V_x$  Umgebungen von  $x, \exists n \geq 1 : f^n(V_x) \cap V \neq \emptyset. \Rightarrow f(f^n(V_x) \cap V_x) \neq \emptyset$  aus Surjektivität von  $f$   
 $\Leftrightarrow f(f^n(V_x)) \cap f(V_x) \neq \emptyset$ , wobei  $f(V_x)$  wegen Stetigkeit eine Umgebung von  $f(x)$  ist.  
 $\Rightarrow f(x) \in \Omega(f)$   
 $\Rightarrow \Omega(f)$  invariant. □

**Definition 11.  $\epsilon$ -Ketten und Ketten-Rekurrenz**

Eine  $\epsilon$ -Kette ist eine endliche Folge  $x_0, \dots, x_k$ , mit  $x_0 = x, x_k = y$  mit

$$d(f(x_n), x_{n+1}) < \epsilon, \forall n = 0, 1, \dots, k - 1$$

Die Kette heißt periodisch, wenn  $x = y$  gilt.

$x \in X$  nennt man Ketten-rekurrent bzgl.  $f$ , wenn es eine für alle  $\epsilon > 0$  von  $x$  zu sich bzw. durch sich periodische  $\epsilon$ -Kette existiert.

Die Menge aller Ketten-rekurrenter Punkte bezeichnet man als  $CR(f)$ .

**Bemerkung 11.1.** Wenn  $x \notin CR(f)$  gilt, existiert es eine attraktive Menge  $A$ , sodass  $x$  kein Element aus  $A$  ist aber  $A$   $x$  attrahiert, dann ist  $x$  auf keinen Fall Ketten-rekurrent.  $\rightsquigarrow$  Abschnitt 1.4 (Thilo Kraft)

**Bemerkung 11.2. Eine alternative Definition zu Ketten-Rekurrenz**

$x \in X$  heißt Ketten-rekurrent genau dann, wenn für alle  $\epsilon > 0$ , existiert eine periodische  $\epsilon$ -Kette, die durch eine  $\epsilon$ -Umgebung von  $x$  läuft.

*Beweis.* Sei  $x \in X$  rekurrent, definiere dazu eine  $\epsilon$ -Kette,  $x_0, \dots, x_k$  mit  $x_0 = x_k = x$  sodass  $d(f(x_n), x_{n+1}) < \epsilon, x_0 = x. x_k = x$  liegt dann automatisch in der Umgebung von  $x$ .

” $\Leftarrow$ ” Wegen Kompaktheit von  $X$  ist  $f$  gleichmäßig stetig. Aus der Definition folgt,  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall d(x, x_0) < \delta, d(f(x), f(x_0)) < \frac{\epsilon}{3}$ . Zu diesem beliebigen  $\epsilon$  konstruieren wir eine  $\epsilon$ -Kette von  $x_0$  nach sich selbst und nennen die Elemente der Kette  $x_0, \dots, x_n := x_0$ . Aus jedem Ball um den Punkt  $x_k$  für  $k = 0, \dots, n$  wählen wir einen Punkt  $x'_k$  aus und es gilt  $d(x_k, x'_k) < \delta$  und offenbar auch  $d(f(x_k), f(x'_k)) < \frac{\epsilon}{3}$ . Wir setzen alles zusammen, um das folgende abzuschätzen,

$$\begin{aligned} d(f(x'_k), x'_{k+1}) &\leq d(f(x'_k), f(x_k)) && \text{aus glm. Stetigkeit} \\ &+ d(f(x_k), x_{k+1}) && x_k \text{ } \epsilon\text{-Kette} \\ &+ d(x_{k+1}, x'_{k+1}) && \text{Definition von dem Ball um } x_k \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \delta \end{aligned}$$

Daher müssen wir  $\delta < \frac{\epsilon}{3}$  wählen, damit die Abschätzung kleiner als  $\epsilon$  ist. Daraus folgt, dass  $x'_0, \dots, x'_n$  auch eine  $\epsilon$ -Kette ist.  $\Rightarrow x \in CR(f)$ .  $\square$

**Bemerkung 11.3.**  $CR(f)$  kompakt, invariant und es gilt

$$\overline{P(f)} \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset CR(f)$$

**Anmerkung.** Es gibt für alle diese Inklusionen Beispiele, in denen die Inklusionen jeweils echte Inklusionen sind, die ich hier aber nicht zeigen werde.

*Beweis.* Zu *Abgeschlossenheit*: Sei  $(x_n)_{n \geq 1} \subset CR(f)$  eine konvergente Folge mit Grenzwert  $x$ . Wir wissen schon, dass jeder Ball in  $x$  enthält unendlich bis auf endlich viele  $x_n$ , und  $x_n \in CR(f), \forall n \geq 1$ . D.h. wir können die periodischen  $\epsilon$ -Ketten von allen  $x_n \in B(x, \delta)$  ausnutzen. Dann erhalten wir Abgeschlossenheit mittels Bemerkung 11.2.

Zu *Invarianz*: Wegen der Kompaktheit von  $X$  ist  $f$  gleichmäßig stetig. Also gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass  $d(f(x), f(y)) < \delta$  folgt. Dann bildet  $f$  eine beliebige  $\delta$ -Kette von  $x$  nach  $x$  auf eine  $\epsilon$ -Kette von  $f(x)$  nach  $f(x)$  ab.

Zu den *Inklusionen der Mengen*: Die Inklusion von  $\overline{P(f)}$  in  $L(f)$  ist klar nach Bemerkung 5.1

$$Orb(x) = \omega(x) = \alpha(x), \forall x \in P(f) \Rightarrow P(f) = L(f)$$

Wegen der Abgeschlossenheit von  $\Omega(f)$  genügt es zu zeigen, dass die Limesmengen in  $\Omega(f)$  enthalten sind. Wähle  $x \in L(f)$  beliebig aber fest und definiere dazu noch eine Umgebung um  $x, V_x$  (genauso definiert wie die Umgebung in dem Beweis von Bemerkung 10.1). Es existiert ein  $y \in \omega(x) \cup \alpha(x) \Leftrightarrow y \in \omega(x) \vee y \in \alpha(x)$ . Dann gilt

$$\omega(y) \cap V_x \neq \emptyset \vee \alpha(y) \cap V_x \neq \emptyset$$

Fallunterscheidung:

- $\omega(y) \cap V_x \neq \emptyset \Rightarrow \exists (n_i)_{i \geq 1}$  unbeschränkt:  $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(y) \in V_x$ . Da  $V_x$  eine offene Menge beschreibt, existiert ein  $N \geq 1 : \forall n_i \geq N, f^{n_i}(y) \in V_x$ . Wir wählen ferner ein beliebiges  $n_j > n_i$ . Es gilt

$$\begin{aligned} &f^{n_i}(y) \cap V_x \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow f^{n_j}(y) &= f^{n_j - n_i + n_i}(y) \cap V_x \neq \emptyset \dots \text{aus Surjektivität von } f \\ \Leftrightarrow f^{n_j - n_i} \circ f^{n_i}(y) &\cap V_x \neq \emptyset \end{aligned}$$

Setze  $n := n_j - n_i$  und die Behauptung ist gezeigt für den 1. Fall.

- Für  $\alpha(x)$  analog. Man invertiert die Vorzeichen in der Potenz und setzt stattdessen  $n := n_j - n_i$  für  $n_i, n_j < 0$ .

Sei  $x \in \Omega(f)$  und gilt  $\forall V_x$  Umgebung von  $x, \exists n \geq 1$  mit  $f^n(V_x) \cap V_x \neq \emptyset$ . Damit können wir eine  $\epsilon$ -Kette von  $x$  nach  $f^n(x)$  konstruieren, sei die Kette  $x_1, \dots, x_n$  mit  $x_i := f^i(x)$  für  $i = 0, \dots, n-1$ . Man erhält so ein  $n$ , weil  $x$  nicht wandernd ist. Ferner gilt

$$f(x_{n-1}) = f^n(x) \in f^n(V_x) \cap V_x \neq \emptyset$$

Wähle noch dazu  $x_n = x$  und erhalten wir eine Kette von  $x$  nach  $x$ . Mittels Bemerkung 11.2 gilt  $d(x_m, x_1) < \epsilon$  für  $\epsilon$  beliebig klein. Daher haben wir alle Inklusionen gezeigt.  $\square$

Man betrachtet eine nichtleere, kompakte und invariante Menge als ein Subdynamical System.

### Definition 12. Minimale Menge

$\Lambda \subset X$  ist eine minimale Menge, falls sie nichtleer, kompakt und invariant, aber keine echten Teilmengen der minimalen Menge können alle 3 Eigenschaften erfüllen.

**Beispiel.** Ein Periodischer Orbit ist eine minimale Menge, da keine echte Teilmenge von dem Orbit invariant ist.

### Definition 13. Partielle Ordnung

$\prec$  ist eine partielle Ordnung für die Menge  $S$  genau dann, wenn gilt

1.  $x \prec x, \forall x \in S$
2.  $x \prec y \wedge y \prec x \Rightarrow x = y$
3.  $x \prec y \wedge y \prec z \Rightarrow x \prec z$

Ein Paar  $(x, y)$  ist nicht vergleichbar, wenn weder  $x \prec y$  noch  $y \prec x$  gilt.

Eine Teilmenge ist total geordnet, wenn für alle Elemente aus der Teilmenge gilt entweder  $x \prec y$  oder  $y \prec x$ .  $z \in S$  ist das minimale Element in der Menge, wenn nur eine einzige der folgenden Aussagen erfüllt ist

- $x \in S$  nicht mit  $z$  vergleichbar
- $z \prec x$

Sei  $A \subset S$  und es gilt (2) für alle  $x \in A$ , dann ist  $z$  untere Schranke für  $A$ .

### Satz 14. Lemma von Zorn

Eine partiell geordnete Menge  $(S, \prec)$  in der für jede total geordnete Teilmenge eine untere Schranke in  $X$  existiert, besitzt auch ein minimales Element.

**Bemerkung 14.1.** Lemma von Zorn ist u.a. äquivalent zu Auswahlaxiom (daher kein Beweis).

Mit dem Lemma von Zorn erfolgen häufig Existenzaussagen. zum Beispiel: Jeder Vektorraum hat eine Basis (d.h. jedes Element ist endliche Linearkombination aus Basiselementen). [Funktionalanalysis, HWS 2019, Parczewski]

**Satz 15.** Alle nichtleere, kompakte und invariante Mengen enthalten jeweils eine minimale Menge.

*Beweis.* Seien  $\Gamma$  nichtleer, kompakt und invariant bzgl.  $f$ ,  $\mathcal{C}$  die Menge aller nichtleeren, kompakten und invarianten (es wird in der Zukunft mit n.k.i. bezeichnet) Teilmengen von  $\Gamma$ . Klar ist  $\subset$  eine partielle Ordnung über  $\mathcal{C}$ . Sei  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$  total geordnet und  $A = \bigcap_{A_i \in \mathcal{A}} A_i$ , ist dann  $A$  auch n.k.i. bzgl.  $f$ .

*Begründung:* Kompaktheit und Invarianz sind trivial. Falls es generell eine Familie von abgeschlossenen Mengen  $\mathcal{A}$  gibt, wobei der Schnitt aller Elemente leer ist, dann gilt

$$\begin{aligned} \bigcap_{A_k \in \mathcal{A}} A_k &= \emptyset \\ \Leftrightarrow \left( \bigcap_{A_k \in \mathcal{A}} A_k \right)^c &= X \\ \Leftrightarrow \bigcup_{A_k \in \mathcal{A}} A_k^c &= X, A_k^c \text{ offen} \end{aligned}$$



Dann erhalten wir eine Überdeckung für  $X$ . Wegen Kompaktheit existiert es eine *endliche* Teilüberdeckung,  $D$ , die sich ohne Einschränkung dadurch definieren lässt

$$X \subset D := \bigcup_{k=1}^n A_k^c$$

Wir nehmen dann wieder das Komplement von  $D$  und mittels de Morganscher Regel können wir schlussfolgern, dass es einen endlichen Durchschnitt von  $A_k$  gibt, der leer ist und somit gibt es auch eine Menge,  $A_i \in \mathcal{A}$ , die leer ist, welches widersprüchlich zur Definition von  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$  ist.

Es gilt offenbar, dass  $A \subset M, \forall M \in \mathcal{A}$ . Nach Lemma von Zorn besitzt  $\mathcal{C}$  ein minimales Element, das eine minimale Menge bzgl.  $f$  ist.  $\square$

### Satz 16. Eine alternative Definition zu Minimalität

$\Lambda$  sei eine kompakt und invariante Menge.  $\Lambda$  ist auch minimal genau dann, wenn  $Orb(x)$  für alle  $x \in \Lambda$  dicht in der Menge liegt.

*Beweis.* "⇒" Sei  $\Lambda$  eine minimale Menge und  $x \in \Lambda$  beliebig. Wegen Invarianz und Abgeschlossenheit liegt  $Orb(x)$  in  $\Lambda$ . Klar ist  $Orb(x)$  auf keinen Fall leer, und aus Abgeschlossenheit folgt Kompaktheit. Wir betrachten nochmals die partielle Ordnung "⊂". Da  $\Lambda$  die minimale Menge ist, gilt für alle kompakten und invarianten Teilmengen  $M$  aus  $X$ , dass  $\Lambda \subset M$  oder in diesem Fall,  $\Lambda \subset \overline{Orb(x)} \subset X$ . Insgesamt gilt  $\Lambda = \overline{Orb(x)}$ .

"⇐" Wir zeigen die Aussage mit Kontraposition. z.z.:  $\Lambda$  nicht minimal  $\Rightarrow \exists x \in \Lambda : \overline{Orb(x)} \subsetneq \Lambda$ . Sei  $\Lambda$  nicht minimal, dann existiert eine echte n.k.i. Teilmenge von  $\Lambda$ ,  $\Lambda_1$ . Wähle beliebig  $x \in \Lambda_1 \Rightarrow \overline{Orb(x)} \subset \Lambda_1 \neq \Lambda$ .  $\square$

### Definition 17. Nirgends dicht

$\Lambda \subset X$  heißt nirgends dicht in  $X$ , wenn  $\overset{\circ}{\Lambda}$  in  $X$  leer ist (oder  $X \setminus \partial\Lambda$  dicht in  $X$  ist).

**Beispiel.**  $S := \{(x, y) \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 = 1\}$  ist nirgends dicht.

### Definition 18. Zusammenhängender Raum

Ein topologischer Raum  $(X, \tau)$  heißt zusammenhängend, wenn es keine zugleich offene und abgeschlossene (offen-abgeschlossen) Teilmengen außer  $\emptyset$  und  $X$  gibt.

Eine Teilmenge  $A \subset X$  ist zusammenhängend, wenn  $A$  als Unterraum zusammenhängend ist.

Eine zusammenhängende offene Teilmenge eines topologischen Raums heißt Gebiet.

**Fakt 18.1.** Ist  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum, so sind äquivalent:

1.  $(X, \tau)$  zusammenhängend
2.  $X$  ist nicht die Vereinigung 2er nichtleerer offenen oder abgeschlossenen disjunkten Teilmengen
3. Aus  $X = A \cup B \wedge \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$  folgt stets  $X = A \vee X = B$
4. Jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow D_2, D_2 := \{0, 1\}$  ist konstant.

[Allgemeine Topologie I, Bartsch, 2009]

**Satz 19.** Sei  $X$  zusammenhängend, dann ist jede minimale Menge bzgl.  $f$  entweder  $X$  oder nirgends dicht in  $X$ .

*Beweis.* Sei  $\Lambda$  eine n.k.i.(nichtleer, kompakt und invariant) Menge bzgl.  $f$ .  $\partial\Lambda$  ist offensichtlich abgeschlossen und daher kompakt. Nach Satz 4 ist  $\partial\Lambda$  auch invariant. Wir haben bereits gezeigt, dass  $\partial\Lambda \subsetneq \Lambda$  die folgenden Eigenschaften schon erfüllt

- Kompaktheit
- Invarianz

Damit  $\Lambda$  eine minimale Menge wird, muss dann  $\partial\Lambda$  eine leere Menge ist.

Wäre  $\partial\Lambda$  nichtleer, müsste dann  $\partial\Lambda = \Lambda$  gelten, damit die erfüllten Eigenschaften von  $\partial\Lambda$  nicht widersprüchlich zu der Definition der minimalen Mengen ist. Daraus folgt, dass das Innere von  $\Lambda$  eine leere Menge ist. D.h.,  $\Lambda$  nirgends dicht.  $\square$

**Definition 20. Unzerlegbarkeit**

Die Menge  $\Lambda$  ist unzerlegbar genau dann, wenn  $\Lambda$  sich nicht in 2 disjunkte Vereinigung kompakter und invarianter Mengen zerlegen lässt.

**Definition 21. Transitivität**

Eine kompakte Teilmenge  $\Lambda \subset X$  bzgl.  $f$  ist topologisch transitiv oder transitiv, wenn es ein  $x \in \Lambda$  mit  $\omega(x) = \Lambda$  existiert.

**Bemerkung 21.1.** Transitive Mengen sind auch unzerlegbar.

*Beweis. Widerspruchsbeweis!* Wir nehmen an, dass  $\Lambda$  zerlegbar und transitiv sei. Dann existiere 2 disjunkte, nichtleere, kompakte und invariante Teilmengen  $U, V$  sodass  $\Lambda$  sich als Vereinigung von den Mengen darstellen lässt. Ohne Einschränkung wähle  $x \in U$  und mittels Transitivität gilt,

$$\omega(x) = U \Rightarrow V = \emptyset$$

Ein Widerspruch zur Zerlegbarkeit.  $\square$

**Satz 22. Satz von Birkhoff**

$\Lambda$  sei kompakt und invariant bzgl.  $f$ , dann sind äquivalent

1.  $\Lambda$  transitiv
2.  $\forall U, V \subset \Lambda$ , offen und nichtleer,  $\exists n \geq 1$  mit  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$
3.  $\exists x \in \Lambda : Orb^+(x)$  liegt dicht in  $\Lambda$

Wir wiederholen zunächst einen in dem Beweis verwendeten Satz, Satz von Baire

**Fakt 22.1. Satz von Baire**

In einem vollständigen metrischen Raum ist jeder abzählbare Durchschnitt von offenen, dichten Teilmengen selbst dicht.

*Beweis. Schema: (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (1)  $\Rightarrow$  ...*

"(1)  $\Rightarrow$  (2)" Sei  $x \in X$  so gewählt, dass die positive Limesmenge von  $x$  in  $\Lambda$  ist. Dann gibt es 2 Teilfolgen des positiven Orbits von  $x$ , die jeweils in  $U$  bzw.  $V$  liegen. Dann gibt es ein  $n > 1$ , so dass  $f^n$  von einem Element der Teilfolge in  $U$  ein Element der Teilfolge in  $V$  liegt. Genauer  $\exists i, j$  mit  $j > i$ , so dass  $f^i(x) \in U \vee f^j(x) \in V$ . Dann enthält  $f^{j-i}(U)$  das Element  $f^{j-i} \circ f^i(x) = f^j(x) \in V$ . Daraus folgt (2).

"(2)  $\Rightarrow$  (3)" Wir definieren zunächst eine topologische Basis  $V_1, V_2, \dots$  von  $\Lambda$ . D.h. alle offenen Mengen aus  $\Lambda$  lassen sich als Vereinigungen von beliebig vielen Basiselementen darstellen.

*Zu Offenheit:* Aus Stetigkeit von  $f$  ist  $f^{-n}(V_i)$  offen für alle  $i$  und  $n$ . Dann ist die Vereinigung  $\bigcup_{n \geq 1} f^{-n}(V_i)$  offen in  $\Lambda$ .

*Zu Dichtheit:* Eine Menge  $M$  liegt in  $\Lambda$  dicht genau dann, wenn  $M$  jedes Basiselement schneidet. Wähle also  $U \subset \Lambda$  beliebig. Aus (2) gilt

$$\forall i \geq 1, \exists n \geq 1 : f^n(U) \cap V_i \neq \emptyset$$

Aus Bijektivität und insb. Surjektivität von  $f$  folgt

$$\begin{aligned} f^{-n}(f^n(U)) \cap f^{-n}(V_i) &\neq \emptyset \\ \Leftrightarrow U \cap f^{-n}(V_i) &\neq \emptyset \end{aligned}$$

Wir haben soeben eine Folge von offenen und dichten Mengen konstruiert, daher sind die Voraussetzungen für Satz von Baire erfüllt. Wir definieren nun nach dem Satz

$$B := \bigcap_{i \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} f^{-n}(V_i)$$

eine in  $\Lambda$  dichte Menge. Wähle nun  $x \in B$ , dann für alle  $i \geq 1$  existiert es ein  $n \geq 1$  mit  $x \in f^{-n}(V_i)$  oder äquivalent,  $f^n(x) \in V_i$ . Nach Definition ist  $Orb^+(x)$  dicht in  $\Lambda$ .

”(3) $\Rightarrow$ (1)” Wir setzen Dichtheit des positiven Orbits voraus. D.h.

$$\exists x \in \Lambda : \Lambda = \overline{Orb^+(x)}$$

Wegen Invarianz des positiven Orbits gilt

$$f^{-1}(x) \in \overline{Orb^+(x)}$$

Wir unterscheiden jetzt die beiden Fälle, wobei  $f^{-1}(x)$  in dem positiven Orbit enthalten oder nicht enthalten ist.

1.  $f^{-1}(x) \in Orb^+(x)$   
 $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : f^{-1}(x) = f^n(x)$   
 $\Leftrightarrow x = f^{n+1}(x)$   
 $\Rightarrow x \in P(f) \Rightarrow |Orb^+(x)| < \infty$   
 $\Rightarrow \Lambda = \omega(x) = Orb(x) = \overline{Orb(x)}$
2.  $f^{-1}(x) \notin Orb^+(x)$ . Dann müsste  $f^{-1}(x)$  zu der  $\omega$ -Limesmenge gehören, also  $f^{-1}(x) \in \omega(x)$ . Invarianz der  $\omega$ -Limesmenge liefert  $f^n(f^{-1}(x)) \in \omega(x), \forall n \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$   
 $\Rightarrow Orb(x) \subset \omega(x)$   
 $\Rightarrow \Lambda = \overline{Orb^+(x)} \subset \omega(x)$   
 Andererseits ist  $Orb(x)$  wegen Invarianz schon in  $\Lambda = \overline{Orb^+(x)}$  enthalten, dann erhalten wir die Äquivalenz von  $\omega(x)$  und  $\Lambda$  bzw.  $\overline{Orb^+(x)}$ .

□

### Definition 23. Ketten-Äquivalenz und dementsprechende Äquivalenzklasse

$x, y \in CR(f)$  sind Ketten-äquivalent, wenn für alle  $\epsilon > 0$ , existiert jeweils eine periodische  $\epsilon$ -Kette von  $x$  nach  $y$  und  $y$  nach  $x$ . Man schreibt  $x \sim y$ .  $\sim$  beschreibt eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Wir zeigen zunächst Reflexivität. Wähle  $x \in CR(f)$  beliebig, es gilt nach Definition der Ketten-Rekurrenz offenbar  $x \sim x$ .

Symmetrie: Seien  $x, y \in CR(f)$  mit  $x \sim y$ . Gleichzeitige Existenz der Ketten in beiden Richtungen liefert direkt Symmetrie.

Transitivität: Seien  $x, y, z \in CR(f)$  und es gilt  $x \sim y \wedge y \sim z$ . Für alle  $\epsilon > 0$  existieren 2  $\epsilon$ -Ketten  $x, x_1, \dots, x_{n-1}, y$  und  $y, y_1, \dots, y_{m-1}, z$ . Wir setzen die 2 Ketten zusammen und erhalten

$$x, x_1, \dots, y, y_1, \dots, z \tag{1}$$

Es gilt immer noch

$$\begin{aligned} d(f(x_n), x_{n+1}) &< \epsilon \\ d(f(y_n), y_{n+1}) &< \epsilon \\ d(f(x_{n-1}), y) &< \epsilon \\ d(y_{m-1}, z) &< \epsilon \end{aligned}$$

(1) ist daher wieder eine  $\epsilon$ -Kette. Andersrum gilt analog und es folgt  $x \sim z$ . □

Jede Äquivalenzklasse ist eine Ketten-transitive Klasse oder Ketten-Klasse bzgl.  $f$ .

**Bemerkung 23.1.** Jede Ketten-Klasse ist kompakt und  $f$ -invariant.

Beweis. Zu Kompaktheit: Sei  $z \in CR(f)$  und definiere dazu eine Äquivalenzklasse  $[z] := \{x \in CR(f) | x \sim z\}$ . Sei ferner  $(x_n)_{n \geq 1} \subset [z]$  eine konvergente Folge. Z.z.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in [z]$ .

Sei  $\epsilon > 0$ , gilt  $x_n \in B(z, \frac{\epsilon}{2})$ , dann existiert es eine  $\frac{\epsilon}{2}$ -Kette von  $z$  nach  $x_n$  und von  $x_n$  und  $z$ . Sei  $z = z_0, z_1, \dots, z_k$  mit  $d(f(z_{k-1}), z_k) < \frac{\epsilon}{2}$  die Kette von  $z$  nach  $x$ , dann gilt

$$d(f(z_{k-1}), x) \leq d(f(z_{k-1}), z_k) + d(z_k, x) < \epsilon$$

Nun konstruieren wir eine Kette von  $z$  nach  $x_n$ , dann ist  $z_0, \dots, z_{k-1}, x$  eine  $\epsilon$ -Kette von  $z$  nach  $x$ . Aus gleichmäßiger Stetigkeit folgt,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$$

Sei  $x_n \in B(x, \delta)$ , dann gibt es eine  $\frac{\epsilon}{2}$ -Kette von  $x_n$  nach  $z$ ,  $x_n = y_0, y_1, \dots, y_m$ .

$$d(f(x), y_1) \leq d(f(x), f(x_n)) + d(f(x_n), y_1) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$\Rightarrow x \in [z]$

$\Rightarrow [z]$  kompakt.

Zu *Invarianz*: Gleichmäßige Stetigkeit von  $f$  liefert

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y : d(x, y) < \delta, d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

Sei  $\epsilon > 0$ , und  $x \in [z]$ . O.B.d.A nehmen wir an, dass die Ketten aus mehr als 2 Elementen (inkl.  $x$  und  $z$ ) besteht. Wir betrachten zunächst die Kette von  $z$  nach  $f(x)$ . Ist dann

$$z = z_1, \dots, z_m = x, f(x)$$

trivial eine  $\epsilon$ -Kette.

Nun zeigen wir die Existenz einer  $\epsilon$ -Kette von  $f(x) \rightarrow z$ . Z.z. ist  $d(f(f(x)), x_2) < \epsilon$ . Aus gleichmäßiger Stetigkeit gilt

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall f(x), x_1, d(f(x), x_1) < \delta : d(f(f(x)), f(x_1)) < \frac{\epsilon}{2}$$

Um eine Kette von  $f(x)$  nach  $z$  zu erhalten, indem wir das erste Element weglassen und das 2. Element durch  $f(x)$  ersetzen. Sei

$$x = x_1, \dots, x_n = z$$

eine  $\min\{\frac{\epsilon}{2}, \delta\}$ -Kette (in diesem Fall halten wir das  $\epsilon$  für Stetigkeit von  $f$  und die Kette einig. D.h.  $\delta$  ist abhängig von  $\epsilon$  für die Kette.) von  $x$  nach  $z$ . Dann erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} d(f(f(x)), x_2) &\leq d(f(f(x)), f(x_1)) + d(f(x_1), x_2) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Falls die Kette nur aus  $x$  und  $z$  besteht, wir fügen wegen Ketten-Rekurrenz eine Kette von  $x$  nach  $x$  hinzu, dann erhalten wir wieder eine Kette mit mehr als 2 Elementen.  $\square$

**Satz 24.**  $\mathcal{C}$  sei eine Ketten-Klasse bzgl.  $f$ . Dann gilt

1.  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  : alle periodische  $\delta$ -Kette durch  $x \in \mathcal{C}$  ist in  $B(\mathcal{C}, \epsilon)$  enthalten.
2.  $\mathcal{C}$  unzerlegbar

*Beweis.* Die erste Aussage dient als eine Hilfsaussage zu der 2. Aussage.

Zu (1): *Widerspruchsbeweis!* Existiere  $\epsilon_0 > 0$  s.d.  $\forall n \geq 1, \exists x_0^n \in \mathcal{C}$  und eine periodische  $\frac{1}{n}$ -Kette

$$x_0^n, x_1^n, \dots, x_{j_n}^n$$

O.B.d.A. ist das  $k_n$ -te Element aus der Kette von  $x^n$  nicht in  $B(\mathcal{C}, \epsilon_0)$  enthalten. Da  $X$  insb.  $CR(f)$  kompakt ist, besitzt jede Folge eine konvergente Teilfolge. Wir nehmen an,

$$x_0^n \rightarrow x \wedge x_{k_n}^n \rightarrow y, n \rightarrow \infty$$

Es existiert eine  $\frac{1}{n}$ -Kette von  $x$  nach  $y$  und andersrum.

$\Rightarrow x \sim y \Rightarrow x, y \in \mathcal{C}$ , welches ein Widerspruch zur Definition von  $x_{k_n}^n$  bzw.  $y$ .

Zu (2): *Widerspruchsbeweis!* Wir nehmen an, dass  $\mathcal{C} = C_1 \cup C_2$  für  $C_1, C_2 \neq \emptyset \wedge C_1 \cap C_2 = \emptyset \wedge C_1, C_2$  kompakt und invariant. Wähle  $\epsilon > 0$  beliebig klein sodass gilt

$$\begin{aligned} B(C_1, \epsilon) \cap B(C_2, \epsilon) &= \emptyset \\ f(B(C_1, \epsilon)) \cap B(B(C_2, \epsilon), \epsilon) &= \emptyset \cdots (*) \end{aligned}$$

*Notation:*  $B(C_1, \epsilon)$  beschreibt eine  $\epsilon$ -Umgebung um die Menge  $C_1$ , sie ist definiert durch

$$B(C_1, \epsilon) := \bigcup_{x \in C_1} B(x, \epsilon)$$

Für  $B(C_2, \epsilon) \& B(B(C_2, \epsilon), \epsilon)$  analog.

*Herleitung zu (\*):* Gleichmäßige Stetigkeit liefert

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in C_1 : d(x, y) < \delta, d(f(x), f(y)) < \epsilon \\ \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \bigcup_{x \in C_1} f(B(x, \delta)) \subset \bigcup_{x \in C_1} B(f(x), \epsilon) \subset^{inv.} \bigcup_{y \in C_1} B(y, \epsilon) = B(C_1, \epsilon) \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite folgt aus Anwendung der Dreiecksungleichung,  $B(B(C_2, \epsilon), \epsilon) \subset B(C_2, 2\epsilon)$ . Wir wählen dann ein  $\epsilon$  klein genug, sodass  $f(B(C_1, \epsilon)) \cap B(C_2, 2\epsilon) = \emptyset$ . Dann ist (\*) natürlich auch leer.

Es folgt weiter aus (\*) und Stetigkeit, dass  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall z_1, z_2 \in B(C_1, \epsilon), d(z_1, z_2) < \delta :$

$$\begin{aligned} d(f(z_1), f(z_2)) &< \epsilon \\ \Leftrightarrow \bigcup_{z \in B(C_1, \epsilon)} f(B(z, \delta)) \subset \bigcup_{z \in C_1} B(f(z), \epsilon) \not\subset \bigcup_{\zeta \in B(C_2, \epsilon)} B(B(\zeta, \epsilon), \epsilon) = B(B(C_2, \epsilon), \epsilon) \end{aligned}$$

Deswegen sichert (\*) es, dass kein Punkt aus  $C_1$  mit einer Iteration in  $C_2$  springen kann. Das gilt insbesondere für  $\delta < \epsilon$ .

Sei  $x \in C_1$ , sind dann alle  $\delta$ -Kette durch  $x$  aus (1) in  $B(C_1, \epsilon) \cup B(C_2, \epsilon)$  für ein  $\delta > 0$  enthalten. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass  $\delta < \epsilon$ . Da  $C_1, C_2 \subset \mathcal{C}$ , existiert eine periodische  $\delta$ -Kette durch  $x$  nach  $B(C_2, \epsilon)$ , dann müsste es ein  $z \in B(C_1, \epsilon)$  existieren, sodass  $f(z) \in B(B(C_2, \epsilon), \delta) \subset B(B(C_2, \epsilon), \epsilon)$ , welches ein Widerspruch zu (\*) ist.  $\square$

## Literatur

- [1] Lan Wen. *Differentiable Dynamical Systems*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2016.
- [2] Peter Parczewski. *Skript zur Funktionalanalysis, HWS 19/20*. Universität Mannheim, Mannheim, Deutschland, 2019.
- [3] Bartsch René, *Allgemeine Topologie I*. De Gruyter, 2009.