

Conley's fundamental theorem of dynamical systems

Thilo Kraft

22.04.2020

Motivation

Wir beschäftigen uns in diesem Seminarvortrag mit dem Hauptsatz über zeitdiskrete Dynamische Systeme. Er wird auch als Hauptsatz betitelt, da er mehrere wichtige Aussagen trifft. Zum einen stellt er die Verbindung zwischen den zeitdiskreten und kontinuierlichen dynamischen Systemen her. Zum anderen teilt er den Raum in zwei verschiedene Strukturen. Jeder Raum ist aufgeteilt in einen Chain recurrent Part und einen gradienten ähnelnden Part unter Betrachtung einer Ljapunov Funktion. Zum Schluss besagt Conley, dass es immer eine Ljapunov Funktion existiert, mit welcher wichtige Aussagen bezüglich der Existenz und Stabilität der Lösung gezeigt werden kann. Wir setzen folgendes voraus: X ist ein kompakter, metrischer Raum und

$$f : X \rightarrow X$$

ein Homöomorphismus.

Definition 1. Eine ϵ -Kette von x nach y für f ist eine endliche Folge von Punkten in X mit $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y, \forall n \geq 1$, sodass $d(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon$ für $0 \leq i \leq n - 1$.

Definition 2. Ein Punkt $x \in X$ heißt chain-recurrent, wenn $\forall \epsilon > 0$ eine ϵ -Kette von x nach x existiert (es existiert eine periodische ϵ -Kette).

Definition 3. $CR(f)$ ist die Menge aller chain-recurrent Punkte von f .

Definition 4. Zwei Punkte $x, y \in CR(f)$ werden Ketten-Äquivalent genannt, geschrieben $x \sim y$, wenn $\forall \epsilon > 0$ jeweils eine ϵ -Kette von x nach y und eine ϵ -Kette von y nach x existiert.

Proposition 4.1. $x \sim y$ definiert eine Äquivalenzrelation auf $CR(f)$

Beweis. Wir müssen die 3 Eigenschaften einer Äquivalenzrelation zeigen:

1. Reflexivität
trivial, da $x \in CR(f)$
2. Symmetry
folgt aus der Symmetry der Definition
3. Transitivität: wenn $x \sim y$ und $y \sim z$ dann folgt $x \sim z$
es sei $\epsilon > 0$ beliebig
nach Voraussetzung existiert eine ϵ -Kette von x nach y und von y nach z
 $\Rightarrow \exists$ endliche Folgen mit $x = x_0, x_1, \dots, x_k = y$ und $y = \tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_j = z$:
 $\forall n \in \{0, \dots, k - 1\} : d(f(x_n), x_{n+1}) < \epsilon$
 $\forall m \in \{0, \dots, j - 1\} : d(f(\tilde{x}_m), \tilde{x}_{m+1}) < \epsilon$
 $\Rightarrow \exists$ eine endliche Folge mit $x_0 = x, \dots, x_k = y = \tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_j = z$, sodass:
 $\forall i \in \{0, \dots, k + j - 1\} : d(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon$
Es existiert also eine ϵ -Kette von x nach z und aufgrund der Symmetry auch von z nach x .

□

Definition 5. Eine offene Menge $U \subset X$ nennt man eine trapping region von f , wenn:

$$f[\bar{U}] \subset U$$

Beispiel 5.1. Wir wollen eine trapping region für ein kontinuierliches dynamisches System erzeugen (jedes kontinuierlichen System kann man natürlich auch in ein diskretes System umwandeln). Damit kann man periodische

Lösungen mit dem Poincare-Bendixon-Theorem erkennen. Betrachten wir das System:

$$x' = x - y - x^3$$

$$y' = x + y - y^3$$

Wir wandeln es mit Hilfe von Polarkoordinaten um:

$x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ mit der Jakobimatrix $J = r$

$\Rightarrow r^2 = x^2 + y^2$ Wir leiten die Gleichung nach t ab:

$$\Rightarrow 2rr' = 2xx' + 2yy'$$

$$\Rightarrow r' = r - r^3 \cos^4(\theta) - r^3 \sin^4(\theta)$$

$$\Rightarrow r' = r - r^3 (\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta))$$

$$\sin^4(\theta) = \frac{1}{8}(-4\cos(2\theta) + \cos(4\theta) + 3) \text{ und } \cos^4(\theta) = \frac{1}{8}(4\cos(2\theta) + \cos(4\theta) + 3)$$

$$\Rightarrow r' = r(1 - \frac{1}{4}(3 + \cos(4\theta))r^2)$$

Wir wollen nun die Bereiche herausfinden, wo der Radius entweder expandiert oder kleiner wird. Da $-1 \leq \cos(4\theta) \leq 1$:

$$1. \cos(4\theta) = 1, 4\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$r' = r(1 - r^2)$$

Daraus folgt für $r < 1$, dass $r' > 0$ und für $r > 1$, dass $r' < 0$.

$$2. \cos(4\theta) = -1, 4\theta = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$r' = r(1 - \frac{1}{2}r^2)$$

Daraus folgt für $r < \sqrt{2}$, dass $r' > 0$ und für $r > \sqrt{2}$, dass $r' < 0$.

$$3. \cos(4\theta) \in (-1, 1)$$

Dazu betrachten wir, dass $\frac{3+\cos(4\theta)}{4} \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Sei $\frac{3+\cos(4\theta)}{4} = a$.

Es gilt für beliebige θ , mit $4\theta \neq 2k\pi$ und $4\theta \neq (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, dass $a > \frac{1}{2}$ und $a < 1$. Für die Fallunterscheidung von r müssen wir die Wurzel des Kehrwertes von a betrachten. Wenn $r \leq 1$ gilt immer (mit Hilfe von (1) und $a < 1$), dass $r' \geq 0$ und wenn $r \geq \sqrt{2}$ (mit Hilfe von (2) und $a > \frac{1}{2}$), dass $r' \leq 0$. Für $r \in (1, \sqrt{2})$ kann keine eindeutige Aussage bezüglich der Veränderung des Radius gesagt werden. Dies ist vom genauen Wert von $\cos(4\theta)$ abhängig. Jedoch bleibt die Lösung zwischen der unteren Schranke $r = 1$ und der oberen Schranke $r = \sqrt{2}$.

Damit ist die trapping region mit $1 \leq r \leq \sqrt{2}$ definiert.

Definition 6. Eine kompakte, invariante Menge $A \subset X$ von f heißt Attraktor für f , wenn sie eine trapping region U besitzt, sodass:

$$A = \bigcap_{n \geq 0} f^n[\bar{U}]$$

Bemerkung 6.1. U ist eine isolierte Umgebung zu A , wenn es eine trapping region von A ist.

Satz 7. Wenn A ein Attraktor von f ist, dann ist $V := X \setminus \bar{U}$ eine trapping region von f^{-1} .

Beweis. Zu zeigen ist: $f^{-1}[\bar{V}] \subset V$

Da U offen ist, ist $X \setminus U$ abgeschlossen und V offen. Also folgt $\bar{V} \subset X \setminus U$.

Es ist einfacher zu zeigen, dass: $f^{-1}[X \setminus U] \subset X \setminus \bar{U}$

Nach Voraussetzung ist U eine trapping region und f ein Homöomorphismus.

$\Rightarrow \bar{U} \subset f^{-1}[U]$

da allgemein gilt, dass $X \subset X \Rightarrow X \setminus f^{-1}[U] \subset X \setminus \bar{U}$

Da gilt $f^{-1}[X] = X$ folgt: $X \setminus f^{-1}[U] = f^{-1}[X \setminus U] \subset X \setminus \bar{U}$ □

Definition 8. Ein repelling Set von f ist ein Attraktor von f^{-1} .

Definition 9. $A^* := \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(\bar{V})$ ist ein repelling Set von f (also ein Attraktor von f^{-1}). Wir nennen es dual repelling Set von A .

Bemerkung 9.1. Es existieren für einen Attraktor mehrere trapping regions. Das heißt, es gibt mehrere U , die zu A führen können. Deshalb betrachten wir zwei Paare (U_1, A_1) , (U_2, A_2) als äquivalent, wenn sie denselben Attraktor besitzen. Nimmt man nun verschiedene U , die zu dem gleichen A führen, bekommt man trotzdem das gleiche dual repelling Set A^* . Daher ist A^* unabhängig von der Wahl von U , aber nicht von A .

Satz 10. Die Menge aller Attraktoren von f ist abzählbar.

Beweis. Da die Attraktoren über die trapping regions definiert sind, reicht es, diese zu betrachten. Wir müssen zeigen, dass eine Auswahl an trapping regions genügt, um alle Attraktoren bilden zu können, die höchstens abzählbar sind. Da X ein metrischer Raum ist, können wir eine Topologie auf X über eine Metrik definieren. Sei also $(X, P(X))$ ein topologischer Raum. Weil X kompakt ist, können wir das zweite Abzählbarkeitsaxiom benutzen, welche aussagt, dass eine abzählbare Basis existiert. Sei also $\mathbb{B} = (\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ eine abzählbare Basis von X . Sei nun A ein Attraktor von f mit einer trapping region U . Per Definition einer Basis können wir eine Menge $V \subset \mathcal{B}$ wählen, sodass $\bigcup_{V_i \in V} V_i = U$. Weil A kompakt ist, existieren $V_{i_1}, \dots, V_{i_k}$, sodass $A \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k} \subset U$. Also gilt $A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = \bigcap_{n \geq 0} f^n(V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k})$.

Mit dem 2. Abzählbarkeitsaxiom haben wir uns also eine abzählbare Basis $\mathcal{B}$ definiert. Da A von U abhängig ist, schauen wir uns U näher an und bilden U aus den V_i 's. Da nur abzählbar viele U 's aus den abzählbar vielen V 's gebildet werden können, ist die Menge aller Attraktoren von f also abzählbar. □

Definition 11. $\Omega(x, \epsilon) := \{y \in X \mid \exists \epsilon - \text{Kette von } x \text{ nach } y\}$.

Proposition 11.1. $\Omega(x, \epsilon)$ ist für alle Paare $(x, \epsilon) \in X, \epsilon \in \mathbb{R}_+$ eine trapping region von f .

Beweis. Zu zeigen ist: $f[\overline{\Omega(x, \epsilon)}] \in \Omega(x, \epsilon)$

Dazu betrachten wir zuerst die offene Menge:

$\Rightarrow$ sei $y \in \Omega(x, \epsilon)$ beliebig.

$\Rightarrow \exists \epsilon$ -Kette von $x \rightarrow y$.

Nun müssen wir zeigen, dass $f(y) \in \Omega(x, \epsilon)$

da $d(f(y), f(y)) = 0 < \epsilon$

$\Rightarrow \exists \epsilon$ -Kette von $x \rightarrow f(y)$

$\Rightarrow f[\Omega(x, \epsilon)] \in \Omega(x, \epsilon)$

Nun betrachten wir den Rand.

Sei nun $z \in \partial\Omega(x, \epsilon)$

$\Rightarrow \exists$ konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega(x, \epsilon)$ mit Grenzwert z

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$, sodass $\forall m, n \geq N : |x_m - x_n| < \epsilon$

$|x_{m+1} - x_{n+1}| = |f(x_m) - f(x_n)| < \epsilon$.

Da f nach Voraussetzung stetig ist, gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(z)$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : d(f(x_m), f(z)) < \epsilon, \forall m > N$

$\Rightarrow \exists \epsilon$ -Kette von x nach $f(z)$

$\Rightarrow f(\overline{\partial\Omega(x, \epsilon)}) \in \Omega(x, \epsilon)$

Somit haben wir beide Fälle gezeigt und es folgt:

$$f[\overline{\Omega(x, \epsilon)}] \in \Omega(x, \epsilon)$$

□

Satz 12. Jeder Orbit in $X \setminus (A \cup A^*)$ trifft $U \setminus f(U)$ genau ein mal für $x \notin A \cup A^*$.

Beweis. Zu zeigen ist, dass $f^n(X) \in U, f^n(x) \notin f(U)$.

Nach Voraussetzung gilt: $x \notin A, x \notin A^*$.

$\Rightarrow x \notin \bigcap_{n \geq 0} f^n(\bar{U}) = \bigcap_{n \geq 0} f^n(U)$, da $f^n(U) \subset f^n(\bar{U}) \subset f^{n-1}(U)$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$, sodass $x \notin f^N(U)$.

$\Rightarrow$ angenommen, es existiert kein $n \in \mathbb{Z}$ mit $x \in f^n(U)$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}$ gilt: $x \in X \setminus f^n(U)$.

$\Rightarrow x \in A^*$. Dies ist aber ein Widerspruch.

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$, sodass $x \in f^n(U)$

$\Rightarrow \{n \in \mathbb{Z} \mid x \in f^n(U)\}$. Die Menge ist nicht leer und nicht ganz $\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ für ein $M \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq M$ gilt:
 $\Rightarrow x \in f^M(U)$ und $x \notin f^{M+1}(U)$
 $\Rightarrow f^{-M}(x) \in U$ und $f^{-M-1}(x) \notin U$

□

Lemma 13. $CR(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup A_n^*)$.

Um dies zu beweisen, brauchen wir noch Hilfsmittel.

Fakt 13.1. Für jede trapping region U von f , existiert ein ϵ_0 , sodass keine ϵ_0 -Kette von $f^2(U)$ zu $X \setminus f(U)$ existiert.

Beweis. Sei unser

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2}d(X \setminus f(U), \overline{f^2(U)}) \quad (1)$$

Da offensichtlich $\overline{f^2(U)} \subset f(U)$ gilt, ist der Abstand von ϵ_0 für alle Paare (x, y) aus den Mengen $X \setminus f(U)$ und $\overline{f^2(U)}$ positiv. Wir wollen nun zeigen, dass es nicht möglich ist, eine Kette von $f^2(U)$ zu $X \setminus f(U)$ mit unserem ϵ_0 zu bilden.

Sei also $x = x_0 = f^2(U)$ unser Anfangspunkt und $y = x_n = X \setminus f(U)$ unser Endpunkt.

Da $f^2(U) \subset f^2(\bar{U})$ existiert offensichtlich keine Kette der Länge 1.

Betrachten wir nun eine Kette der Länge 2:

$$d(f(x_0), x_1) < \epsilon_0 = \frac{1}{2}d(X \setminus f(U), \overline{f^2(U)})$$

Aufgrund der Definition des Abstandes folgt:

$$\Rightarrow f(x_0) \in f^3(U \subset f^2\bar{U}) \Rightarrow x_1 \notin X \setminus f(U) \Rightarrow x_1 \in f(U)$$

Es existiert also auch keine Kette der Länge 2. Da nun aber $x_1 \in f(U)$ folgt, dass $x_n \in f(U)$ für alle $n \geq 1$. Deswegen existiert keine ϵ_0 -Kette von $f^2(U)$ zu $X \setminus f(U)$. □

Beweis. Lemma 13 Wir zeigen " $\subset$ " und " $\supset$ " wobei wir die Negation verwenden

" $\subset$ "

Nach Voraussetzung ist $x \notin A \cup A^*$ für ein Attraktor A mit einer trapping region U . Nach Satz 12 gilt also: $x \in U \setminus f(U)$

Nehme ein $\epsilon_1 > 0$, sodass alle ϵ_1 -Ketten mit $x = x_0, x_1, x_2$ erfüllen, dass $x_2 \in f^2(U)$. Lass ϵ_0 wie bei Fakt 13.1 definiert sein (1). Dann ist $\epsilon = \min\{\epsilon_0, \epsilon_1\}$.

Mit Hilfe von Fakt 13.1 gibt es also so eine ϵ -Kette nicht und daher existiert nicht für alle ϵ eine ϵ -Kette von x nach x . So ist $x \notin CR(f)$.

” $\supset$ ”

$x \notin CR(f)$.

Dann existiert ein beliebiger, aber bestimmter Attraktor, sodass nach Definition $\exists \epsilon$, sodass $x \notin \Omega(x, \epsilon)$ für eine isolierte Umgebung für diesen Attraktor.

$\Rightarrow$ nach Proposition 11.1 ist $\Omega(x, \epsilon)$ eine trapping region, also gilt: $x \notin A$.

Offensichtlich ist aber $f(x) \in \Omega(x, \epsilon)$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(\Omega(x, \epsilon))$

Da $\Omega(x, \epsilon)$ aber eine trapping region ist gilt: $x \in \overline{\Omega(x, \epsilon)}$.

$\Rightarrow x \notin X \setminus \bar{\Omega} = V$.

$\Rightarrow x \notin A^* = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(\bar{V})$

Also folgt $x \notin A \cup A^*$ □

Bemerkung 13.1. Wir haben gezeigt, dass es drei verschiedene Arten von Punkten gibt:

1. Punkte, die chain recurrent sind und somit aus einer trapping region.
2. Punkte, die nicht aus einer trapping region sind, aber eine ϵ -chain von x zu einer trapping region haben. Somit ist $x \notin A$, aber x ist attraktiv zu A .
3. Punkte, die weder in einer trapping region liegen, noch eine ϵ -chain von x zu dieser haben.

Lemma 14. Wenn $x, y \in CR(f)$, dann sind x und y in der selben chain class $\Leftrightarrow \forall i, x$ und y sind entweder beide in A_i oder beide in A_i^* .

Beweis. ” $\Rightarrow$ ”

Angenommen, es existiert ein $i \in \mathbb{N}$, sodass $x \in A_i$ und $y \in A_i^*$.

Wir betrachten eine isolierte Umgebung U von A . Nach Definition gilt: $x \in U$.

Wir können uns eine ϵ_0 -Kette mit $x = x_0, x_1, x_2$ bilden, sodass $x \in U, x_1 \in f(U), x_2 \in f^2(U)$.

Nach der Annahme ist $y \in A^* = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}[\bar{V}]$.

$\Rightarrow A^* \subset \bar{V} \subset X \setminus U \subset X \setminus f(U)$, da $f(U) \in f(\bar{U} \in U)$. So gilt $y \in X \setminus f(U)$.

Mit Fakt 13.1 gibt es also keine ϵ -Kette von x nach y und sie sind somit nicht in der selben chain class.

” $\Leftarrow$ ”

Angenommen x und y sind nicht äquivalent.

$\Rightarrow$ dann existiert keine ϵ -Chain von y nach x

$\Rightarrow \exists \epsilon_0$, sodass $x \notin \Omega(x, \epsilon_0)$ oder $y \notin \Omega(x, \epsilon_0)$.

O.B.d.A sei $y \notin \Omega(x, \epsilon_0)$.

$\Rightarrow x \in \Omega(x, \epsilon_0)$

$\Rightarrow$ da beide aber Elementa aus $CR(f)$ sind, haben sie also unterschiedliche trapping regions.

Seien A und A^* das dazugehörige Attraktor repelling pair. Dann ist $x \in A$, deshalb $y \notin A$, aber mit Lemma 13 gilt $y \in A^*$ $\square$

Lemma 15. Sei (A, A^*) ein Attraktor repelling pair von f . Dann existiert eine stetige Abbildung $\Phi : X \rightarrow [0, 1]$, sodass folgendes gilt:

1. $\Phi|_{A^*} = 1$, $\Phi|_A = 0$, und $\Phi(x) \in (0, 1)$, $\forall x \notin A \cup A^*$
2. $\Phi(f(x)) < \Phi(x)$, $\forall x \notin A \cup A^*$

Beweis. Lass U eine isolierte Umgebung von A sein. Außerdem definieren wir uns eine stetige Funktion: $\alpha : X \rightarrow [0, 1]$, sodass:

$$\alpha(X \setminus U) = 1,$$

$$\alpha(f\bar{U}) = 0 \text{ und}$$

$$\alpha(x) \in (0, 1), \forall x \in U \setminus f(\bar{U})$$

Sei α :

$$\alpha(x) = \frac{d(x, f(\bar{U}))}{d(x, X - U) + d(x, f(\bar{U}))}$$

Da die Abstandsfunktion stetig ist, $X \setminus U$ und $f(\bar{U})$ schnittfremd und abgeschlossen sind, ist α wieder stetig.

Sei $\alpha_n(x) := \alpha(f^n(x))$. Dann gilt:

$\forall x \in A$ ist $\alpha_n(x) = 0$, da $f^n(x) \in A$ und somit in $f^n(\bar{U}) \forall n \in \mathbb{Z}$

$\forall x \in A^*$ ist $\alpha_n(x) = 1$, da $f^n(x) \in A^*$ und somit in $f^n(X - U) \forall n \in \mathbb{Z}$

Die Werte von α sind somit $\dots, 1, 1, \dots, 0, 0, \dots$

Sei $x \notin A \cup A^*$. Dann gilt mit Lemma, dass der $Orb(x)$ $U \setminus f(U)$ genau einmal trifft. Damit sind die Werte von α somit $\dots, 1, 1, a, 0, 0, \dots$, wobei $a \in (0, 1)$, je nachdem ob der $Orb(x)$ $\partial U \setminus f(U)$ trifft. Auf jeden Fall ist es eine nichtsteigende, global konvertierende Folge.

Des Weiteren definieren wir uns eine neue Folge mit $a_n > 0$, sodass:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = 1$$

Lasse

$$\Phi := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n a_n$$

sein.

Wir müssen nun zeigen, dass Abbildung stetig ist.

Betrachten wir zuerst die Reihe

$$\sum_{n=0}^k a_n$$

Aus Symmetrygründen reicht es, die positive Zeit zu betrachten.

Nach dem Monotonieprinzip konvergiert die Reihe, es gilt also:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n, m \geq N$$

Sei

$$\Phi_{k+} := \sum_{k=0}^n \alpha_k a_k$$

$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n, m \geq N$: $\left| \sum_{k=m+1}^n \alpha_k a_k \right| \leq \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \frac{\epsilon}{2}$
 $\Rightarrow \phi_k$ ist eine gleichmäßig konvergierende Folge und jede einzelne Funktion ist stetig, also ist ϕ stetig.

Offensichtlich gilt auch:

$$\Phi|_A^* = 1, \quad \Phi|_A = 0$$

und da $\alpha_n \neq 1$ und $\alpha_n \neq 0 \quad \forall n$ folgt: $\Phi \in (0, 1)$

Sei nun $x \notin A \cup A^*$:

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$, sodass $f^n(x) \in U \setminus f(U)$ und die Folge an einer Stelle streng monoton fallend ist

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : \alpha_n f(x) > \alpha_{n+1}(x)$$

$$\Rightarrow \alpha_{n+1}(x) = \alpha_n f(x) < \alpha_n(x)$$

$$\Rightarrow \Phi(f(x)) < \Phi(x) \quad \square$$

Definition 16. (Cantor'sche Diskontinuum)

Sei $C := \{x \in [0, 1] \mid x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}, \quad x_i \in \{0, 2\}\}$.

Dann ist C kompakt, nirgends dicht.

Definition 17. (Conley's Fundamentalsatz dynamischer Systeme)

Sei $f : X \rightarrow X$ ein Homoömorphimus auf einen kompakten, metrischen Raum X . Dann existiert eine stetige Abbildung $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$, sodass:

1. Wenn $x \notin CR(f)$, dann $\Phi(f(x)) < \Phi(x)$
2. Für alle $x, y \in CR(f)$, $\Phi(x) = \Phi(y) \Leftrightarrow x \sim y$. Vor allem gilt, wenn $x \in CR(f)$, dann $\Phi(f(x)) = \Phi(x)$.
3. $\Phi(CR(f))$ ist eine kompakte, nirgends dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Beweis. Nach dem vorherigen Lemma $\exists \forall i \in \mathbb{N}$ eine Abbildung $\Phi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi_i^{-1}(1) = A_i^*$, $\Phi_i^{-1}(0) = A_i$ und Φ_i ist streng monoton fallend entlang der Orbits von $X \setminus (A_i \cup A_i^*)$. Definiere die Funktion

$$\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \Phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\Phi_i(x)}{3^i}$$

Betrachte die Reihe $2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = 2(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} - 1)$. Offensichtlich ist Sie eine geometrische Reihe mit Grenzwert 1, welche absolut konvergiert. Da $\phi_i \leq 1$ und $\phi \leq 1$ sind und $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, sodass $\forall x \in X$ und $\forall n > N$ gilt:

$$|\phi_n - \phi| \leq \left| \sum_{i=1}^n \frac{2}{3^i} - 1 \right| = 0 < \epsilon$$

Also konvergiert die Funktionsreihe gleichmäßig und ist für jede Funktion stetig in x . Deshalb ist die Funktionsreihe steig.

Nun beweisen wir (1):

Wenn $x \notin CR(f)$, dann $\exists i$ mit $x \notin A_i \cup A_i^*$ mit dem vorherigen Lemma. Daher folgt $\Phi_i(f(x)) < \Phi_i(x)$. Also auch $\Phi(f(x)) < \Phi(x)$.

Nun beweisen wir (3):

Sei nun $x \in CR(f)$:

$\Rightarrow x \in A_i \cup A_i^* \forall i \in \mathbb{N}$, da $CR(f) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cup A_i^*)$

$\Rightarrow \Phi_i(x) \in \{0, 1\} \forall i \in \mathbb{N}$

Also ist $2\Phi(x)_i \in \{0, 2\}$, daher ist $\Phi(x) \subset C$. Deshalb ist $\Phi(CR(f)) \subset C$ also eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten, nirgends dichten Menge wieder kompakt und nirgends dicht.

Nun beweisen wir (2):

" $\Leftarrow$ "

Weil $x \sim y$ und $x, y \in CR(f)$:

$\Rightarrow x, y \in A_i$ oder $A_i^* \forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \Phi_i(x) = \Phi_i(y) \forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \Phi(x) = \Phi(y)$

" $\Rightarrow$ "

Lass $x, y \in CR(f)$ und $\Phi(x) = \Phi(y)$. Dann ist $2\Phi_i(x)$ die i -te Zahl der Ternärdarstellung von $\Phi(x)$.

$\Rightarrow \Phi_i(x) = \Phi_i(y) \forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x, y \in A_i$ oder $A_i^* \forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ nach dem Lemma 14 gilt $x \sim y$

Offensichtlich ist $f(x) \in CR(f)$. Da die Menge und alle dual repelling pairs invariant sind, gilt: $x \in A_i \Rightarrow f(x) \in A_i$ und $x \in A_i^* \Rightarrow f(x) \in A_i^*$. Aus der Eindeutigkeit der Ternärdarstellung (2) folgt also $\Phi(f(x)) = \Phi(x)$. $\square$

Quellen:

Differential Dynamical Systems La Wen

The fundametal theorem of dynamical systems by Douglas E. Norton