

Ausgewählte Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen und dynamischen Systemen

Kapitel 1.3: Homöomorphismen auf Einheitskreisen

Luis Brummet

Eingereicht für
Prof. Dr. Martin U. Schmidt
Lehrstuhl für Geometrische Analysis



Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik und
Wirtschaftsmathematik
April 2020

1 Vorwort

Diese Seminararbeit baut auf dem Buch *Differentiable Dynamical Systems - An Introduction to Structural Stability and Hyperbolicity* von Lan Wen auf, das eine allgemeine Einführung in grundlegende Konzepte der hyperbolischen Theorie auf zeitdiskreten dynamischen Systemen behandelt. In dieser Seminararbeit wird Kapitel 1.3 *Circle Homeomorphisms* näher beleuchtet.

In Kapitel 1.1 und Kapitel 1.2 hatten wir stets die folgende allgemeine Situation: Sei X ein kompakter metrischer Raum und $f : X \rightarrow X$ ein Homöomorphismus. Dann nennen wir die Familie $\{f^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ bzw. f ein dynamisches System. Inhalt dieser Seminararbeit ist für $X = S^1$ und für einen Homöomorphismus $f : S^1 \rightarrow S^1$ zeitdiskrete dynamische Systeme zu untersuchen. Dabei ist häufig folgende Leitfrage entscheidend:

Gegeben eines spezifischen Homöomorphismus $f : S^1 \rightarrow S^1$ was können wir über die für uns interessanten Mengen $P(f)$ und $\Omega(f)$ aussagen?

Wichtige allgemeine Resultate sind insbesondere:

Lemma 8. Behauptung 14. Behauptung 19. und Beispiel 23.

2 Topologische Hilfsmittel

Sei von nun an $f : S^1 \rightarrow S^1$ ein Homöomorphismus zwischen zwei Einheitskreisen. Ähnlich zu Kapitel 1.2 wollen wir die Begriffe orientierungserhaltend und orientierungsumkehrend einführen.

Da wir jedoch eine Abbildung $f : S^1 \rightarrow S^1$ haben brauchen wir zunächst folgende topologische Definitionen. Dabei sind für uns insbesondere die Aussagen der Behauptung 4. wichtig, da diese sich bei späteren Beispielen und Beweisen als nützlich erweisen werden.

Definition 1. Überlagerung

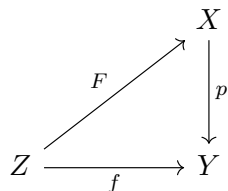
Seien X und Y topologische Räume. Eine stetige surjektive Abbildung $p : X \rightarrow Y$ heißt Überlagerung, falls $\forall y \in Y \exists V_y$ (offene Umgebung) $\subset Y$ und $\forall x \in p^{-1}(\{y\}) \exists U_x$ (offene Umgebung) $\subset X$ sodass gilt:

(i) $p^{-1}[V_y] = \dot{\cup}_{x \in p^{-1}(y)} U_x$ (disjunkte Umgebungen!)

(ii) $p|_{U_x} : U_x \rightarrow V_y$ ist ein Homöomorphismus auf V_y

Definition 2. Lift von f

Seien X, Y und Z topologische Räume und $p : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung. Sei f eine Abbildung von $Z \rightarrow Y$. Eine stetige Abbildung $F : Z \rightarrow X$ heißt Lift von f , falls $p \circ F = f$. Man kann sich folgendes Diagramm stets vor Augen halten.



Definition 3. Orientierungserhaltend (umkehrend)

Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ ein Homöomorphismus. Sei $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ mit $x \mapsto p(x) = \exp(2\pi i x)$ eine Überlagerung. f heißt Orientierungserhaltend (Orientierungsumkehrend), falls jeder Lift $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von $f \circ p$ streng monoton steigend (streng monoton fallend) ist.

Es stellt sich nun die natürliche Frage ob ein beliebiger Homöomorphismus $f : S^1 \rightarrow S^1$ stets orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend ist. Zudem ist aus der Definition eines dynamischen Systems auch interessant ob die Verkettung orientierungserhaltender Homöomorphismen auch wieder orientierungserhaltend ist. Beide Fragen beantworten wir mit der folgenden Behauptung.

Behauptung 4. Sei $h : S^1 \rightarrow S^1$ ein Homöomorphismus. f und \tilde{f} Orientierungserhaltend und g und \tilde{g} Orientierungsumkehrend, dann gilt:

(1) h ist entweder orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend.

(2) $f \circ \tilde{f}$ ist orientierungserhaltend, $g \circ \tilde{g}$ ist orientierungserhaltend und $f \circ g$ ist orientierungsumkehrend

Beweis. (1) **1⁰ Existenz:** Wir wollen kurz anmerken, dass man die Existenz zusätzlichen zeigen müsste. Dies ist aber vor allem gewährleistet da \mathbb{R} einfach-zusammenhängend ist und S^1 und \mathbb{R} lokal wegzusammenhängend sind.

2⁰ Strenge Monotonie des Lifts:

Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Lift von $p \circ h$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: $p \circ F(x) = h \circ p(x)$ Wir nehmen an, dass F nicht streng monoton steigend oder streng monoton fallend ist und führen einen Widerspruchsbeweis. Da $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, aber nicht streng monoton, kann F auch nicht injektiv sein. Für injektive Funktionen gilt aber folgendes:

$(g \circ h \text{ injektiv} \Rightarrow h \text{ injektiv}) \Leftrightarrow (h \text{ nicht injektiv} \Rightarrow g \circ h \text{ nicht injektiv})$

Also falls F nicht injektiv ist, dann ist $p \circ F$ ebenfalls nicht injektiv, da aber $p \circ F = h \circ p$ gilt, ist $h \circ p$ ebenfalls nicht injektiv. Sei $s \in S^1$. Da p eine Überlagerung von S^1 ist existiert eine offene Umgebung V_s in S^1 und eine Offene Umgebung U_x in \mathbb{R} mit $x \in p^{-1}(\{s\})$, sodass $p|_{U_x} : U_x \rightarrow V_s$ ein Homöomorphismus ist. Also ist $p|_{U_x} : U_x \rightarrow V_s$ insbesondere injektiv ist und für alle $x \in U_x \subset \mathbb{R}$ gilt $p \circ F(x) = h \circ p(x)$.

Die rechte Seite ist als Verkettung von injektiven Funktionen injektiv während die linke Seite nach Annahme nicht injektiv ist. Somit erhalten wir einen Widerspruch. Dann ist $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entweder streng monoton steigend oder streng monoton fallend. Wir müssen nun zeigen, dass auch alle andere Lifts von f die selbe Strenge Monotonie wie F haben.

3⁰ Alle anderen Lifts unterscheiden sich um eine Konstante in \mathbb{Z}

Sei F und G zwei Lifts von h . Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: $p \circ F(x) = h \circ p(x) = p \circ G(x)$. Somit ist $p \circ F(x) - p \circ G(x) = 0$. Da $p(x) = \exp(2\pi i x)$ muss somit $F(x) - G(x) \in \mathbb{Z}$. Da Lifts nach Definition stetig sind, ist $F - G \in \mathbb{Z}$ stetig. Somit muss es einer Konstanten $k \in \mathbb{Z}$ entsprechen. Zusammenfassend **1⁰** zeigt, dass stets ein Lift existiert, **2⁰** zeigt dann das dieser entweder Strengmonoton steigend oder fallend ist und da nach **3⁰** sich alle Lifts nur um eine Konstante in \mathbb{Z} unterscheiden, ist f entweder Orientierungserhaltend oder Orientierungsumkehrend.

(2) Wir zeigen nur, dass $f \circ g$ orientierungsumkehrend ist. Seien F und G Lifts von f und g . Zuerst müssen wir zeigen, dass $F \circ G$ ein Lift von $f \circ g \circ p$ ist. Wir veranschaulichen folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{G} & \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ \downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow p \\ S^1 & \xrightarrow{g} & S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Dann gilt $\forall x \in \mathbb{R} : f \circ (g \circ p(x)) \stackrel{GLift}{=} f \circ (p \circ G(x)) = (f \circ p) \circ G(x) \stackrel{FLift}{=} (p \circ F) \circ G(x) = p \circ (F \circ G(x))$. Dann ist $F \circ G$ ein Lift von $f \circ g$. Da F streng monoton steigend ist und G streng monoton fallend ist, ist $F \circ G$ streng monoton fallend und somit ist $f \circ g$ orientierungsumkehrend. \square

Definition 5. Zusammenhangskomponente

Sei X ein topologischer Raum. Wir definieren eine Äquivalenzrelation \sim auf X , sodass $x \sim y$, falls es einen zusammenhängenden Unterraum $C \subset X$ gibt, der sowohl x als auch y enthält. Die Äquivalenzklassen nennen wir Zusammenhangskomponenten.

Behauptung 6. Sei X ein topologischer Raum. Die Zusammenhangskomponenten C_i von X sind die zusammenhängenden Unterräume von X , sodass:

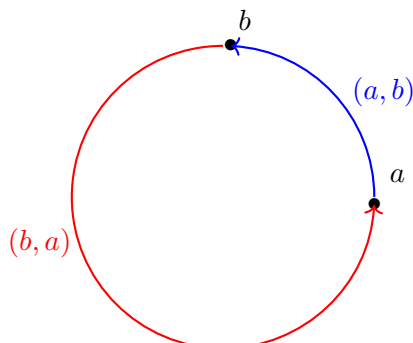
(i) $X = \dot{\bigcup}_i C_i$ (disjunkt!)

(ii) Jeder nicht leerer zusammenhängender Unterraum U von X schneidet genau eine Zusammenhangskomponente

Beweis. Siehe Munkres Topology Th. 25.1 \square

Wir wollen nun anschließend diese topologischen Begriffe für den Einheitskreis vereinfachen und konstruieren folgende Notation: Sei $a, b \in S^1$ mit θ_a und θ_b als entsprechende Winkel von a und b . Dann bestimmen a und b bereits vollständig die zwei Zusammenhangskomponenten von $S^1 - \{a, b\}$. Sei $f_{(a,b)} : [0, 1] \rightarrow S^1$ ein Weg der gegen den Uhrzeigersinn mit $f(0) = e^{2\pi \cdot i \cdot \theta_a} = a$ und $f(1) = e^{2\pi \cdot i \cdot \theta_b} = b$ läuft. Sei $f_{(b,a)} : [0, 1] \rightarrow S^1$ ein Weg der gegen den Uhrzeigersinn mit $f(0) = e^{2\pi \cdot i \cdot \theta_b} = b$ und $f(1) = e^{2\pi \cdot i \cdot \theta_a} = a$ läuft. Dann ist $(a, b)_{S^1} = Im(f_{(a,b)})|_{(0,1)}$ und $(b, a)_{S^1} = Im(f_{(b,a)})|_{(0,1)}$. Folgende Skizze veranschaulicht dies:

Figure 1: Anschauliche Darstellung der offenen Intervalle



Wir wollen darauf aufmerksam machen, dass diese Definition grundlegend von offenen Intervallen in \mathbb{R} verschieden ist. So sind $(a, b)_{\mathbb{R}}$ und $(b, a)_{\mathbb{R}}$ dasselbe Intervall mit verschiedener Ausrichtung in \mathbb{R} . Während $(a, b)_{S^1}$ und $(b, a)_{S^1}$ sogar disjunkt Intervalle sind. Von nun an benutzen wir stets die Notation (a, b) als $(a, b)_{S^1}$. Wir können nun Definition 3. wie folgt in unsere neue Notation umschreiben:

Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ ein Homöomorphismus und $(a, b) \subset S^1$ ein offenes Intervall. Dann ist $f(a, b)$ ein offenes Intervall mit Endpunkten $f(a)$ und $f(b)$. Somit ist $f(a, b) = (f(a), f(b))$ oder $f(a, b) = (f(b), f(a))$. Wir nennen f orientierungserhaltend falls $f(a, b) = (f(a), f(b))$ für beliebige $a, b \in S^1$ und orientierungsumkehrend falls $f(a, b) = (f(b), f(a))$ für beliebige $a, b \in S^1$. Man könnte auch sagen, dass f in den Winkeln monoton steigend bzw. monoton fallend ist.

Definition 7. Kointervall

Sei $\Lambda \subset S^1$ kompakt. Dann heißt A Kointervall von Λ , falls A eine Zusammenhangskomponente von $S^1 - \Lambda$ ist. In unserem Fall sind dies genau die offenen Mengen (a, b) sodass $a, b \in \Lambda$ aber $(a, b) \cap \Lambda = \emptyset$

Lemma 8. Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ ein Homöomorphismus. Und $\Lambda \subset S^1$ eine kompakte Menge, sodass $f(\Lambda) = \Lambda$. Dann gilt:

- (1) Für alle Kointervalle I der kompakten Menge Λ existiert genau ein J Kointervall von $\Lambda : f(I) = J$

Also bildet f Kointervalle auf Kointervalle ab und f ist eine bijektive Abbildung zwischen Kointervallen.

Beweis. Sei I ein beliebiges Kointervall von Λ . Nach Def.7 ist I somit eine Zusammenhangskomponente von $S^1 - \Lambda$. Da $f : S^1 \rightarrow S^1$ ein Homöomorphismus

ist, bildet f Zusammenhangskomponenten auf Zusammenhangskomponenten ab. Da $f(\Lambda) = \Lambda$ sind die Zusammenhangskomponenten von $S^1 - \Lambda$ auch gerade die Zusammenhangskomponenten von $f(S^1 - \Lambda)$. Somit gilt $f(I) = I$ oder $f(I) = J$, wobei J eine andere von I disjunkte Zusammenhangskomponente von $S^1 - \Lambda$ ist. Somit ist f eine bijektive Abbildung zwischen Kointervallen. \square

Im Nachfolgende wollen wir unser gewonnenes Lemma und Notation auf einige Beispiele übertragen. Dabei versuchen wir stets die für uns interessanten Mengen $P(f)$ und $\Omega(f)$ so gut wie möglich zu charakterisieren.

3 Beispiele spezifischer Homöomorphismen

Beispiel 9. Ein Kreis mit 3 Fixpunkten

Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ orientierungserhaltend sodass $Fix(f) = \{a, b, c\}$. Dann sind die Kointervalle von $Fix(f)$ gerade die offenen Mengen (a, b) , (b, c) und (c, a) und alle Kointervalle sind invariant gegenüber f .

Beweis. Da $Fix(f) \subset S^1$ kompakt ist, suchen wir nach den Zusammenhangskomponenten von $S^1 - Fix(f)$. Offensichtlich gilt $(a, b) \dot{\cup} (b, c) \dot{\cup} (c, a) = S^1 - Fix(f)$. Wir zeigen auch direkt Eigenschaft (ii) von Behauptung 6. Sei $U \neq \emptyset$ ein beliebiger zusammenhängender Unterraum von $S^1 - Fix(f)$. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $U \cap (a, b) \neq \emptyset$ und $U \cap (b, c) \neq \emptyset$. Da die Mengen (a, b) und (b, c) durch die Fixpunkte a, b und c getrennt sind, gibt es eine nicht leere offene Menge $A \subset (a, b)$ und eine nicht leere offene Menge $B \subset (b, c)$ sodass $U = A \dot{\cup} B$. Somit lässt sich U in $A \dot{\cup} B$ trennen, da sowohl A also auch B offen sind, kann U nicht zusammenhängend sein.

Da f orientierungserhaltend ist, wissen wir, dass $f(a, b) = (f(a), f(b))$. Da a und $b \in Fix(f)$, muss $f(a, b) = (a, b)$ sein. Somit werden die Kointervalle auf sich selbst abgebildet. \square

Bemerkung. Wir können $Fix(f)$ durch eine beliebige abgeschlossene Menge $M \subset S^1$ ersetzen, welche abzählbar viele Kointervalle besitzt.

Beispiel 10. Eine rationale Rotation

Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ mit $x \mapsto f(x) = x \cdot e^{2\pi \cdot i \cdot \frac{m}{n}}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ und $(m, n) = 1$. Somit können wir f als rationale Rotation gegen den Uhrzeigersinn sehen und es gilt:

(1) f ist orientierungserhaltend.

(2) $P(f) = S^1$ wobei jedes $x \in S^1$ die Periode n hat.

Beweis. (1) Wir zeigen der Lift $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von $f \circ p$ mit $p(x) = e^{2\pi \cdot i \cdot x}$ als Überlagerung, streng monoton steigend ist. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig, sei

$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein beliebiger Lift von $f \circ p$. Dann gilt:

$$f \circ p(x) = e^{2\pi \cdot i \cdot \frac{m}{n}} \cdot e^{2\pi \cdot i \cdot x} = e^{2\pi \cdot i \cdot (\frac{m}{n} + x)} \stackrel{!}{=} (p \circ F)(x) = e^{2\pi \cdot i \cdot F(x)}.$$

Sei $h(x) = x + \frac{m}{n}$. Dann ist h streng monoton steigend und da sich jeder Lift um eine Konstante $k \in \mathbb{Z}$ unterscheidet ist somit jeder Lift F auch eine streng monoton steigende Funktion. Dann ist f orientierungserhaltend.

(2) Sei $x \in S^1$ beliebig. Wir suchen $T \in \mathbb{N}$ sodass $f^T(x) = x$. Wir lösen gerade die folgende Gleichung nach T auf: $f^T(x) = x$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x \cdot e^{2\pi \cdot i \cdot \frac{m}{n} \cdot T} &= x \\ \Leftrightarrow x \cdot (e^{2\pi \cdot i \cdot \frac{m}{n} \cdot T} - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{2\pi \cdot i \cdot \frac{m}{n} \cdot T} &= 1 \\ \Leftrightarrow T &= k \cdot n \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Da wir die Periode als kleinste natürliche Zahl definiert haben, welche $f^T(x) = x$ erfüllt, ist $T = n$. Da x beliebig gewählt war, erhalten wir die Behauptung. \square

Definition 11. Minimale Menge

$A \subset S^1$ heißt minimal, falls A nichtleer, kompakt und invariant gegenüber f ist und $\forall C \subsetneq A$ gilt: C verletzt eine dieser 3 Eigenschaften

Beispiel 12. Die Irrationale Rotation

Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ mit $x \mapsto f(x) = x \cdot e^{2\pi \cdot i \cdot \alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ eine irrationale Rotation, dann gilt:

(1) f ist orientierungserhaltend und $P(f) = \emptyset$

(2) S^1 ist unter f eine minimale Menge

Beweis. (1) f ist orientierungserhaltend folgt dem selben Schema des ersten Beispiels. Wir nehmen an $\exists T \in \mathbb{N}$, sodass $f^T(x) = x$ und führen einen Widerspruchsbeweis

$$\begin{aligned} f^T(x) &= x \\ \Leftrightarrow x \cdot e^{2\pi \cdot i \cdot \alpha \cdot T} &= x \\ \Leftrightarrow x \cdot (e^{2\pi \cdot i \cdot \alpha \cdot T} - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{2\pi \cdot i \cdot \alpha \cdot T} &= 1 \\ \Leftrightarrow T &= 1/\alpha \end{aligned}$$

Da $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ gilt $T \notin \mathbb{N}$ und somit ist $P(f) = \emptyset$

Bemerkung. Zur Erinnerung nach Theorem 1.4 gilt: Eine kompakte, invariante und nicht leere Menge B ist minimal $\Leftrightarrow \text{Orb}(x)$ liegt dicht in B

(2) Beweisstrategie: Da hier B offensichtlich S^1 ist, zeigen wir: Zu jedem $s \in S^1$ und zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $y \in Orb(x)$, so dass $y \in I_\epsilon := (s - \frac{\epsilon}{2}, s + \frac{\epsilon}{2})$ gilt. Da (S^1, d) ein metrischer Raum ist, ist dies äquivalent zu $Orb(x)$ liegt dicht in S^1 . Aus der VSS ist $\alpha < 1$ und $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Wir wissen bereits aus (1), dass $P(f) = \emptyset$ und somit $Orb(x)$ nicht endlich ist. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an, dass $Orb(x)$ nicht dicht in S^1 liegt. Dann existiert ein $s \in S^1$ und ein $\epsilon > 0$ so dass für alle $y \in Orb(x)$ gilt: $y \notin I_\epsilon$.

1⁰ Elemente des Orbits haben dann mindestens den Abstand ϵ zueinander

Wir nehmen an, dass $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ existieren sodass $l[x, f^{m-n}(x)] = l[f^n(x), f^m(x)] = d < \epsilon$ wobei l die Länge des Intervalls ist. Dann hat der Punkt $z := f^{m-n}(x)$ aber eine Abstandslänge von $d < \epsilon$ zu x und somit existiert ein $k \in \mathbb{N} : f^k(x) \in I_\epsilon$. Dies ist ein Widerspruch.

Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$: $l[f^n(x), f^m(x)] \geq \epsilon$. Dann haben alle Punkte von $Orb(x)$ mindestens ϵ Abstand zueinander. Da $P(f) = \emptyset$ kann es aber nur höchstens $\frac{1}{\epsilon} < \infty$ Punkte in $Orb(x)$ geben. Da aber $Orb(x)$ nicht endlich ist, erhalten wir einen Widerspruch und somit liegt $Orb(x)$ dicht in S^1 . \square

Beispiel 13. Ein Kointervallwechselder Homöomorphismus Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ orientierungsumkehrend, $Fix(f) = \{a, b\}$ und $f((a, b)) = (b, a)$ bzw. $f((b, a)) = (a, b)$. Somit vertauscht f die Kointervalle und es gilt:

(1) $f^2|_{(a,b)}$ und $f^2|_{(b,a)}$ ist orientierungserhaltend

Beweis. Wir zeigen nur den ersten Fall. Sei (a, b) ein Kointervall von $Fix(f)$. Da f orientierungsumkehrend ist, ist $f|_{(a,b)}$ ebenfalls umkehrend. Dann gilt für $f^2|_{(a,b)}$:

$f \circ f(a, b) \stackrel{\text{Umk.}}{=} f(f(b), f(a)) \stackrel{\text{Fix}(f)}{=} f(b, a) \stackrel{\text{Umk.}}{=} (f(a), f(b)) \stackrel{\text{Fix}(f)}{=} (a, b)$. Somit besteht $\Omega(f)$ aus $\{a, b\} \cup P := \{s \in S^1 \mid s \text{ hat Periode } 2\}$

\square

4 Allgemeine Aussagen zu $P(f)$ und $\Omega(f)$

Behauptung 14. Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ ein orientierungserhaltender Homöomorphismus mit $P(f) \neq \emptyset$. Dann gilt:

(1) Alle periodischen Punkte von f haben die selbe Periode

(2) $P(f) = \Omega(f)$

Beweis. (1) **Beweisstrategie:** Nutze die Position der möglichen Fixpunkte in Kombination mit dem Lemma über Kointervalle aus. Sei $x \in P(f)$ fixiert. O.b.d.a. hat x die Periode n . Dann ist $Orb(x) = \{\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n\}$ und wir ordnen diese Elemente gegen den Uhrzeigersinn mit der Notation x_1, \dots, x_n . Dann sind $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_n, x_1)$ n disjunkte Kointervalle von $Orb(x)$. Nun wollen wir mit dem Lemma 8 ansetzen.

1⁰ Kointervalle werden entweder permutiert oder auf sich selbst abgebildet

Sei $m \in \mathbb{N}$ sodass $n \mid m$. Da f orientierungserhaltend ist, ist auch nach Beh.4 f^m orientierungserhaltend. Da $n \mid m$ sind $x_1, \dots, x_n \in Fix(f^m)$ und somit gilt: $f^m(x_i, x_{i+1}) \stackrel{\text{Or. Erh.}}{=} (f^m x_i, f^m x_{i+1}) \stackrel{\text{Fix}}{=} (x_i, x_{i+1})$. Somit wird in der m -ten Iteration jedes Kointervall auf sich selbst abgebildet. Für $l \in \mathbb{N}$ mit $n \nmid l$ ist $x_1, \dots, x_n \notin Fix(f^l)$ und somit gilt nach Lemma 8: $f^l(x_i, x_{i+1}) = (f^l x_i, f^l x_{i+1}) \cap (x_i, x_{i+1}) = \emptyset$. Somit wissen wir nun, dass ein Kointervall entweder auf sich selbst oder auf ein anderes Kointervall permutiert wird.

2⁰ Nicht Vielfache von n sind ausgeschlossen und Periode ist n

Wir nehmen an es gibt ein $y \in P(f)$ mit Periode l sodass $n \nmid l$. Falls $y \in Orb(x)$ ist, dann besitzt y eine Periode von n und wir haben direkt einen Widerspruch. Da $S^1 - Orb(x) = (x_1, x_2) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} (x_n, x_1)$, gilt für $y \notin Orb(x)$, dass $y \in (x_i, x_{i+1})$ für ein bestimmtes $i \in \{1, \dots, n-1\}$ oder $y \in (x_n, x_1)$ liegt. Da $n \nmid l$ wissen wir aus 1⁰, dass $f^l(x_i, x_{i+1}) \cap (x_i, x_{i+1}) = \emptyset$. Da $y \in (x_i, x_{i+1})$ ist, gilt somit $f^l(y) \neq y$ und somit kann y kein periodischer Punkt mit Periode l sein.

(2) **Beweisstrategie:** $P(f) \subset \Omega(f)$ wurde bereits gezeigt. Wir wollen $\Omega(f) \subset P(f)$ mit Hilfe folgender logischer Äquivalenz zeigen:
 $(y \in \Omega(f) \Rightarrow y \in P(f)) \Leftrightarrow (y \notin P(f) \Rightarrow y \notin \Omega(f))$ Ein Punkt ist daher entweder periodisch oder wandernd.

Falls $y \in Orb(x)$ ist $y \in P(f)$. Sei $y \in (x_i, x_{i+1}) \subset S^1 - Orb(x)$ für ein bestimmtes $i \in \{1, \dots, n-1\}$ oder $y \in (x_n, x_1)$ liegt. Falls $f^n(y) = y$ ist y periodisch. Falls $f^n(y) \neq y$ dann existiert eine offene Umgebung $V_y \subset (x_i, x_{i+1})$ sodass nach Lemma 8. gilt: $\forall k \in \mathbb{Z} : f^{nk}(V_y) \cap V_y = \emptyset$. Dann gilt nach 2⁰: $\forall 1 \leq j \leq k-1 : f^{nk+j}(V_y) \cap V_y = \emptyset$. Somit gilt schlussendlich $\forall i \geq 1 : f^i(V_y) \cap V_y = \emptyset$. Dann ist y nach der Definition eines nicht-wandernden Punktes wandernd. Und somit ist $P(f) = \Omega(f)$ \square

Um die nächste Behauptung zu zeigen müssen wir den mengentopologische Begriff einer Cantor-Menge uns verinnerlichen. Dabei müssen wir zusätzliche mengentopologische Begriffe einführen.

Definition 15. Isolierter Punkt

Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Ein Punkt $x \in S$ heißt isoliert, falls es eine offene Umgebung V_x von x gibt, sodass $V_x \cap (S - x) = \emptyset$.

Bsp: Für (\mathbb{R}, τ) ist $S = \{0\} \cup [1, 3]$ ist 0 ein isolierter Punkt.

Definition 16. Perfekte Menge

Eine Menge A heißt perfekt, falls A abgeschlossen ist und keine isolierten Punkte besitzt.

Bsp: $[a, b]$ mit $a \leq b$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit Standardtopologie auf \mathbb{R} ist perfekt. $S = \{0\} \cup [1, 3]$ ist hingegen nicht perfekt.

Definition 17. Total unzusammenhängende Menge

Eine Menge A heißt total unzusammenhängend, falls die Zusammenhangskomponenten der Menge A nur aus der leeren Menge oder einelementigen Mengen bestehen.

Bsp: \mathbb{Z} ist total unzusammenhängend.

Definition 18. Cantor-Menge

Eine Menge C heißt Cantor-Menge, falls C kompakt, perfekt, total unzusammenhängend und metrisierbar ist.

Bsp: $C = [0, 1] - \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^n-1} (\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}})$

Behauptung 19. Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ ein Homöomorphismus mit $P(f) = \emptyset$. Dann gilt:

(1) $\Omega(f)$ ist eine minimale Menge

(2) $\Omega(f) = S^1$ oder $\Omega(f) = C$ wobei C eine Cantor-Menge ist.

Beweis. (1) **Beweisstrategie:** Sei $\Lambda \subset S^1$ eine beliebige nicht leere, kompakte und invariante Menge. Falls $\Omega(f) \subset \Lambda$ gilt, dann erfüllt Ω alle 3 Eigenschaften und jede echte Teilmenge muss eine dieser Eigenschaften verletzen. Somit folgt aus der Definition der Minimalen Menge, dass $\Omega(f)$ minimal ist. Wir zeigen also $\Omega(f) \subset \Lambda$. Sei $(a, b) \subset S^1$ ein beliebiges Kointervall von Λ . Dann ist (a, b) eine beliebige Zusammenhangskomponente von $S^1 - \Lambda$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, dann gilt nach Lemma 8. : $f^n(a, b) = (a, b)$ oder $f^n(a, b) \cap (a, b) = \emptyset$. Im ersten Fall gilt dann $f(a) = a$ und $f(b) = b$ also ist $a \in P(f)$ und $b \in P(f)$ und somit haben wir einen direkter Widerspruch zu $P(f) = \emptyset$. Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig war, gilt im zweiten Fall: $\forall n: f^n(a, b) \cap (a, b) = \emptyset$. Dann aber gilt $\forall x \in (a, b) : \exists V_x$ offene Umgebung von x , sodass $\forall n \in \mathbb{N} : f^n(V) \cap V = \emptyset$. Dann folgt aus der Definition eines nichtwanderenden Punktes, dass $x \notin \Omega(f)$. Da $x \in (a, b)$ beliebig war folgt, dass $(a, b) \cap \Omega(f) = \emptyset$. Da (a, b) eine beliebige Zusammenhangskomponente von $S^1 - \Lambda$ ist und sowohl $\Omega(f) \subset S^1$ und $\Lambda \subset S^1$ gilt, folgt somit $\Omega(f) \subset \Lambda$. Somit ist $\Omega(f)$ eine minimale Menge. \square

Bevor wir (2) beweisen brauchen wir folgendes Lemma.

Lemma 20. Sei (\mathbb{R}, τ) τ -Standardtopologie auf \mathbb{R} .

A ist nirgends dicht in $\mathbb{R} \Leftrightarrow A$ ist abgeschlossen und total unzusammenhängend.

Beweis. " \Rightarrow " Falls $A = \emptyset$ sind wir fertig. Sei C eine beliebige Zusammenhangskomponente von A . Sei $A \neq \emptyset$. Wir müssen zeigen, dass $C = \{x\}_{x \in \bar{A}}$. Da $\bar{A}^\circ = \emptyset$, gilt: O offen und $O \subset \bar{A} \Rightarrow O = \emptyset$. Wir nehmen an, dass es eine offene Menge $(a, b) \subset C$ gibt. Dann ist aber $(a, b) \subset A \subset \bar{A}$. Und somit ist $\bar{A}^\circ \neq \emptyset$ ein Widerspruch. Da $A \neq \emptyset$ und wir uns in (\mathbb{R}, τ) befinden, müssen die Zusammenhangskomponenten von A dann gerade einelementige Mengen sein. Somit ist A total unzusammenhängend und $\mathbb{R} - A = \bigcup_i (x_i, x_{i+1})$ offen, wobei x_i gerade die i -te Zusammenhangskomponente von A ist. Somit ist A nach Def. auch abgeschlossen.

" \Leftarrow " Sei A total unzusammenhängend und abgeschlossen. Dann ist $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$. Da A abgeschlossen ist gilt $\bar{A} = \bigcup_{x \in A} \{x\} = A$. Und somit haben wir $\bar{A}^\circ = \emptyset$. Dann ist A nirgends dicht in \mathbb{R} . \square

Bemerkung. Wir wollen kurz darauf aufmerksam machen, dass der topologische Raum (\mathbb{R}, τ) ganz entscheidend ist. Zum Vergleich nehme man die Standardtopologie τ des \mathbb{R}^2 . Dann ist $A = [0, 1] \times \{1\}$ nirgends dicht in (\mathbb{R}^2, τ) aber nicht total unzusammenhängend. Die Menge ist sogar Perfekt. Zudem ist auch entscheidend, dass A abgeschlossen ist, da \mathbb{Q} in (\mathbb{R}, τ) total unzusammenhängend ist aber $\bar{\mathbb{Q}}^\circ = \mathbb{R} \neq \emptyset$. Nun können wir endlich mit der Behauptung (2) starten.

Definition 21. Zur Erinnerung: $y \in X$ heißt ω -Limes von $x \in X$, wenn es eine unbeschränkte, positive Teilfolge $\{n_i\}$ mit $i \geq 1 \subset \mathbb{N}$ gibt sodass gilt $f^{n_i}(x) \rightarrow y$. Die Menge aller ω -Limes schreiben wir als $\omega(x)$.

Beweis. Beh(2): $\Omega(f) = S^1$ oder eine Cantor-Menge

Aus Theorem 1.5 wissen wir: X eine zusammenhängende Menge \Rightarrow Eine minimale Menge von f ist ganz X oder nirgends dicht in X . Da S^1 zusammenhängend ist und $\Omega(f)$ eine minimale Menge ist gilt: $\Omega(f) = S^1$ oder nirgends dicht in S^1 . Wir müssen daher zeigen, dass im zweiten Fall $\Omega(f)$ eine Cantor-Menge ist. Wir zeigen, dass $\Omega(f)$ Definition 18. erfüllt.

Metrisierbar: Da $\Omega(f) \subsetneq S^1$ ist und S^1 metrisierbar ist, ist auch $\Omega(f)$ metrisierbar.

Kompakt: Nach Kapitel 1.1 ist $\Omega(f)$ kompakt und somit insbesondere auch abgeschlossen.

Total unzusammenhängend: Da $\Omega(f)$ abgeschlossen ist und $\Omega(f)$ nicht ganz S^1 ist, befinden wir uns im topologischen Raum der homöomorph zu (\mathbb{R}, τ) mit τ als Standardtopologie ist. Somit gilt nach Lemma 20: $\Omega(f)$ ist nirgends dicht.

Perfekt: Wir wissen bereits, dass $\Omega(f)$ abgeschlossen ist. Da (S^1, d) ein metrischer Raum ist gilt folgende logische Äquivalenz:

$$x \text{ ist kein isolierter Punkt} \Leftrightarrow x \text{ ist limit point}$$

$$1^0 \Omega(f) = \omega(x)$$

Sei $x \in \Omega(f)$ beliebig. Wir zeigen daher, dass es eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in (\Omega(f) - \{x\})$ gibt, sodass $x_n \rightarrow x$. Wir wissen bereits, dass $\omega(x) \subset \Omega(f)$. Da $\Omega(f)$ minimal ist und nach Theorem 1.2 $\omega(x)$ nichtleer, kompakt und invariant ist, muss aufgrund der Minimalität von $\Omega(f)$: $\Omega(f) \subset \omega(x)$ gelten. Somit ist $\Omega(f) = \omega(f)$.

2⁰ Konstruktion der Folge

Nun können wir mit Hilfe dieser Gleichheit eine passende Folge in $\Omega(f) - x$ konstruieren. Da nun $x \in \omega(x)$ ist, existiert nach der Def. 21 eine Teilfolge $\{f^{n_i}\}$ sodass für $n_i \rightarrow \infty$ $f^{n_i} \rightarrow x$ folgt. Wir müssen noch zeigen, dass die Folge tatsächlich in $\Omega(f) - x$ liegt. Da $P(f) = \emptyset$ müssen alle Folgenglieder von $f^{\{n_i\}}$ unterschiedlich sind. Somit ist x ein limit point in $\Omega(f)$ und somit ist x nicht isoliert. Also ist $\Omega(f)$ eine perfekte Menge. Somit ist nach Def. 18 $\Omega(f)$ eine Cantor-Menge.

□

4.1 Herausragende Homöomorphismen

Definition 22. Herausragende Homöomorphismen

Ein Homöomorphismus $f : S^1 \rightarrow S^1$ heißt herausragend, falls $P(f) = \emptyset$ und $\Omega(f)$ eine Cantor-Menge ist.

Beispiel 23. Ein herausragender Homöomorphismus des S^1

Beweis. Beweisstrategie: Wir nehmen uns die irrationale Rotation aus Beispiel 10. Hier wissen wir bereits, dass $P(f) = \emptyset$. Um jedoch Behauptung 19.(2) verwenden zu können müssen wir das Beispiel so erweitern, sodass $\Omega(f) \neq S^1$.

Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ mit $x \mapsto f(x) = x \cdot e^{2\pi i \alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Dann ist nach Beispiel 10. $Orb(x) = \{\dots, f^{-2}p, f^{-1}p, p, fp, f^2p, \dots\}$

1⁰ Wir konstruieren einen neuen Kreis Σ .

Für alle $n \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ ersetze $f^n p$ durch disjunkte abgeschlossene Intervalle I_n mit folgender Länge: $l[I_n]$:

$$\begin{cases} \frac{1}{4^{|n|}} & n \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\} - \{0\} \\ \frac{1}{3} & n = 0 \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} l[I_n] = \frac{1}{3} + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} l[I_n] = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{4^{|n|}} = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-2n} \stackrel{Geo}{=} 1 \quad (1)$$

Somit ist nach (1) die abzählbare Menge aller I_n beschränkt und durch Konstruktion auch abgeschlossen und somit kompakt. Nun ersetze von $n = -\infty$ aufwärts $f^n p$ durch I_n und setze in die Lücken zwischen den einzelnen I_n offene Intervalle. Schlussendlich verklebe die Endpunkte der offenen Intervalle mit den zwei disjunkten abgeschlossenen Intervallen I_n und I_{n+1} . Dies ist unser neuer Kreis Σ .

2⁰ Konstruiere eine neue Abbildung $g : \Sigma \rightarrow \Sigma$ mit $P(g) = \emptyset$ und $\Omega(g) = S^1$. Dann können wir Behauptung 19.(2) anwenden und sind fertig.

Sei $g : \Sigma \rightarrow \Sigma$ sodass für $x \in \Sigma - \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} I_n$ $g(x) = f(x)$ gilt und g alle abgeschlossenen Intervalle I_n homöomorph und sogar orientierungserhaltend auf I_{n+1} abbildet.

$P(g) = \emptyset$: Sei $x \in \Sigma - \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} I_n$. Diese Menge ist nicht leer, da Σ überabzählbar aber $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} I_n$ abzählbar ist. Dann gilt nach Konstruktion: $g(x) = f(x)$ und somit kann nach Beispiel 10. x kein periodischer Punkt sein. Sei $x \in \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} I_n$, da aber jedes abgeschlossene Intervall I_n auf I_{n+1} abgebildet wird und die Intervalle disjunkt sind, gilt: $\forall n \in \mathbb{N} : f^n(x) \neq x$. Und somit ist x kein periodischer Punkt von f . Dann ist $P(g) = \emptyset$.

$\Omega(g) \neq \Sigma$: Wir zeigen, dass es einen wandernden Punkt $x \in \Sigma$ gibt. Sei $x \in I_0$ und $(a, b)_x \subset I_0$ eine offene Umgebung von x . Nach Konstruktion von g , da $(a, b)_x \subset I_0$ ist, gilt: $g(a, b)_x \subset I_1, g^2(a, b)_x \subset I_2, \dots, g^n(a, b)_x \subset I_n, \dots$. Und somit gilt $\forall n \in \mathbb{N} : g^n(a, b)_x \cap (a, b)_x = \emptyset$. Somit ist nach Def. $x \notin \Omega(f)$.

Dann gilt $P(g) = \emptyset$ und $\Omega(g) \neq \Sigma$ und somit ist nach Behauptung 19.(2) $\Omega(g)$ eine Cantor-Menge und somit nach Definition 22. ist g ein herausragender Homöomorphismus. \square

5 Literaturverzeichnis

1. Wen, L: Differentiable Dynamical Systems: an introduction to structural stability and hyperbolicity
2. Munkres, J. R. (1974). Topology; a first course. (Second Edition)