Seminararbeit: Stetige Abhängigkeit der Funktionen y_1, y_2 von $q \in L^2_{\mathbb{C}}([0, 1])$

Eda Turan, 1728647
Prof. Dr. Martin Schmidt
Universität Mannheim

17.04.2025

Grundlagen

In der vorliegenden Seminararbeit möchte man sich die Abhängigkeit der Funktionen y_1 und y_2 von $q \in L^2_{\mathbb{C}}([0, 1])$ anschauen.

Dafür folgen erst mal einige Definitionen:

Skalarprodukt in $L^2_{\mathbb{C}}([0, 1])$

Das Skalarprodukt zweier Funktionen $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}([0, 1])$ ist definiert durch

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Dieses Skalarprodukt macht $L^2_{\mathbb{C}}([0, 1])$ zu einem Hilbertraum.

Starke Konvergenz

Eine Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in L^2_{\mathbb{C}}([0, 1])$ konvergiert stark gegen $f \in L^2_{\mathbb{C}}([0, 1])$, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^2} = 0,$$

wobei die Norm durch

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

definiert ist.

Schwache Konvergenz

Eine Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in L^2_{\mathbb{C}}([0, 1])$ konvergiert schwach gegen $f \in L^2_{\mathbb{C}}([0, 1])$, wenn für alle $g \in L^2_{\mathbb{C}}([0, 1])$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) \overline{g(x)} dx = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Wichtige Abschätzung aus Theorem 1

$$|C_n(x, \lambda, q)| \leq \frac{1}{n!} \exp\left(\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} \cdot |x|\right) (\|q\| \sqrt{x})^n,$$

wobei $C_n(x, \lambda, q) = \int_{[0,1]^n} \chi_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1} c_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^n s_\lambda(t_{i+1} - t_i) \prod_{i=1}^n q(t_i) dt_1 \dots dt_n$

Banach-Steinhaus Theorem

Sei X ein Banachraum und Y ein normierter Raum. Sei $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von beschränkten linearen Operatoren $T_n : X \rightarrow Y$, sodass für jedes $x \in X$ die Folge $\{T_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ in Y beschränkt ist, das heißt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x)\| < \infty \quad \text{für alle } x \in X$$

Dann ist die Familie $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise beschränkt, das heißt,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty.$$

Mit anderen Worten: Jede punktweise beschränkte Familie von beschränkten linearen Operatoren ist gleichmäßig beschränkt.

Mithilfe dieser wichtigen Hilfssätze und Definitionen kann nun das folgende Theorem bewiesen werden, welches behauptet, dass die Funktionen y_j stetig von q abhängen:

Theorem 5

Sei $q_m \in L^2_{\mathbb{C}}([0, 1])$, $m \in \mathbb{N}$, mit $q_m \rightarrow q$ im schwachen Sinne (d.h. $\forall y \in L^2_{\mathbb{C}} : \langle q_m, y \rangle \rightarrow \langle q, y \rangle$). Dann gilt: $y_j(x, \lambda, q_m) \rightarrow y_j(x, \lambda, q)$, $j = 1, 2$, gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen $A \subset [0, 1] \times \mathbb{C}$.

Man nennt y_j dann gleichmäßig kompakt.

Beweis: Annahmen: $q_m \in L^2_{\mathbb{C}}([0, 1])$, $m \in \mathbb{N}$, mit $q_m \rightarrow q$, $A \subset [0, 1] \times \mathbb{C}$ beschränkt $\rightarrow$ zu zeigen: $|y_1(x, \lambda, q_m) - y_1(x, \lambda, q)| \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$ (o.B.d.A. reicht es, die Aussage für y_1 zu zeigen, da der Fall y_2 analog läuft).

$$\begin{aligned} |y_1(x, \lambda, q_m) - y_1(x, \lambda, q)| &\stackrel{Def.}{=} |c_\lambda(x) + \sum_{n \geq 1} C_n(x, \lambda, q_m) - c_\lambda(x) - \sum_{n \geq 1} C_n(x, \lambda, q)| \\ &\stackrel{Lin.}{=} \left| \sum_{n \geq 1} (C_n(x, \lambda, q_m) - C_n(x, \lambda, q)) \right| \\ &\stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{n \geq 1} |C_n(x, \lambda, q_m) - C_n(x, \lambda, q)| \end{aligned}$$

Nun spaltet man die Summe in eine endliche Summe bis zu einem $N \in \mathbb{N}$ und einer unendlichen Summe auf, damit man auf den endlichen Term einen Konvergenzsatz komponentenweise anwenden kann:

$$\begin{aligned} &\sum_{n \geq 1} |C_n(x, \lambda, q_m) - C_n(x, \lambda, q)| \\ &= \sum_{n=1}^N |C_n(x, \lambda, q_m) - C_n(x, \lambda, q)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |C_n(x, \lambda, q_m) - C_n(x, \lambda, q)| \end{aligned}$$

$$\stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{n=1}^N |C_n(x, \lambda, q_m) - C_n(x, \lambda, q)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} [|C_n(x, \lambda, q_m)| + |C_n(x, \lambda, q)|]$$

Als erstes möchte man sich hier die zweite Summe anschauen.

Es gilt nach Theorem 1, dass

$$|C_n(x, \lambda, q)| \leq \frac{1}{n!} \exp\left(\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} \cdot |x|\right) (\|q\| \sqrt{x})^n,$$

und weiter wegen des Theorems von Banach-Steinhaus und der schwachen Konvergenz von q_m gegen q , aus der die Beschränktheit (nach dem Monotonieprinzip für Konvergenz) von q_m und q für jede Auswertung folgt, dass ein $M > 0$ existiert, sodass

$$\|q\| \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \|q_m\| \leq M < \infty$$

gilt. Zudem gilt in $L_{\mathbb{C}}^2([0, 1])$, dass insbesondere $x \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 1$. Aus der Beschränktheit der Teilmenge A folgt, dass ein $c > 0$ existiert, sodass $\exp\left(\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} \cdot |x|\right) \leq c$.

Damit erhält man insgesamt folgende Abschätzung:

$$|C_n(x, \lambda, q)| \leq \frac{1}{n!} c \cdot (M \cdot 1)^n = \frac{M^n}{n!} c$$

Und weiter gilt dann für den gesamten zweiten Term:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} [|C_n(x, \lambda, q_m)| + |C_n(x, \lambda, q)|] \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left[\frac{M^n}{n!} c + \frac{M^n}{n!} c\right] = 2c \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$$

Betrachtet man nun

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$$

als die Differenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^n}{n!} - \sum_{n=1}^N \frac{M^n}{n!},$$

dann weiß man aufgrund der Konvergenzeigenschaft von Exponentialreihen, dass für $N \rightarrow \infty$ die Differenz verschwindet.

Somit ist der zweite Teil der aufgespaltenen Summe kontrolliert und es muss nur noch der erste Teil betrachtet werden.

Der Trick bei dem Term $\sum_{n=1}^N |C_n(x, \lambda, q_m) - C_n(x, \lambda, q)|$ ist, die Terme einzeln abzuschätzen. Da die Summe endlich ist, ist damit dann also auch die ganze Summe abgeschätzt. Dass das N dabei beliebig groß werden kann (damit der bereits betrachtete zweite Term beliebig nahe an die 0 geht), ändert natürlich nichts an der Endlichkeit der Summe, weswegen das hier bedenkenlos termweise gemacht werden kann.

Definiere hierfür

$$\Delta_m := C_n(x, \lambda, q_m) - C_n(x, \lambda, q)$$

für ein fixes $n \in \mathbb{N}$. Das Ziel ist es, zu zeigen, dass

$$C_n(x, \lambda, q_m) \rightarrow C_n(x, \lambda, q)$$

für $m \rightarrow \infty$.

Man möchte zuerst den Ausdruck Δ_m in ein Skalarprodukt umschreiben:

$$\begin{aligned} \Delta_m(x, \lambda) &\stackrel{Def.}{=} \int_{[0,1]^n} \chi_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = x} c_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^n s_\lambda(t_{i+1} - t_i) \left[\prod_{i=1}^n q_m(t_i) - \prod_{i=1}^n q(t_i) \right] dt_1 \dots dt_n \\ &= \int_{[0,1]^n} \chi_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = x} c_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^n s_\lambda(t_{i+1} - t_i) \left[\prod_{i=1}^n \overline{q_m(t_i)} - \prod_{i=1}^n \overline{q(t_i)} \right] dt_1 \dots dt_n \end{aligned}$$

Definiere nun

$$p_{x,\lambda} := \chi_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = x} c_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^n s_\lambda(t_{i+1} - t_i),$$

dann lässt sich $\Delta_m(x, \lambda)$ genau als das Skalarprodukt von $p_{x,\lambda}$ mit $\prod_{i=1}^n \overline{q_m(t_i)} - \prod_{i=1}^n \overline{q(t_i)}$ auffassen, also

$$\Delta_m(x, \lambda) = \left\langle p_{x,\lambda}, \prod_{i=1}^n \overline{q_m(t_i)} - \prod_{i=1}^n \overline{q(t_i)} \right\rangle.$$

Die Schreibweise als Skalarprodukt ist nun hilfreich, um die Konvergenz von Δ_m gegen 0 zeigen zu können. Dafür wird der folgende Satz verwendet:

Sei f_m eine Funktionenfolge in einem Hilbertraum, die stark gegen eine Grenzfunktion f im Hilbertraum konvergiert, sowie g_m eine Funktionenfolge, die schwach gegen eine Grenzfunktion g im Hilbertraum konvergiert, dann gilt für das Skalarprodukt:

$$\langle f_m, g_m \rangle \rightarrow \langle f, g \rangle$$

Beweis: $\langle f_m, g_m \rangle = \langle f_m - f + f, g_m \rangle \stackrel{Lin.}{=} \langle f_m - f, g_m \rangle + \langle f, g_m \rangle$

$$\stackrel{Cauchy-Schwarz}{\leq} \|f_m - f\| \cdot \|g\| + \langle f, g_m \rangle \rightarrow 0 + \langle f, g_m \rangle \rightarrow \langle f, g \rangle,$$

wobei die erste Konvergenz aus der Definition der starken Konvergenz von f_m und die zweite aus der Definition der schwachen Konvergenz folgt. $\square$

Um den Satz also anwenden zu können, reicht es, zu zeigen, dass einerseits $p_{x,\lambda}$ stark gegen eine Grenzfunktion konvergiert (wie genau diese Grenzfunktion aussieht, ist für die gewünschte Aussage irrelevant), und andererseits $\prod_{i=1}^n \overline{q_m(t_i)}$ schwach gegen $\prod_{i=1}^n \overline{q(t_i)}$ konvergiert, da dann die Differenz $\prod_{i=1}^n \overline{q_m(t_i)} - \prod_{i=1}^n \overline{q(t_i)}$ schwach gegen $g = 0$ konvergiert. Insgesamt erhält man dadurch, dass Δ_m als Skalarprodukt gegen ein Skalarprodukt mit einer Grenzfunktion und 0 konvergiert, welches wiederum wegen der Definitheit 0 ergibt, und erhält dadurch die Aussage, die zu zeigen ist.

Man betrachte zunächst also $p_{x,\lambda}$. Um diese Funktion abhängig von $m \in \mathbb{N}$ zu machen, damit man überhaupt Konvergenz zeigen kann, reicht folgende Überlegung:

Wenn zu zeigen ist, dass $|\Delta_m(x, \lambda)| \rightarrow 0$, ist das äquivalent dazu, dass $\sup_A |\Delta_m(x, \lambda)| \rightarrow 0$. Da A beschränkt ist, ist der Abschluss $\overline{A}$ nach Heine-Borel kompakt. Die Funktion $\Delta_m(x, \lambda)$ ist als Verkettung stetiger Funktionen stetig und damit nimmt sie für jedes $m \in \mathbb{N}$ nach dem Satz von Weierstrass auf $\overline{A}$ ihr Supremum an einem Punkt $(x_m, \lambda_m) \in \overline{A}$ an.

Das heißt, es ist zu zeigen, dass $|\Delta_m(x_m, \lambda_m)| \rightarrow 0$.

Also betrachte man nun p_{x_m, λ_m} . Es gilt:

$$p_{x_m, \lambda_m}(t_1, \dots, t_n) \stackrel{Def.}{=} \chi_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = x_m} c_{\lambda_m}(t_1) \prod_{i=1}^n s_{\lambda}(t_{i+1} - t_i).$$

Per Definition ist $c_{\lambda_m}(t_1) = \cos(\sqrt{\lambda_m} t_1)$ und somit $|c_{\lambda_m}(t_1)| \leq 1$, analog $|s_{\lambda}(t_{i+1} - t_i)| \leq 1$ und dadurch $|s_{\lambda}(t_{i+1} - t_i)| = \left| \frac{\sin(\sqrt{\lambda_m}(t_{i+1} - t_i))}{\sqrt{\lambda_m}} \right| \leq C_1$ (wegen der Beschränktheit von A) sowie $|\prod_{i=1}^n s_{\lambda}(t_{i+1} - t_i)| \leq C_2$ und natürlich auch $\chi_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = x_m} \leq 1$. Daraus folgt, dass p_{x_m, λ_m} beschränkt ist und wegen des Theorems der majorisierten Konvergenz existiert eine Grenzfunktion p_{x^*, λ^*} , sodass $\|p_{x_m, \lambda_m} - p_{x^*, \lambda^*}\| \rightarrow 0$. Dies ist aber schon exakt die Definition für starke Konvergenz von p_{x_m, λ_m} gegen p_{x^*, λ^*} .

Es muss also nur noch die schwache Konvergenz von $\prod_{i=1}^n \overline{q_m(t_i)}$ gegen $\prod_{i=1}^n \overline{q(t_i)}$ gezeigt werden. Die Konvergenz von komplexen Funktionenfolgen ist äquivalent dazu, dass deren Real- und Imaginärteile konvergieren, daher ist das Ganze äquivalent zur schwachen Konvergenz von $\prod_{i=1}^n q_m(t_i)$ gegen $\prod_{i=1}^n q(t_i)$.

Zu zeigen ist also, dass $\forall y \in L_{\mathbb{C}}^2([0, 1])$:

$$\left\langle \prod_{i=1}^n q_m(t_i), y \right\rangle \rightarrow \left\langle \prod_{i=1}^n q(t_i), y \right\rangle.$$

Da es aber relativ aufwendig wäre, dies $\forall y$ zu zeigen, nimmt man einen geschickten Umweg über Monome.

Die Idee ist, dass nach dem Satz von Stone-Weierstrass Polynome als Linearkombinationen von Monomen dicht im Raum der stetigen Funktionen liegen, das bedeutet, dass für jede stetige Funktion f auf einem kompakten Intervall $[0, 1]$ und für jedes $\epsilon > 0$ ein Polynom p existiert, sodass $\|f - p\| < \epsilon$, also lässt sich jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall beliebig genau durch ein Polynom approximieren. Stetige Funktionen wiederum liegen dicht im Hilbertraum $L_{\mathbb{C}}^2([0, 1]^n)$, also liegen durch Transitivität auch die Monome dicht in diesem Hilbertraum. Daher genügt es, die Konvergenzeigenschaft nur für die Monome zu zeigen, denn dann lässt sich jede Funktion y im Hilbertraum beliebig genau durch eine Linearkombination von Monomen approximieren und die Konvergenz überträgt sich auf den gesamten Hilbertraum.

Man betrachte also die Monome $t_1^{k_1} \cdot \dots \cdot t_n^{k_n} \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist Folgendes:

$$\left\langle \prod_{i=1}^n q_m(t_i), t_1^{k_1} \cdot \dots \cdot t_n^{k_n} \right\rangle \rightarrow \left\langle \prod_{i=1}^n q(t_i), t_1^{k_1} \cdot \dots \cdot t_n^{k_n} \right\rangle.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{i=1}^n q_m(t_i), t_1^{k_1} \cdot \dots \cdot t_n^{k_n} \right\rangle &= \int_{[0, 1]^n} \prod_{i=1}^n q_m(t_i) \cdot t_1^{k_1} \cdot \dots \cdot t_n^{k_n} dt_1 \dots dt_n \\ &= \int_{[0, 1]^n} q_m(t_1) \cdot \dots \cdot q_m(t_n) \cdot t_1^{k_1} \cdot \dots \cdot t_n^{k_n} dt_1 \dots dt_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{[0,1]^n} q_m(t_1) \cdot t_1^{k_1} \cdot \dots \cdot q_m(t_n) \cdot t_n^{k_n} dt_1 \dots dt_n \\
&\stackrel{\text{unabh.}}{=} \int_0^1 \dots \int_0^1 q_m(t_1) \cdot t_1^{k_1} dt_1 \dots q_m(t_n) \cdot t_n^{k_n} dt_n \\
&= \int_0^1 q_m(t_1) \cdot t_1^{k_1} dt_1 \dots \int_0^1 q_m(t_n) \cdot t_n^{k_n} dt_n \\
&= \prod_{i=1}^n \int_0^1 q_m(t_i) \cdot t_i^{k_i} dt_i \\
&= \prod_{i=1}^n \langle q_m(t_i), t_i^{k_i} \rangle
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung weiß man, dass q_m schwach gegen q konvergiert, und somit konvergiert $\prod_{i=1}^n \langle q_m(t_i), t_i^{k_i} \rangle$ schwach gegen $\prod_{i=1}^n \langle q(t_i), t_i^{k_i} \rangle$.

Macht man jetzt alle Umformungen wieder rückgängig, erhält man:

$$\prod_{i=1}^n \langle q_m(t_i), t_i^{k_i} \rangle = \langle \prod_{i=1}^n q_m(t_i), t_1^{k_1} \cdot \dots \cdot t_n^{k_n} \rangle,$$

woraus die schwache Konvergenz von $\prod_{i=1}^n q_m(t_i)$ gegen $\prod_{i=1}^n q(t_i)$ bzw. von $\prod_{i=1}^n \overline{q_m(t_i)}$ gegen $\prod_{i=1}^n \overline{q(t_i)}$ folgt.

Gemeinsam mit der starken Konvergenz von p_{x_m, λ_m} gegen p_{x^*, λ^*} lässt sich also der oben bewiesene Satz anwenden, der zeigt, dass Δ_m gegen 0 konvergiert, weswegen auch der erste Term der aufgespaltenen Summe $\sum_{n=1}^N |C_n(x, \lambda, q_m) - C_n(x, \lambda, q)|$ kontrolliert ist:

$$\Delta_m(x, \lambda) = \langle p_{x, \lambda}, \prod_{i=1}^n \overline{q_m(t_i)} - \prod_{i=1}^n \overline{q(t_i)} \rangle \rightarrow \langle p_{x^*, \lambda^*}, 0 \rangle = 0$$

□

Zusammengefasst hat man also gezeigt, dass für $j = 1, 2$ die Funktionen $y_j(x, \lambda, q_m)$ gegen $y_j(x, \lambda, q)$ konvergiert, wenn q_m schwach gegen q konvergiert, also hängen die Funktionen y_j stetig von q ab.

Quellen

Pöschel, J. und Trubowitz, E. (1987). Inverse Spectral Theory. Boston: Academic Press