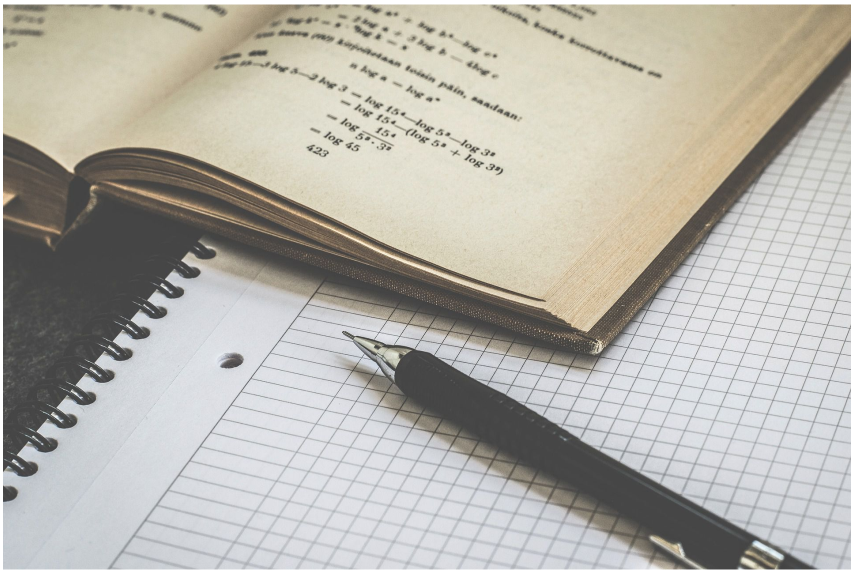
Seminar Äusgewählte Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen FSS 2025

Prof. Dr. Martin Schmidt

Universität Mannheim



Schriftliche Ausarbeitung zum Vortrag **H. Das Dirchletproblem** zum Buch

„Inverse Spectral Theory“

von J. Pöschel und E. Trubowitz (1987)

Ausarbeitung von
Julia Seibold
Matrikelnummer: 1987112
Studiengang: Master of Education Erweiterungsfach Mathematik
Fachsemester: 4

Inhaltsverzeichnis

1 Wiederholung einzelner Aspekte des Kapitels zur Fundamentallösung

1.1 Wiederholung von Theorem 6

Theorem 6. *Für* $j = 1, 2$, *gilt:*

(a)

$$\frac{\partial y_j}{\partial q(t)}(x) = y_j(t)[y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)]\,\mathbb{1}_{[0,x]}(t),$$
$$\frac{\partial y_j'}{\partial q(t)}(x) = y_j(t)[y_1(t)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(t)]\,\mathbb{1}_{[0,x]}(t).$$

Die Gradienten sind gemeinsam stetig in Bezug auf x, λ, q.

(b)

$$\frac{\partial y_j}{\partial \lambda} = -\int_0^1 \frac{\partial y_j}{\partial q(t)} dt,$$
$$\frac{\partial y_j'}{\partial \lambda} = -\int_0^1 \frac{\partial y_j'}{\partial q(t)} dt.$$

1.2 Wiederholung komplexwertiger L^2-Funktionen, also aus $L^2_{\mathbb{C}}$

Wir betrachten Funktionen q, die dem komplexwertigen Lebesgue-Raum

$$q \in L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$$

angehören. Dabei bezeichnet $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ den Raum der (Äquivalenzklassen von) messbaren Funktionen $q : \Omega \to \mathbb{C}$, die quadratintegrierbar sind, also

$$\int_\Omega |q(x)|^2 \, dx < \infty.$$

Dieser Raum ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)} \, dx,$$

wobei $\overline{g(x)}$ die komplexe Konjugation von $g(x)$ bezeichnet.

2 Das Dirichlet Problem

Definition 2.1 (Dirichletproblem)
Die Differentialgleichung

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

mit den Randwerten

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

heißt ***Dirichletproblem***.

Der sogenannte erste Schrödinger-Operator, ein Differentialoperator,
$A := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ agiert auf der Funktion $y \in L^2([0,1])$, indem er sie zu $-y'' + q(x)y$ transformiert.

Um das Eigenwertproblem der Schrödinger-Gleichung zu lösen, suchen wir eine nichttrivilae Eigenfunktion y(x), die $Ay = \lambda y$ erfüllt.

Definition 2.2 (Dirichleteigenwerte)
$\lambda \in \mathbb{C}$ sind die ***Dirichleteigenwerte*** *von q, wenn das Dirichletproblem gelöst werden kann.*

Definition 2.3 (Dirichleteigenfunktion)
Die nichttriviale Lösung wird ***Eigenfunktion von q*** *für λ genannt.*

Definition 2.4 (Dirichletspektrum)
Das ***Dirichletspektrum*** *ist die Menge aller Dirichleteigenwerte.*

2.1 Wiederholung Lemma 2

Lemma 2. *Sei $q \in L^2_{\mathbb{C}}$ und $N > 2e^{||q||}$ ganzzahlig. Dann hat $y_2(1, \lambda, q)$ genau N Nullstellen, mit Vielfachheiten gezählt, in der offenen Halbebene*

$$\operatorname{Re} \lambda < \left(N + \tfrac{1}{2}\right)^2 \pi^2,$$

und für jedes $n > N$, genau eine einfache Nullstelle im eiförmigen Gebiet

$$|\sqrt{\lambda} - n\pi| < \frac{\pi}{2}.$$

Es gibt keine anderen Nullstellen.

2.2 Theorem 1-3

2.2.1 Theorem 1

Theorem 1. *Das Dirichletspektrum einer reellwertigen Funktion $q \in L^2_{\mathbb{R}}$ ist eine unendliche Folge von reellen Zahlen, die nach unten beschränkt ist und gegen unendlich geht.*

Beweis. Gegeben:

1. reellwertige Funktion q(x), die lokal integrierbar ist
2. Dirichlet-Randbedingung auf [0,1] mit $-y'' + q(x)y = \lambda y,\quad$ y(0)=0, y(1)=0

Wir müssen nur zeigen, dass die Folge reell bleibt und dazu müssen wir nur zeigen, dass alle Dirchlet-Eigenwerte λ reell sind. Der Rest folgt aus Lemma 2, Kapitel 2.

Dazu sei λ ein Dirichleteigenwert von q mit der Eigenfunktion $y(x)$. Dann gilt

$$I \qquad -y'' + q(x)y = \lambda y.$$

Wenn wir diese Gleichung komplex konjugieren, dann erhalten wir

$$II \qquad -\overline{y}'' + q(x)\overline{y} = \overline{\lambda y},$$

da q reell ist. Nun multiplizieren wir die erste Gleichung mit $\overline{y}$, die zweite mit y und bilden die Differenz, sodass wir folgendes erhalten:

$$I \qquad -y'' + q(x)y = \lambda y \qquad || \cdot \overline{y}$$
$$\Leftrightarrow -y''\overline{y} + q(x)y\overline{y} = \lambda y\overline{y} \qquad \tilde{I}$$

$$II \qquad -\overline{y}'' + q(x)\overline{y} = \overline{\lambda y} \qquad || \cdot y$$
$$\Leftrightarrow -\overline{y}''y + q(x)y\overline{y} = \overline{\lambda}y\overline{y} \qquad \tilde{II}$$

$$\tilde{I} - \tilde{II} \quad -y''\overline{y} + q(x)y\overline{y} + y\overline{y}'' - q(x)y\overline{y} = \lambda y\overline{y} - \overline{\lambda y}y$$

und das ist wegen der Wronskian-Identität und der Defintion des Betrags in $\mathbb{C}$ folgendes:

$$[y, \overline{y}]' = y \cdot \overline{y}'' - y''\overline{y} = (\lambda - \overline{\lambda})y\overline{y} = (\lambda - \overline{\lambda})|y|^2$$

Integrieren wir die letzte Gleichung, so erhalten wir

$$[y, \overline{y}]\Big|_0^1 = (\lambda - \overline{\lambda}) \int_0^1 |y|^2 dt.$$

Die linke Seite verschwindet wegen den gegebenen Anfangswerten $y(0) = y(1) = 0$:

$$0 = (\lambda - \overline{\lambda}) \int_0^1 |y|^2 dt.$$

Das Integral verschwindet jedoch nicht - und zwar deshalb, weil y(x) eine Eigenfunktion ist und damit y aus der Definition heraus nie Null ist. Damit kann auch das Integral nie Null werden.Also gilt wegen dem Satz vom Nullprodukt

$$0 = (\lambda - \overline{\lambda}).$$

Und damit gilt $\overline{\lambda} = \lambda$. Das heißt, dass λ keinen Imaginärteil hat und damit ist λ reell.

□

Exkurs: Selbstadjungierte Operatoren
Sei A ein Operator auf einem Hilbertraum. Dann ist z.B. $L^2([a,b])$ **selbstadjungiert** genau dann, wenn $\langle Af, g\rangle = \langle f, Ag\rangle \quad \forall f, g \in D_A$

Satz Die Dirichleteigenwerte von selbstadjunigerten Operatoren sind immer reell.

Beweis
Annahme: f ist Eigenfunktion von A zum Eigenwert λ: $Af = \lambda f, \quad f \neq 0$

$$\xRightarrow{selbstadj.} \langle Af, f\rangle = \langle f, Af\rangle \Rightarrow \langle \lambda f, f\rangle = \langle f, \lambda f\rangle$$

$$\xRightarrow{Lin.d.Skalarprodukts} \lambda\langle f, f\rangle = \overline{\lambda}\langle f, f\rangle \Rightarrow (\lambda - \overline{\lambda})\|f\|^2 = 0$$

$$\xRightarrow{f\neq 0, SVNP} \lambda = \overline{\lambda} \quad \xRightarrow{Im(\lambda)=0} \lambda \in \mathbb{R}$$

□

Es wurde gezeigt, dass jede Eigenfunktion für einen Eigenwert λ ein Vielfaches von $y_2(t,\lambda)$ ist. Die geometrische Vielfachheit von λ, d. h. die maximale Anzahl von linear unabhängigen Eigenfunktionen für λ, ist daher 1. Andererseits kann seine algebraische Vielfachheit, definiert als seine Ordnung als eine Nullstelle von $y_2(l,\lambda)$, durchaus größer sein. Dies ist jedoch nicht der Fall.

Wenn wir uns Dirichlet-Randbedingungen vorgeben, so lässt sich jede Eigenfunktion $y(x)$ schreiben als $y(x) = y'(0)y_2(x,\lambda,q)$, somit ist jede Eigenfunktion zu einem Dirichleteigenwert λ ein Vielfaches von $y_2(x,\lambda,q)$.
Die Ableitung $\frac{\partial y_2}{\partial \lambda}$ sei nun mit $\dot{y_2}$ bezeichnet.

2.2.2 Theorem 2

Unterschied zwischen $y_2'(x,\lambda)$ und $\dot{y}_2(x,\lambda)$

Sei

$$y_2(x,\lambda) = \sin(\sqrt{\lambda}x),$$

eine Funktion, die sowohl von x als auch vom Parameter $\lambda > 0$ abhängt.

1. Ableitung nach x

Die partielle Ableitung nach x, dem Parameter in [0,1] ist:

$$y_2'(x,\lambda) = \frac{\partial}{\partial x}\sin(\sqrt{\lambda}x) = \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x).$$

2. Ableitung nach λ

Die partielle Ableitung nach dem Parameter λ ist:

$$\dot{y}_2(x,\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) = \frac{x}{2\sqrt{\lambda}}\cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Interpretation

- $y_2'(x,\lambda)$: beschreibt die Änderung der Funktion in Abhängigkeit von der Position x.
- $\dot{y}_2(x,\lambda)$: beschreibt die Änderung der Funktion in Abhängigkeit vom Parameter λ, z. B. einem Eigenwert in der Spektraltheorie.

Theorem 2. *Wenn λ ein Dirichleteigenwert von $q \in L^2_{\mathbb{R}}$ ist, dann gilt:*

$$\dot{y}_2(1,\lambda)y_2'(1,\lambda) = \int_0^1 y_2^2(t,\lambda)dt = \|y_2(\cdot,\lambda)\|^2 > 0.$$

Insbesondere ist $\dot{y}_2(1,\lambda) \neq 0$.
Somit sind alle Nullstellen von $y_2(1,\lambda)$ einfache Nullstellen von der Funktion y_2 von λ.

Hinweise: Es gilt für eine einfache Nullstelle: $y_2(1,\lambda_0) = 0$ und $\dot{y}_2(1,\lambda_0) \neq 0$.
Die Menge aller Nullstellen ist $\{\ \lambda \in \mathbb{C} \mid y_2(1,\lambda) = 0\ \}$
$y_2(x,\lambda)$ ist spezielle Lösung der DGL $-y'' + q(x)y = \lambda y$ mit $y_2(0,\lambda) = 0$,
$y_2'(0,\lambda) = 1 \quad \forall\lambda \in \mathbb{C}$ und $y_2(1,\lambda) = 0$

Beweis. Sei $y_2 = y_2(x,\lambda)$. Leitet man $-y'' + q(x)y = \lambda y, 0 \leq x \leq 1$ nach λ ab, so erhält man wegen Theorem 6 aus Kapitel 1 und der Produktregel

$$-\dot{y}_2'' + q(x)\dot{y}_2 = y_2 + \lambda\dot{y}_2.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit y_2, die Gleichung
$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq 1$ mit $\dot{y}_2$ und bildet die Differenz, so erhalten wir:

$$I \quad -\dot{y}_2'' + q(x)\dot{y}_2 = y_2 + \lambda\dot{y}_2 \quad || \cdot y_2$$

$$\Leftrightarrow -\dot{y}_2''y_2 + q(x)\dot{y}_2y_2 = y_2^2 + \lambda y^2\dot{y}_2 \qquad \tilde{I}$$

$$II \qquad -y_2'' + q(x)y_2 = \lambda y_2 \qquad || \cdot \dot{y}_2$$

$$\Leftrightarrow -\dot{y}_2y_2'' + q(x)\dot{y}_2y_2 = \lambda y_2\dot{y}_2 \qquad \tilde{II}$$

$$\tilde{I} - \tilde{II} \quad \Leftrightarrow -\dot{y}_2''y_2 + q(x)\dot{y}_2y_2 + y_2'' - q(x)y_2 = y_2^2 + \lambda y_2\dot{y}_2 - \lambda y_2\dot{y}_2$$

$$\Leftrightarrow y_2^2 = y_2''\dot{y}_2 - \dot{y}_2''y_2 = [\dot{y}_2, y_2]'.$$

Integriere beide Seiten der Gleichung über [0,1]:

$$[\dot{y}_2, y_2]|_0^1 = \int_0^1 y_2^2(t,\lambda)dt$$

$$\overset{Wronski}{\Longleftrightarrow} \dot{y}_2(1,\lambda)y_2'(1,\lambda) - \dot{y}_2{}'(1,\lambda)y_2(1,\lambda) = \int_0^1 y_2^2(t,\lambda)dt$$

$$\overset{y_2(1,\lambda)=0}{\Longleftrightarrow} \dot{y}_2(1,\lambda)y_2'(1,\lambda) = \int_0^1 y_2^2(t,\lambda)dt \overset{y_2\in\mathbb{R}, wenn \lambda\in\mathbb{R}}{=} \|y_2(\cdot,\lambda)\|^2 \overset{y_2\neq 0}{>} 0$$

Das Integral $\int_0^1 y_2^2(t,\lambda)dt$ ist gleich $\|y_2(\cdot,\lambda)\|^2$, weil y_2 reell für reelle Dirichleteigenwerte λ ist.
$\|y_2(\cdot,\lambda)\|^2$ ist größer Null, weil y_2 eine Eigenfunktion ist und damit $y_2 \neq 0$ und damit ist die Norm wegen ihrer positiven Definitheit größer Null.
Wegen dem Satz vom Nullprodukt und $\dot{y}_2(1,\lambda)y_2'(1,\lambda) > 0$, gilt $\dot{y}_2(1,\lambda) \neq 0$ und damit ist die Nullstelle $y_2(1,\lambda) = 0$ eine einfache Nullstelle von der Funktion y_2 von λ.

□

Im reellen Fall ist das Integral gleich $\|y_2(\cdot,\lambda)\|^2$ und somit die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ gleich 1. Im komplexen Fall ist das Integral nicht mehr notwendigerweise positiv.

2.2.3 Theorem 3

Analytizitätseigenschaften nach Kapitel 1

a) ganze Funktion (Funktion, die in $\mathbb{C}$ analytisch ist)

b) analytisch (Funktion ist lokal durch eine konvergente Potenzreihe gegeben)

c) quadrat-integrierbare Funktion

d) im Hilbertraum

y_2 reell analytisch

i) in Kapitel 1 (S. 10) haben wir bereits gezeigt, dass y_2 reell analytisch ist

ii) Wenn eine Funktion reell analytisch ist, so ist auch ihre Ableitung reell analytisch.

Definition von $g_n(x,q)$:

$$g_n(x,q) = \frac{y_2(x,\mu_n)}{\|y_2(\cdot,\mu_n)\|} = \frac{y_2(x,\mu_n)}{\sqrt{\dot{y}_2(1,\mu_n)y_2'(1,\mu_n)}}$$

Theorem 3. *$\mu_n, n \geq 1$, ist eine kompakte und reell analytische Funktion in $L^2_{\mathbb{R}}$. Der Gradient der Funktion μ_n ist*

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial q(t)} = g_n^2(t, q).$$

Wenn μ_n reell analytisch ist, ist g_n auch eine reell analytische Funktion von q durch den obigen Ausdruck und die Analytizitätseigenschaften aus Kapitel 1.

Beweis. i) Kompaktheit

- Um Kompaktheit zu zeigen, sei eine Folge q_m, $m \geq 1$, gegeben, die schwach gegen q konvergiert. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit gilt:

$$\|q\| \leq \sup_m \|q_m\| \leq M < \infty.$$

- Sei $N > 2e^M$, $\varepsilon > 0$, und betrachte die Intervalle

$$I_n = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda - \mu_n(q)| < \varepsilon\}, \quad 1 \leq n \leq N.$$

- ε hinreichend klein
  $\Rightarrow$ diese Intervalle sind disjunkt und enthalten sich vollständig in der Halbgeraden $\Big(-\infty, (N + \frac{1}{2})^2\pi^2\Big)$ *(nach Lemma 2, Kapitel 2)*
- $y_2(1, \lambda, q)$ wechselt auf jedem dieser Intervalle das Vorzeichen, da $\mu_n(q)$ eine einfache Nullstelle ist
  $\Rightarrow$ in jedem Intervall I_n hat $y_2(1, \lambda, q)$ genau eine Nullstelle
- Wenn $m \to \infty$, konvergieren die Funktionen $y_2(1, \lambda, q_m)$ gleichmäßig gegen $y_2(1, \lambda, q)$ auf $I_1 \cup \cdots \cup I_N$ *(nach Theorem 1.5).*
  $\Rightarrow$ $y_2(1, \lambda, q_m)$ wechselt für hinreichend großes m auf jedem I_n ebenfalls das Vorzeichen
  $\Rightarrow$ $y_2(1, \lambda, q_m)$ muss daher mind. eine Nullstelle auf jedem dieser Intervalle besitzen.

- Es gibt höchstens N Nullstellen auf der gesamten Halbgeraden $\Big(-\infty, (N + \frac{1}{2})^2\pi^2\Big)$ *(nach Lemma 2, Kapitel 2)*
  $\Rightarrow$ $y_2(1, \lambda, q_m)$ besitzt exakt eine Nullstelle in jedem Intervall I_n, $1 \leq n \leq N$
  $\to$ diese Nullstelle entspricht dem n-ten Eigenwert von q_m. Folglich gilt:

$$|\mu_n(q_m) - \mu_n(q)| < \varepsilon, \quad 1 \leq n \leq N, \text{für alle hinreichend großen } m.$$

- Daraus folgt:

$$\mu_n(q_m) \to \mu_n(q) \quad \text{für } m \to \infty,$$

  da N und $\varepsilon > 0$ beliebig waren.
  $\Rightarrow$ μ_n ist eine kompakte Funktion von q.

ii) Um nun die reelle Analytizität zu zeigen, sei $p \in L^2_{\mathbb{R}}$. Nach *Theorem 2* gilt:

$$y_2(1, \mu_n(p), p) \neq 0.$$

- Wende den Satz über die implizite Funktion an: $y_2(1, \lambda, q)$ ist reell-analytisch in λ und q
  $\Rightarrow$ es existiert eine eindeutig bestimmte, kontinuierliche Funktion $\hat{\mu}_n$, definiert in einer kleinen Umgebung $U \subset L^2_{\mathbb{R}}$ von p, sodass

  $$y_2(1, \hat{\mu}_n(q), q) = 0, \quad \text{und} \quad \hat{\mu}_n(p) = \mu_n(p),$$

  für alle $q \in U$.
  $\Rightarrow$ $\hat{\mu}_n$ ist reell-analytisch.

- μ_n ist als kontinuierliche Funktion auf U definiert durch die Nullstellenbedingung $y_2(1, \mu_n(q), q) = 0$.

  $\Rightarrow \hat{\mu}_n(q) = \mu_n(q)$ auf U wegen der Eindeutigkeit der Nullstellen

  $\Rightarrow$ auch μ_n reell-analytisch.

iii) Nun wollen wir den Gradienten von μ_n berechnen
Betrachte die Identität

$$0 = y_2(1, \mu_n(q), q)$$

Leite sie total nach q ab (da $y_2(1, \mu_n(q), q)$ sowohl über $\mu_n(q)$ als auch direkt über q von q abhängt, handelt es sich um eine totale Ableitung):

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} y_2(1, \mu_n(q), q)$$

Wende die Kettenregel an:

$$0 = \dot{y_2}(1, \mu_n) \frac{\partial \mu_n}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q} y_2(1, \lambda) \bigg|_{\lambda = \mu_n}$$

und forme nach $\frac{\partial \mu_n}{\partial q}$ um:

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial q} = - \frac{\partial}{\partial q} y_2(1, \lambda) \bigg|_{\lambda = \mu_n} \cdot \frac{1}{\dot{y_2}(1, \mu_n)}$$

Nach Theorem 6 aus Kapitel 1 ist der Term $\frac{\partial}{\partial q} y_2(1, \lambda) \Big|_{\lambda = \mu_n}$ gleich

$$y_2(t) \left[\underbrace{y_1(t) y_2(1)}_{=0} - y_1(1) y_2(t) \right] = -y_1(1) y_2^2(t) = -\frac{1}{y_2'(1)} y_2^2(t)$$

da aufgrund der Wronski-Identität $y_2(1,\mu_n) = 0$ und $y_1(1)y_2'(1) = 1$ gilt. Wir erhalten also

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial q(t)} = \frac{y_2^2(t,\mu_n)}{\dot{y}_2(1,\mu_n)y_2'(1,\mu_n)} = \left(\frac{y_2(t,\mu_n)}{\sqrt{\dot{y}_2(1,\mu_n)y_2'(1,\mu_n)}}\right)^2 = g_n^2(t,q).$$

□