Inverse Spectral Theory
Theorem 1.1

Lucas Schade

March 2025

Contents

1 Einführung

In dem ersten Kapitel des Buches *Inverse Spectral Theory* wird versucht das Anfangswertproblem der Differentialgleichung

$$(1) \qquad -y'' + q(x)y = \lambda y, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

zu lösen. Hierbei ist $\lambda \in \mathbb{C}$ und $q \in L^2_{\mathbb{C}} = L^2_{\mathbb{C}}[0,1]$, dem Hilbertraum aller komplexwertigen, quadratintegrablen Funktionen auf $[0,1]$.
Dafür werden zwei Lösungen $y_1(x,\lambda,q)$, $y_2(x,\lambda,q)$ der Gleichung (1) konstruiert, welche die Anfangsbedingungen

$$y_1(0,\lambda,q) = y_2'(0,\lambda,q) = 1$$

$$y_1'(0,\lambda,q) = y_2(0,\lambda,q) = 0$$

erfüllen. Es soll gezeigt werden, dass diese beiden Lösungen Fundamentallösungen sind, das heißt, dass jede andere Lösung der Gleichung (1) als Linearkombination der beiden Lösungen y_1 und y_2 geschrieben werden kann:

$$y(x) = y(0)y_1(x) + y'(0)y_2(x).$$

In Lemma 1.1 konnte gezeigt werden, dass für $f \in L^2_{\mathbb{C}}$ und $a, b \in \mathbb{C}$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$-y'' = \lambda y - f(x), \qquad 0 \leq x \leq 1$$

mit

$$y(0) = a, \qquad y'(0) = b$$

durch

$$y(x) = a\cos\sqrt{\lambda}x + b\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} f(t)dt$$

gegeben ist.
Geht man nun davon aus, dass unsere Fundamentallösung y_1 als Potenzreihe in q gegebn ist, also

$$y_1(x,\lambda,q) = C_0(x,\lambda) + \sum_{n\geq 1} C_n(x,\lambda,q).$$

Durch zweifaches Ableiten der Potenzreihe und Induktion ergibt sich folgende Darstellungen der Koeffizienten für y_1:

$$(2) \qquad C_n(x,\lambda,q) = \int_{0\leq t_1\leq\ldots\leq t_{n+1}=x} c_\lambda(t_1)\prod_{i=1}^{n}[s_\lambda(t_{i+1}-t_i)q(t_i)]dt_1\ldots dt_n.$$

Die selben Schritte sind für y_2 gleich und wir erhalten für

$$y_2(x,\lambda,q) = s_\lambda(x) + \sum_{n\geq 1} S_n(x,\lambda,q)$$

folgende Darstellung der Koeffizienten S_n:

$$(3) \qquad S_n(x,\lambda,q) = \int_{0\leq t_1\leq\ldots\leq t_{n+1}=x} s_\lambda(t_1)\prod_{i=1}^{n}[s_\lambda(t_{i+1}-t_i)q(t_i)]dt_1\ldots dt_n.$$

2 Wichtige Definitionen und Sätze

Definition Hilbertraum. Ein Hilbertraum ist ein reeller oder komplexer Vektorraum H mit einem Skalarprodukt $\langle u, v\rangle$ der vollständig bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Norm ist.
In dieser Arbeit betrachten wir den Hilbertraum über die komplexwertigen quadratintegrierbaren Funktionen $L^2_{\mathbb{C}}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$$

und dementsprechend der Norm

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

Schwarzsche Ungleichung. Für $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}$ mit dem obigen Skalarprodukt gilt folgende Ungleichung:

$$\left|\int f(x) \cdot \overline{g(x)}dx\right|^2 \leq \left(\int |f(x)|^2 dx\right) \cdot \left(\int |g(x)|^2 dx\right).$$

Im reellen Fall gilt für $x, y \in \mathbb{R}$

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Transformationsformel. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\varphi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn $(f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi| : U \to \mathbb{R}$ integrierbar ist. Ist $f : V \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt:

$$\int_V f(y)\, d\mu_n(y) = \int_U f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|\, d\mu_n(x),$$

wobei $D\varphi(x) = J_\varphi(x)$ die Jacobi-Matrix ist.

3 Vorbereitung

Bevor wir mit dem Beweis beginnen, versuchen wir einige Abschätzungen und Rechnungen vorzubereiten.

Zu aller erst schätzen wir $c_\lambda(x)$ und $s_\lambda(x)$ für $0 \leq x \leq 1$ ab:

$$|c_\lambda(x)| = \cos\sqrt{\lambda}x = \frac{1}{2}|e^{i\sqrt{\lambda}x} + e^{-i\sqrt{\lambda}x}| \leq \frac{1}{2}(|e^{i\sqrt{\lambda}x}| + |e^{-i\sqrt{\lambda}x}|)$$

aufgrund der Dreiecksungleichung. Da $\lambda \in \mathbb{C}$, können wir $\sqrt{\lambda}$ umschreiben zu $\sqrt{\lambda} = a + ib$ für $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2}(|e^{i\sqrt{\lambda}x}| + |e^{-i\sqrt{\lambda}x}|) = \frac{1}{2}(|e^{i(a+ib)x}| + |e^{-i(a+ib)x}|) = \frac{1}{2}(|e^{iax-bx}| + |e^{-iax+bx}|) = \frac{1}{2}(|e^{iax}e^{-bx}| + |e^{-iax}e^{bx}|)$$

$$= \frac{1}{2}(|e^{iax}||e^{-bx}| + |e^{-iax}||e^{bx}|$$

Mit der Eulerschen Formel erhalten wir $e^{iax} = \cos ax + i\sin ax$, also

$$|e^{iax}| = |\cos ax + i\sin ax| = \sqrt{\cos^2 ax + \sin^2 ax} = \sqrt{1} = 1.$$

Das selbe gilt auch für e^{-iax}, deshalb:

$$\frac{1}{2}(|e^{iax}||e^{-bx}| + |e^{-iax}||e^{bx}| = \frac{1}{2}(|e^{-bx}| + |e^{bx}|) = \frac{1}{2}(e^{-bx} + e^{bx}) \leq \frac{1}{2}(e^{|-bx|} + e^{|bx|}) = \frac{1}{2}(e^{|b|x} + e^{|b|x}) = e^{|b|x}$$

$$= e^{|Im(\sqrt{\lambda})|x}.$$

Integrieren wir $c_\lambda(t)$ von 0 bis x erhalten wir

$$\int_0^x c_\lambda(t)dt = \int_0^x \cos\sqrt{\lambda}t dt = \left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\right]_0^x = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} = s_\lambda(x)$$

Diese Gleichheit nutzen wir, um $s_\lambda(x)$ abzuschätzen:

$$|s_\lambda(x)| = \left|\int_0^x c_\lambda(t)dt\right| \leq \int_0^x |c_\lambda(t)|dt \leq \int_0^x e^{|Im(\sqrt{\lambda})|t}dt \leq \int_0^x e^{|Im(\sqrt{\lambda})|x}dt$$

$$= e^{|Im(\sqrt{\lambda})|x}\int_0^x 1dt = e^{|Im(\sqrt{\lambda})|x}[t]_0^x = e^{|Im(\sqrt{\lambda})|x}x \leq e^{|Im(\sqrt{\lambda})|x}.$$

Als nächstes Betrachten wir folgendes Integral:

$$\int_{0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{n+1} = x} \prod_{i=1}^n |q(t_i)|dt_1 \ldots dt_n.$$

Uns interessiert besonders, wie sich der Wert des Integrals unter Permutation des Integrationsbereichs verändert. Sei dafür $\sigma \in S_n$ eine Permutation aus der Symmetrischen Gruppe mit

$$\sigma : \{1, \ldots n\} \to \{1, \ldots n\}, \qquad k \mapsto \sigma(k).$$

Dann ist die Abbildung

$$\varphi_\sigma : \{(t_1, \ldots, t_n) \in [0, x]^n : 0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq x\} \to \{(t_1, \ldots, t_n) \in [0, x]^n : 0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq x\},$$

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(n)}) =: (s_1, \ldots, s_n)$$

ein C^1-Diffeomorphismus. Die entsprechende Jacobi-Matrix ist gegeben durch $D\varphi = \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_j}\right), i, j = 1, \ldots, n$ also gerade die Permutationsmatrix

$$\mathbf{D}\varphi = \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ . \\ . \\ . \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix},$$

wobei $e_{\sigma(i)}$ der Einheitsvektor ist mit 1 an der Stelle an der σ i abbildet und sonst 0. Diese Matrix unterscheidet sich insofern von der Einheitsmatrix, dass die Zeilen miteinander vertauscht wurden. Aus den Eigenschaften der Determinante folgt also, dass $\det D\varphi = \pm 1$ und somit $|\det D\varphi| = 1$. Dann gilt also nach der Transformationsformel

$$\int_{\mathbb{S}} \prod_{i=1}^{n} |q(s_i)| ds_1 ... ds_n = \int_{0 \leq t_1 \leq ... \leq t_{n+1} = x} \prod_{i=1}^{n} |q(t_i)| \cdot 1 dt_1 ... dt_n,$$

wobei $\mathbb{S} = \{(s_1, ..., s_n) \in [0, x]^n : s_k = t_{\sigma(k)}, \quad k = 1, ..., n\}$. Daran können wir sehen, dass sich der Wert des Integrals unter beliebiger Permutation des Integrationsbereichs nicht verändert.

Wir können die Menge $[0, x]^n$ umschreiben zu der Vereinigung

$$[0, x]^n = \cup_{\sigma_i \in S_n} \{(t_{\sigma_i(1)}, ..., t_{\sigma_i}(n)) \in [0, x]^n : 0 \leq t_1 \leq ... \leq t_{n+1} = x\}$$

Diese Unterteilung ist jedoch nicht disjunkt, wenn mindestens ein paar von mindestens zwei t gleich ist, sprich $t_i = t_j, i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j$. Betrachten wir jedoch nochmal das Integral

$$\int_{0 \leq t_1 \leq ... \leq t_{n+1} = x} \prod_{i=1}^{n} |q(t_i)| dt_1 ... dt_n,$$

sehen wir, dass sich dieses unterteilen lässt in die Integrale

$$\int_{0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1} = x} \prod_{i=1}^{n} |q(t_i)| dt_1 ... dt_n + \int_B \prod_{i=1}^{n} |q(t_i)| dt_1 ... dt_n,$$

wobei $B = \{(t_1, ..., t_n) \in [0, x]^n : \exists i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j \quad t_i = t_j\}$. Da B aus abzählbar vielen Punkten im Raum $[0, x]^n$ besteht, und das Integral über jeden dieser Punkte 0 ergibt, ist das Integral über die ganze Menge B gleich 0. Also ergibt sich, dass

$$\int_{0 \leq t_1 \leq ... \leq t_{n+1} = x} \prod_{i=1}^{n} |q(t_i)| dt_1 ... dt_n = \int_{0 < t_1 < ... < t_{n+1} = x} \prod_{i=1}^{n} |q(t_i)| dt_1 ... dt_n$$

ist. Die Menge $[0, x]^n$ können wir also weiter unterteilen in die Vereinigung

$$[0, x]^n = \left(\cup_{\sigma_i \in S_n} \{(t_{\sigma_i(1)}, ..., t_{\sigma_i(n)}) \in [0, x]^n : 0 < t_1 < ... < t_{n+1} = x\}\right) \cup B.$$

Sei $\mathbb{S}_i = \{(s_1, ... s_n) \in [0, x]^n : s_k = t_{\sigma_i(k)}, \quad 1, ..., n\}$, dann ist

$$\int_{[0,x]^n} \prod_{i=1}^{n} |q(t_i)| dt_1 ... dt_n = \int_{\mathbb{S}_1} \prod_{i=1}^{n} |q(s_{1,i})| ds_{1,1} ... dt_{1,n} + ... + \int_{\mathbb{S}_{n!}} \prod_{i=1}^{n} |q(s_{n!,i})| ds_{n!,1} ... ds_{n!,n}.$$

Wie wir oben gezeigt haben sind die Werte aller Integrale über $S_i, i = 1, ..., n!$ gleich, daher ist

$$\int_{[0,x]^n} \prod_{i=1}^{n} |q(t_i)| dt_1 ... dt_n = n! \int_{0 \leq t_1 \leq ... \leq t_{n+1} = x} \prod_{i=1}^{n} |q(t_i)| dt_1 ... dt_n,$$

da es genau n! Permutationen in S_n gibt.

4 Theorem 1.1

Nun können wir damit beginnen das Theorem 1.1 zu behandeln.

Theorem 1.1. Die Potenzreihen für $y_1(x,\lambda,q)$ und $y_2(x,\lambda,q)$, dessen Koeffizienten durch (2) und (3) gegeben sind, konvergieren auf einer beschränkten Teilmenge von $[0,1]\times\mathbb{C}\times\mathbb{L}^{\nvDash}_{\mathbb{C}}$ gleichmäßig gegen die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 \le x \le 1,$$

mit

$$y_1(0,\lambda,q) = y_2'(0,\lambda,q) = 1$$
$$y_1'(0,\lambda,q) = y_2(0,\lambda,q) = 0.$$

Des weiteren erfüllen sie folgende Integralgleichungen:

$$y_1(x,\lambda,q) = \cos\sqrt{\lambda}x + \int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t)y_1(t,\lambda,q)dt,$$

$$y_2(x,\lambda,q) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t)y_2(t,\lambda,q)dt,$$

sowie die Abschätzung

$$|y_1(x,\lambda,q)|, |y_2(x,\lambda,q)| \le \exp(|Im\sqrt{\lambda}|x + \|q\|\sqrt{x}).$$

Proof. Wir zeigen den Beweis zuerst nur für y_1. Man betrachte die Koeffizienten C_n der Potenzreihe von y_1, welche durch (2) gegeben sind:

$$C_n(x,\lambda,q) = \int_{0\le t_1\le\ldots\le t_{n+1}=x} c_\lambda(t_1)\prod_{i=1}^n [s_\lambda(t_{i+1}-t_i)q(t_i)]dt_1...dt_n.$$

Wir schätzen nun eine obere Schranke ab:

$$|C_n(x,\lambda,q)| = \left|\int_{0\le t_1\le\ldots\le t_{n+1}=x} c_\lambda(t_1)\prod_{i=1}^n [s_\lambda(t_{i+1}-t_i)q(t_i)]dt_1...dt_n\right|$$

$$\le \int_{0\le t_1\le\ldots\le t_{n+1}=x} |c_\lambda(t_1)|\prod_{i=1}^n |s_\lambda(t_{i+1}-t_i)q(t_i)|dt_1...dt_n.$$

Jetzt nutzen wir die Abschätzungen für $c_\lambda(x)$ und $s_\lambda(x)$, die wir vorbereitet haben:

$$\le \int_{0\le t_1\le\ldots\le t_{n+1}=x} |\exp(|Im(\sqrt{\lambda})|t_1)|\prod_{i=1}^n |\exp(|Im(\sqrt{\lambda})|(t_{i+1}-t_i))||q(t_i)|dt_1...dt_n$$

$$= \int_{0\le t_1\le\ldots\le t_{n+1}=x} \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|t_1)\cdot\exp(-|Im(\sqrt{\lambda})|t_1)\cdot\ldots\cdot\exp(|Im(\sqrt{\lambda})|t_{n+1})\prod_{i=1}^n |q(t_i)|dt_1...dt_n$$

$$= \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x)\int_{0\le t_1\le\ldots\le t_{n+1}=x}\prod_{i=1}^n |q(t_i)|dt_1...dt_n.$$

Hier haben wir benutzt, dass $\exp(t_{i+1}-t_i) = \exp(t_{i+1})\cdot\exp(-t_i))$ und $t_{n+1} = x$.

Das Integral das wir in der letzten Zeile herausbekommen haben ist genau das, welches wir in der Vorbereitung untersucht haben. Dort haben wir herausgefunden, dass sich der Wert dieses Integrals nicht unter Permutation des Integrationsbereichs ändert. Des weiteren haben wir bestimmt, dass wir das Integral umschreiben können zu:

$$\int_{0\le t_1\le\ldots\le t_{n+1}=x}\prod_{i=1}^n |q(t_i)|dt_1...dt_n = \frac{1}{n!}\int_{[0,x]^n}\prod_{i=1}^n |q(t_i)|dt_1...dt_n.$$

Da die Integrale nun alle voneinander unabhängig sind und der Integrand für alle Integrale gleich ist, ergibt sich:

$$\frac{1}{n!}\int_{[0,x]^n}\prod_{i=1}^n |q(t_i)|dt_1...dt_n = \frac{1}{n!}\left[\int_0^x |q(t)|dt\right]^n.$$

Betrachten wir nur das Integral, können wir dieses Umschreiben zu

$$\int_0^x |q(t)|dt = \int_0^1 |q(t)| \cdot \chi_{[0,x]} dt = \langle |q(t)|, \chi_{[0,x]} \rangle \leq \| |q(t)| \| \cdot \| \chi_{[0,x]} \| = \left(\int_0^1 |q(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \chi_{[0,x]}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_0^1 q(t)\overline{q(t)} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \chi_{[0,x]} \right)^{\frac{1}{2}} = \|q\| \left(\int_0^x 1 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|q\| \left([t]_0^x \right)^{\frac{1}{2}} = \|q\| \sqrt{x}.$$

Dabei ist $\chi_{[0,x]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t \in [0,x] \\ 0, & \text{falls } t \notin [0,x] \end{cases}$ und die Scharzsche Ungleichung für reelle Funktionen wurde benutzt.
Damit erhalten wir insgesamt die Majorante der Koeffizienten C_n:

$$|C_n(x, \lambda, q)| \leq \frac{1}{n!} \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x)(\|q\|\sqrt{x})^n.$$

Die Reihe über die Majoranten M_n ist dann gegeben durch:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x)(\|q\|\sqrt{x})^n = \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\|q\|\sqrt{x})^n}{n!} = \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x) \cdot \exp(\|q\|\sqrt{x})$$

$$= \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x + \|q\|\sqrt{x}).$$

Dadurch erhalten wir sofort die Abschätzung

$$y_1(x, \lambda, q) = C_0(x, \lambda) + \sum_{n \geq 1} C_n(x, \lambda, q) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x)(\|q\|\sqrt{x})^n = \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x + \|q\|\sqrt{x}).$$

Außerdem gilt somit nach dem Weierstraß-Kriterium, dass unsere Potenzreihe von y_1 auf beschränkten Teilmengen von $[0,1] \times \mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion konvergiert.
Zeigen wir nun die Integralgleichung. Betrachten wir dazu nochmal die Potenzreihe und setzen die Koeffizienten, welche durch (2) gegeben sind ein:

$$y_1(x, \lambda, q) = c_\lambda(x) + \sum_{n \geq 1} C_n(x, \lambda, q)$$

$$= c_\lambda(x) + \sum_{n \geq 1} \int_0^x s_\lambda(x-t) q(t) C_{n-1}(x, \lambda, q) dt$$

$$= c_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t) q(t) \left(\sum_{n \geq 1} C_{n-1}(x, \lambda, q) \right) dt$$

$$= c_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t) q(t) \left(c_\lambda(x) + \sum_{n \geq 1} C_n(x, \lambda, q) \right) dt$$

$$= c_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t) q(t) y_1(x, \lambda, q) dt.$$

Wir durften die Summe und das Integral tauschen, da unsere Reihe gleichmäßig konvergiert.
Lemma 1.1 sagt uns, dass die eindeutige Lösung von

$$-y'' = \lambda y - f(x), \qquad 0 \leq x \leq 1$$

mit

$$y(0) = a, \quad y'(0) = b$$

gegeben ist durch

$$y(x) = a c_\lambda(x) + b s_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t) f(t) dt.$$

Wir betrachten gerade die Gleichung $-y'' + q(x)y = \lambda y$ beziehungsweise $-y'' = \lambda y - q(x)y$ mit den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 1$ und $y_1'(0) = 0$ und $y_2(0) = 1$ und $y_2'(0) = 0$. Dann ist nach Lemma 1.1 die Lösung der Differentialgleichung mit $f(x) = q(x)y_1$ gegeben durch:

$$c_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t) q(x) y_1(x, \lambda, q) dt$$

was genau unserer obigen Integralgleichun entspricht. Damit haben wir gezeigt, dass die Integralgleichung unser Anfangswertproblem löst. Zuletzt wollen wir die Eindeutigkeit der Lösung zeigen. Dafür nehmen wir an, dass es eine weitere Lösung $\tilde{y_1}$ von (1) gibt, die die selbem Anfangswertbedingungen wie y_1 erfüllt. Dann gilt nach Lemma 1.1,

$$\tilde{y_1}(x) = c_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)\tilde{y_1}(t)dt.$$

Definieren wir v nun als die Differenz beider Lösungen:

$$v(x) := y_1 - \tilde{y_1} = c_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)y_1(t)dt - c_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)\tilde{y_1}(t)dt = \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)(y_1(t) - \tilde{y_1}(t))dt$$

$$= \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)v(t)dt.$$

Mit der Schwarzschen Ungleichung für komplexwertige quadratintegrierbare Funktionen erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} |v(x)|^2 = \left|\int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)v(t)dt\right|^2 &= \left|\int_0^1 (s_\lambda(x-t)q(t))(v(t)\chi_{[0,x]})dt\right|^2 \\ &\leq \left(\int_0^1 |s_\lambda(x-t)q(t)|^2 dt\right)\left(\int_0^1 |v(t)\chi_{[0,x]}|^2 dt\right) \\ &= \int_0^x |s_\lambda(x-t)q(t)|^2 dt \cdot \int_0^x |v(t)|^2 dt \end{aligned}$$

Das erste Intgeral lässt sich noch nach oben abschätzen durch:

$$\int_0^x |s_\lambda(x-t)q(t)|^2 dt = \int_0^x |s_\lambda(x-t)|^2 |v(t)|^2 dt \leq \int_0^x \max_{0\leq s\leq 1} |s_\lambda^2(s)||q(t)|^2 dt = \max_{0\leq s\leq 1} |s_\lambda^2(s)| \int_0^x |q(t)|^2 dt$$

$$= \max_{0\leq s\leq 1} |s_\lambda^2(s)| \left(\left(\int_0^x |q(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \max_{0\leq s\leq 1} |s_\lambda^2(s)| \|q\|^2 =: c.$$

Betrachten wir nun die nichtnegative Funktion $e^{-cx}\int_0^x |v(t)|^2 dt$ mit der nicht positiven Ableitung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(e^{-cx}\int_0^x |v(t)|^2 dt\right) &= -ce^{-cx}\int_0^x |v(t)|^2 dt + |v(x)|^2 e^{-cx} \\ &= e^{-cx}\left(|v(x)|^2 - c\int_0^x |v(t)|^2 dt\right). \end{aligned}$$

Diese Funktion ist nicht positiv, da e^{-cx} strikt positiv und der Wert in der Klammer durch die oben gezeigte Ungleichung auf [0,1] nicht positiv ist. Berechnet man den Wert der Funktion an der Stelle 0, so erhäkt man:

$$e^{-c\cdot 0}\int_0^0 |v(t)|^2 dt = 0.$$

Da die Funktion auf [0,1]nicht negativ ist aber auch nicht steigt, und stetig ist, muss sie somit auf dem ganzen Intervall [0,1] gleich 0 sein. Da der Term e^{-cx} nicht 0 sein kann muss dafür also $\int_0^x |v(t)|^2 dt = 0, \quad$ für alle $x \in [0,1]$ gelten. Da der Integrand strikt positiv ist muss muss also $v(t) = 0$ für alle $t \in [0,x]$ für alle $x \in [0,1]$ gelten. Damit haben wir gezeigt, dass $y_1 = \tilde{y_1}$ gilt, und somit die Lösung eindeutig ist.
Wir schauen nun, wie sich die einzelnen Schritte unterscheiden, wenn wir y_2 betrachten. Die Potenzreihe von y_2 ist gegeben durch

$$y_2(x,\lambda,q) = s_\lambda(x) + \sum_{n\geq 1} S_n(x,\lambda,q),$$

wobei

$$S_n(x,\lambda,q) = \int_{0\leq t_1\leq \ldots \leq t_{n+1}=x} s_\lambda(t_1)\prod_{i=1}^n [s_\lambda(t_{i+1}-t_i)q(t_i)]dt_1 \ldots dt_n.$$

Die Majorantenabschätzung von S_n ist somit gleich, da wir lediglich $|c_\lambda(x)| \leq \exp(|Im(\sqrt{\lambda})|x), \quad 0 \leq x \leq 1$ benutzt haben. Wir haben jedoch gezeigt, dass diese Abschätzung auch für $s_\lambda(x)$ gilt, somit sind die weiteren Schritte analog. Damit erhalten wir, dass auch die Potenzreihe von y_2 auf beschränkten Teilmengen von $[0,1] \times \mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion konvergiert.

Es ergibt sich außerdem die selbe Abschätzung für $|y_2(x,\lambda,q)|$.
Um die Integralgleichung zu zeigen, betrachten wir

$$y_2(x,\lambda,q) = s_\lambda(x) + \sum_{n\geq 1} S_n(s,\lambda,q)$$

$$= s_\lambda(x) + \sum_{n\geq 1} \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)S_{n-1}(x,\lambda,q)dt$$

$$= s_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)\left(\sum_{n\geq 1} S_{n-1}(x,\lambda,q)\right)dt$$

$$= s_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)y_2(x,\lambda,q)dt.$$

Für die Eindeutigkeit der Lösung nehmen wir wieder den selben Ansatz, dass wir annehmen, es gibt eine weitere Lösung $\tilde{y_2}$ die die selben Anfangsbedingungen erfüllt und durch Lemma 1.1 gegeben ist durch

$$\tilde{y}_2(x) = s_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)\tilde{y}_2(t)dt.$$

Wir betrachten wieder die Differenz beider Lösungen:

$$w := y_2 - \tilde{y}_2$$

$$= \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)w(t)dt.$$

Wir können alle weiteren Schritte für y_1 analog übertragen und erhalten das selbe Reslutat, dass die Lösung y_2 eindeutig ist.

□

5 Quellen

Pöschel, J. und Trubowitz, E. (1987). Inverse Spectral Theory. Boston: Academic Press