D. Die Fundamentallösung IV

aufgearbeitet von Eva Stoll

26. März 2025

Theorem 3 (Basic Estimates). *Auf* $[0,1] \times \mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$ *gilt:*

$$\left| y_1(x,\lambda,q) - \cos\sqrt{\lambda}x \right| \leq \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \exp\left(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x + \|q\|\sqrt{x} \right).$$

$$\left| y_2(x,\lambda,q) - \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} \exp\left(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x + \|q\|\sqrt{x} \right)$$

und

$$\left| y_1'(x,\lambda,q) + \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x \right| \leq \|q\| \exp\left(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x + \|q\|\sqrt{x} \right)$$

$$\left| y_2'(x,\lambda,q) - \cos\sqrt{\lambda}x \right| \leq \frac{\|q\|}{|\sqrt{\lambda}|} \exp\left(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x + \|q\|\sqrt{x} \right).$$

Beweis.

1)

$$
\begin{aligned}
y_1(x,\lambda,q) &= C_0(x) + \sum_{n\geq 1} C_n(x,\lambda,q) \\
\Leftrightarrow y_1(x,\lambda,q) - C_0(x) &= \sum_{n\geq 1} C_n(x,\lambda,q) \\
\Leftrightarrow y_1(x,\lambda,q) - \cos\sqrt{\lambda}x &= \sum_{n\geq 1} C_n(x,\lambda,q) \\
\Rightarrow |y_1(x,\lambda,q) - \cos\sqrt{\lambda}x| &\leq \sum_{n\geq 1} |C_n(x,\lambda,q)|
\end{aligned}
$$

Wir wollen durch eine bessere Abschätzung von $|s_\lambda(x)|$ die $|C_n(x,\lambda,q)|$ genauer abschätzen.
Sei $z = \sqrt{\lambda}$ Für jedes z $\in \mathbb{C}$ existieren a $\in \mathbb{R}$ und b $\in \mathbb{R}$, sodass gilt:
z = a + i b.

$$
\begin{aligned}
|\sin \pi z| &= \left| \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} \right| \\
&\leq \frac{1}{2}(|e^{i\pi a}||e^{-i\pi b}| + |e^{-i\pi a}||e^{i\pi b}|) \\
&= \frac{1}{2}(|e^{i\pi a}| + |e^{-i\pi a}|) \\
&= \frac{1}{2}(e^{-\mathrm{Im}\pi z} + e^{\mathrm{Im}\pi z}) = e^{\mathrm{Im}\pi|z|}
\end{aligned}
$$

Durch die bessere Abschätzung von $|s_\lambda(x)|$ folgt durch Betrachtung der Integralgleichung von C_n die verbesserte Abschätzung der $|C_n(x,\lambda,q)|$:

$$
|C_n(x,\lambda,q)| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp(\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}x)(\|q\|_1\sqrt{\lambda})^n
$$

Es folgt also:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} |C_n(x,\lambda,q)| &= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp(\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}x) \frac{(\|q\|_1\sqrt{\lambda})^n}{n!} \\
&\leq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp(\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}x) \frac{(\|q\|_1\sqrt{\lambda})^n}{n!} \\
&= \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp(\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}x) \sum_{n\geq 0} \frac{(\|q\|_1\sqrt{\lambda})^n}{n!} \\
&\leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp(\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}x) \exp(\|q\|_1\sqrt{\lambda}) \\
&= \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp(\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}x + \|q\|_1\sqrt{\lambda})
\end{aligned}
$$

2)

Wir gehen analog zur ersten Ungleichung vor:

$$
\left| y_2(x,\lambda,q) - \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} \right| = \left| \sum_n S_n(x,\lambda,q) \right| \leq \sum_n |S_n(x,\lambda,q)|
$$

Durch Betrachten der Integralgleichungen von C_n und S_n können wir $|S_n(x,\lambda,q)|$ wie folgt abschätzen:

$$
|S_n(x,\lambda,q)| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} |C_n(x,\lambda,q)|.
$$

Daraus folgt die zweite Ungleichung:

$$
\sum_n |S_n(x,\lambda,q)| \leq \sum_n \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} |C_n(x,\lambda,q)| = \frac{1}{|\lambda|} \exp\Big(|\,\mathrm{Im}\,\sqrt{\lambda}|x + ||q||\sqrt{\lambda} \Big)
$$

3)

Wir haben folgende Integralgleichung für y_1 gegeben:

$$y_1(x,\lambda,q) = \cos\sqrt{\lambda}x + \int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t) y_1(t,\lambda,q) dt$$

Durch Ableiten nach x erhalten wir:

$$y_1'(x,\lambda,q) = -\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + \int_0^x \cos(\sqrt{\lambda}(x-t)) q(t) y_1(t,\lambda,q)\, dt$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1'(x,\lambda,q) + \sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) = \int_0^x \cos(\sqrt{\lambda}(x-t)) q(t) y_1(t,\lambda,q)\, dt$$

Wir verwenden die Abschätzungen

$$|y_1(x,\lambda,q)| \leq \exp\left(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x + ||q||\sqrt{\lambda}\right)$$

und

$$|c_\lambda(t)| \leq \exp\left(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|t\right)$$

Daraus folgt:

$$|y_1(x,\lambda,q) + \sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x)| = \left| \int_0^x \cos(\sqrt{\lambda}(x-t)) q(t) y_1(t,\lambda,q)\, dt \right|$$

$$\leq \int_0^x \left|\cos(\sqrt{\lambda}(x-t))\right| |q(t)||y_1(t,\lambda,q)|\, dt$$

$$\leq \int_0^x \exp\left(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|(x-t)\right) |q(t)| \exp\left(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|t\right) \exp(||q||\sqrt{\lambda})\, dt$$

$$= \int_0^x \exp\left(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x\right) |q(t)| \exp(||q||\sqrt{\lambda})\, dt$$

$$\leq \exp\left(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x\right) \int_0^x |q(t)| \exp(||q||\sqrt{\lambda})\, dt$$

$$\leq \exp\left(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x + ||q||\sqrt{\lambda}\right) \int_0^x |q(t)|\, dt$$

$$\leq ||q|| \exp\left(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x + ||q||\sqrt{\lambda}\right)$$

4)

Wir haben folgende Integralgleichung von $y_2(x,\lambda,q)$:

$$y_2(x,\lambda,q) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t) y_2(t,\lambda,q)dt.$$

Durch Ableiten nach x erhalten wir:

$$y_2'(x,\lambda,q) = \cos\sqrt{\lambda}x + \int_0^x \cos\sqrt{\lambda}(x-t) q(t) y_2(t,\lambda,q)dt \tag{1}$$

Wir verbessern die Abschätzung von y_2 durch die verbesserte Abschätzung von $|s_\lambda(x)|$ wie folgt:

$$|y_2(x,\lambda,q)| \leq \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \exp\left(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x + \|q\|\sqrt{x}\right) \tag{2}$$

da

$$y_2(x,\lambda,q) = s_\lambda(x) + \sum_{n\geq 1} s_n(x,\lambda,q) \tag{3}$$

also $s_\lambda(x)$ in jedem Term von y_2 vorkommt. Analog zur dritten Ungleichung setzen wir die Abschätzungen von y_2 und $c_\lambda(x)$ ein:

$$\begin{aligned}
|y_2'(x,\lambda,q) - \cos\sqrt{\lambda}x| &= \int_0^x |\cos\sqrt{\lambda}(x-t)||q(t)||y_2(t,\lambda,q)|dt \\
&\leq \int_0^x \exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|(x-t))|q(t)|\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|t)\exp(\|q\|\sqrt{t})dt \\
&= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x)|q(t)|\exp(\|q\|\sqrt{t})dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x)\int_0^x |q(t)|\exp(\|q\|\sqrt{t})dt \\
&\leq \frac{\|q\|}{\sqrt{|\lambda|}}\exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x + \|q\|\sqrt{x}).\blacksquare
\end{aligned}$$

Definition Landau-Symbol Die Notation $g(x) = O(f(x))$ bedeutet, dass es Konstanten $C < \infty$ und $x_0 < \infty$ gibt, sodass für alle $x > x_0$ gilt:

$$|g(x)| \leq C|f(x)|. \tag{4}$$

Theorem 4
Für $q \in H^2_{\mathbb{C}}$ gilt:

$$y_1(x,\lambda,q) = \cos\sqrt{\lambda}x + \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{2\sqrt{\lambda}}Q(x) + \frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{4\lambda}(q(x) - q(0) - \frac{1}{2}Q^2(x))$$

$$+O\left(\frac{\exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x)}{|\sqrt{\lambda}|^3}\right).$$

und

$$y_2(x,\lambda,q) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{2\lambda}Q(x) + \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{4\lambda^{3/2}}(q(x) + q(0) - \frac{1}{2}Q^2(x))$$

$$+O\left(\frac{\exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x)}{|\lambda|^2}\right),$$

wobei

$$Q(x) = \int_0^x q(t)\,dt.$$

Beweis.
Im ersten Schritt zeigen wir folgende Abschätzung:

$$y_1(x,\lambda,q) = \cos\sqrt{\lambda}x + \sum_{n\geq N+1} C_n(x,\lambda,q) + O\left(\frac{\exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x)}{\sqrt{|\lambda|}^{N+1}}\right). \tag{5}$$

Wir wissen bereits:

$$y_1(x,\lambda,q) = \cos\sqrt{\lambda}x + \sum_{n\geq 1} C_n(x,\lambda,q), \tag{6}$$

$$y_1(x,\lambda,q) = \cos\sqrt{\lambda}x + \sum_{n=1}^{N} C_n(x,\lambda,q) + \sum_{n\geq N+1} C_n(x,\lambda,q). \tag{7}$$

Den letzten Term schauen wir uns jetzt genauer an.
Wir haben bereits folgende Abschätzung aus Theorem 1:

$$|C_n(x,\lambda,q)| \leq \frac{1}{n!}\exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x)(\|q\|\sqrt{x})^n. \tag{8}$$

Wir betrachten wieder die Integralformel von $C_n(x,\lambda,q)$:

$$C_n(x,\lambda,q) = \int_{0\leq t_1\leq\cdots\leq t_n\leq x} c_\lambda(t_1)\prod_{i=1}^{n} s_\lambda(t_{i+1}-t_i)q(t_i)dt_1\ldots dt_n. \tag{9}$$

Man sieht schnell, dass das n-fache Produkt von s_λ in C_n vorkommt, weshalb durch die Abschätzung von $|s_\lambda(t)|$ folgende Abschätzung von $|C_n(x,\lambda,q)|$ folgt:

$$|C_n(x,\lambda,q)| \leq \frac{1}{n!}\frac{1}{\sqrt{|\lambda|^n}}\exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x)(\|q\|\sqrt{x})^n.. \tag{10}$$

Wir erhalten also:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq N+1}|C_n(x,\lambda,q)| &\leq \sum_{n\geq N+1}\frac{\exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x)}{|\sqrt{\lambda}|^n}\frac{(\|q\|\sqrt{x})^n}{n!}\\
&= \exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x)\sum_{n\geq N+1}\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|^n}\frac{(\|q\|\sqrt{x})^n}{n!}\\
&\leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|^{N+1}}\exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x)(\|q\|\sqrt{x})^{N+1}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|^n}\frac{(\|q\|\sqrt{x})^n}{(N+1+n)!}\\
&\leq \frac{\exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x)}{|\sqrt{\lambda}|^{N+1}}(\|q\|\sqrt{x})^{N+1}\exp\left(\frac{\|q\|\sqrt{x}}{\sqrt{|\lambda|}}\right).
\end{aligned}$$

Daher existiert eine Konstante $C < \infty$, sodass gilt:

$$\sum_{n \geq N+1} |C_n(x, \lambda, q)| \leq C \frac{\exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| x)}{|\sqrt{\lambda}|^{N+1}}. \tag{11}$$

Damit haben wir die Abschätzung von oben gezeigt.

*D*ie bisherige Abschätzung der Summe der C_n ist noch nicht sehr nützlich, da die C_n ziemlich kompliziert sind. Deswegen werden wir jetzt C_1 und C_2 genauer betrachten.

Wir haben folgende Integralgleichungen gegeben:

$$C_1(x, \lambda, q) = \int_0^x c_\lambda(t_1) s_\lambda(x - t_1) q(t_1) dt_1, \tag{12}$$

$$C_2(x, \lambda, q) = \int_0^x s_\lambda(x - t_1) q(t_1) \int_0^{t_1} c_\lambda(t_2, \lambda, q) q(t_2) dt_2 dt_1. \tag{13}$$

$$\begin{aligned} C_1(x, \lambda, q) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \cos \sqrt{\lambda} t_1 \sin \sqrt{\lambda}(x - t_1) q(t_1) dt_1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^x \left(\sin \sqrt{\lambda} x + \sin \sqrt{\lambda}(x - 2t_1) \right) q(t_1) dt_1 \\ &= \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^x q(t_1) dt_1 + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x - 2t_1) q(t_1) dt_1. \end{aligned}$$

Um von der ersten Zeile in die zweite Zeile zu kommen, verwenden wir die trigonometrische Identität $2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$. Durch partielle Integration des zweiten Terms erhalten wir:

$$C_1(x, \lambda, q) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^x q(t_1) dt_1 + \frac{1}{4\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x (q(x) - q(0)) - \frac{1}{4\lambda} \int_0^x \cos \sqrt{\lambda}(x - 2t_1) q'(t_1) dt_1.$$

Nun betrachten wir den dritten Term:

$$-\frac{1}{4\lambda} \int_0^x \cos \sqrt{\lambda}(x - 2t_1) q'(t_1) dt_1.$$

Durch partielle Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4\lambda} \left(\left[q'(t_1) \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}(x - 2t_1) \right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}(x - 2t_1) q''(t_1) dt_1 \right) \\ &= -\frac{1}{8\lambda^{3/2}} \left((q'(x) + q'(0)) \sin \sqrt{\lambda} x - \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x - 2t_1) q''(t_1) dt_1 \right). \end{aligned}$$

Wegen der obigen Abschätzung (5) ist das gerade:

$$-\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{8\lambda^{3/2}}(q'(x)+q'(0))+O\left(\frac{\exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x)}{|\lambda|^{3/2}}\right).$$

Damit ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}C_1(x,\lambda,q)&=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^x q(t_1)dt_1+\frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{4\lambda}(q(x)-q(0))\\&\quad-\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{8\lambda^{3/2}}(q'(x)+q'(0))+O\left(\frac{\exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x)}{|\lambda|^{3/2}}\right).\end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir C_2:

$$\begin{aligned}C_2(x,\lambda,q)&=\int_0^x S_\lambda(x-t_1)q(t_1)\int_0^{t_1}C_\lambda(t_2,\lambda,q)q(t_2)dt_2dt_1\\&=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x\sin\sqrt{\lambda}(x-t_1)q(t_1)\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{t_1}\cos\sqrt{\lambda}t_2\sin\sqrt{\lambda}(t_1-t_2)q(t_2)dt_2\right)dt_1\\&=\frac{1}{\lambda}\int_0^x\sin\sqrt{\lambda}(x-t_1)q(t_1)\int_0^{t_1}\sin\sqrt{\lambda}(t_1-t_2)\cos\sqrt{\lambda}t_2q(t_2)dt_2dt_1.\end{aligned}$$

Wir verwenden wieder die trigonometrischer Identität: $2\sin a\cos b=\sin(a+b)+\sin(a-b)$ und erhalten:

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2\lambda}\int_0^x\sin\sqrt{\lambda}(x-t_2)q(t_2)\left(\int_0^{t_2}\sin\sqrt{\lambda}t_2+\sin\sqrt{\lambda}(t_2-2t_1)q(t_1)dt_1\right)dt_2\\&=\frac{1}{2\lambda}\int_0^x\sin\sqrt{\lambda}(x-t_2)q(t_2)\sin\sqrt{\lambda}t_2\int_0^{t_2}q(t_1)dt_1dt_2\\&+\frac{1}{2\lambda}\int_0^x\sin\sqrt{\lambda}(x-t_2)q(t_2)\int_0^{t_2}\sin\sqrt{\lambda}(t_2-2t_1)q(t_1)dt_1dt_2.\\&=\mathbf{I}+\mathbf{II}\end{aligned}$$

Nun wenden wir folgende trigonometrische Identität auf den ersten Term an: $2\sin a\sin b=-\cos(a+b)+\cos(a-b)$

$$\begin{aligned}\mathbf{I}&=\frac{1}{2\lambda}\int_0^x\sin\sqrt{\lambda}(x-t_2)q(t_2)\sin\sqrt{\lambda}t_2\int_0^{t_2}q(t_1)dt_1dt_2\\&=\frac{1}{4\lambda}\int_0^x\left(-\cos\sqrt{\lambda}x+\cos\sqrt{\lambda}(x-2t_2)\right)q(t_2)\int_0^{t_2}q(t_1)dt_1dt_2\\&=-\frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{4\lambda}\int_0^x q(t_2)\int_0^{t_2}q(t_1)dt_1dt_2+\frac{1}{4\lambda}\int_0^x\cos\sqrt{\lambda}(x-2t_2)q(t_2)\int_0^{t_2}q(t_1)dt_1dt_2.\end{aligned}$$

$= \textbf{III} + \textbf{IV}$

$$
\begin{aligned}
\textbf{III} &= -\frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{4\lambda}\int_0^x q(t_2)\int_0^{t_2} q(t_1)dt_1dt_2 \\
&= -\frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{4\lambda}\int_0^x q(t_2)Q(t_2)dt_2 \\
&= -\frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{4\lambda}\left([Q(t_2)Q(t_2)]_0^x - \int_0^x Q(t_2)q(t_2)dt_2\right) \\
&= -\frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{8\lambda}\left(\int_0^x q(t_2)dt_2\right)^2 \\
&= -\frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{8\lambda}Q(t_2)^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\textbf{VI} &= \frac{1}{4\lambda}\int_0^x \cos\sqrt{\lambda}(x-2t_2)q(t_2)\int_0^{t_2} q(t_1)dt_1dt_2 \\
&= \frac{1}{4\lambda}\left[\frac{-1}{2\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}(x-2t_2)q(t_2)\int_0^{t_2} q(t_1)dt_1\right. \\
&\left. + \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}x\left(q'(t_2)\int_0^{t_2} q(t_1)dt_1\right)dt_2\right]
\end{aligned}
$$

$$
= -\frac{8}{\lambda^{\frac{3}{2}}}\left[\sin\sqrt{\lambda}x\left(q(x)\int_0^x q(t_1)dt_1\right) + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}x\left(q'(t_2)\int_0^{t_2} q(t_1)dt_1\right)dt_2\right]
$$

$$
= 0\left(\frac{\exp(|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}|x)}{|\sqrt{\lambda}|^3}\right)
$$

Durch weiteres partielles Integrieren erhalten wir

$$
\textbf{II} = \frac{1}{2\lambda}\int_0^x \sin\sqrt{\lambda}(x-t_2)q(t_2)\left(\int_0^{t_2}\sin\sqrt{\lambda}(t_2-t_1)q(t_1)dt_1\right)dt_2
$$

$$
= 0\left(\frac{\exp(|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}|x)}{|\sqrt{\lambda}|^3}\right)
$$

$$
\Rightarrow C_2(x,\lambda,q) = -\frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{4\lambda}\frac{\lambda}{2}\left(\int_0^x q(t_2)\right)^2 dt + O\left(\frac{\exp(|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}|x)}{|\sqrt{\lambda}|^3}\right)
$$

Die Abschätzungen mit den Landau-Symbolen können wir wieder aufgrund der Gleichung (5) machen, die wir oben bereits gezeigt haben.

$y_1(x_1, \lambda, q)$ wollen wir nun durch sukzessive Approximation bestimmen. Durch Sammeln der Terme erhalten wir:

$$y_1(x_1, \lambda, q) = \cos\sqrt{\lambda}x + \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{2\sqrt{\lambda}}Q(x) + \frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{4\lambda}(q(x) - q(0) - \frac{1}{2}Q^2(x))$$

$$+O\left(\frac{\exp(|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}|x)}{|\sqrt{\lambda}|^3}\right)$$

Durch das Sammeln der Terme ergibt sich also die Entwicklung für y_1. Die Entwicklung für y_2 folgt durch ähnliche Manipulationen. ■