Die Fundamentallösung III

Analytizitätseigenschaften

(a) Für jedes $x \in [0,1]$ sind

$$y_j(x,\lambda,q), \quad y_j'(x,\lambda,q), \quad j = 1,2$$

ganze Funktionen in $\mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$. Sie sind reellwertig auf $\mathbb{R} \times L^2_{\mathbb{R}}$.

(b) Die Lösung

$$y_j(\cdot,\lambda,q), \quad j = 1,2$$

ist eine analytische Abbildung von $\mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$ nach $H^2_{\mathbb{C}}$.

Für $k \geq 0$, eine ganze Zahl, bezeichnet $H^k_{\mathbb{C}} = H^k_{\mathbb{C}}[0,1]$ den Hilbertraum aller komplexwertigen Funktionen auf $[0,1]$, die k Ableitungen in L^2 besitzen. $H^k_{\mathbb{R}}$ ist der Unterraum aller reellwertigen Funktionen in $H^k_{\mathbb{C}}$. Insbesondere gilt $L^2_{\mathbb{C}} = H^0_{\mathbb{C}}$ und $L^2_{\mathbb{R}} = H^0_{\mathbb{R}}$.

Beweis der Analytizitätseigenschaften

(a) Betrachte y_1 mit

$$y_1(x,\lambda,q) = C_0(x,y) + \sum_{n\geq 1} C_n(x,\lambda,q).$$

Der n-te Term in der Potenzreihenentwicklung ist

$$C_n = \int_{0\leq t_1\leq \ldots \leq t_{n+1}=x} c_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^{n} s_\lambda(t_{i+1}-t_i) q(t_i)\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Der Ausdruck ist ein Integral, das von λ und q abhängt. Die ersten beiden Faktoren des Integrals sind Funktionen von λ. Da sie auf der gesamten komplexen Ebene analytisch sind, handelt es sich um ganze Funktionen in λ. Für jedes x ist der Term im Integral daher stetig differenzierbar in λ und q überall auf $\mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$. Also ist dieser eine ganze Funktion in λ und q. Durch die gleichmäßige Konvergenz der Summe aller dieser Terme auf kompakten Teilmengen von $[0,1] \times \mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$ folgt, dass y_1 für jedes x ebenfalls eine ganze Funktion in λ, q ist.

(b) Betrachte erneut y_1. Jeder Term der C_n ist für $\forall n \in \mathbb{N}$ stetig differenzierbar und daher analytisch als Abbildung von $\mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$ nach $C_{\mathbb{C}}$. $C_{\mathbb{C}}$ ist dabei der Banachraum aller komplexen stetigen Funktionen auf $[0,1]$ mit der Supremumsnorm. Daraus folgt für y_1 mit der gleichmäßigen Konvergenz der C_n und für y_1' aus der Integralgleichung aus Teil (a), dass y_1 und y_1' in $C_{\mathbb{C}}$ liegen. Weiter gilt, dass y_1, y_1' analytisch sind als Abbildungen von $\mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$ nach $L^2_{\mathbb{C}}$. Für die zweite Ableitung $y_1'' = (q - \lambda)y_1$ folgt aus der Argumentation von oben, dass sie ebenfalls analytisch ist. Damit ist die Analytizität von y_1 als Abbildung von $\mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$ nach $H^2_{\mathbb{C}}$ gezeigt. $\square$

Wronskische Identität

Die Wronski-Determinante von zwei differenzierbaren Funktionen f und g lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$[f, g] = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x).$$

$$[y_1, y_2] = 1$$

Die Wronskische Identität ist gleich 1, also wissen wir, dass die Lösungen y_1, y_2 linear unabhängig sind. Weiter wissen wir, dass

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}).$$

Beweis:

Berechne $[y_1, y_2](0)$ mit den Anfangswertbedingungen

$$y_1(0) = y_2'(0) = 1, \quad y_1'(0) = y_2(0) = 0.$$

Also gilt:

$$[y_1, y_2](0) = y_1(0)y_2'(0) - y_1'(0)y_2(0) = 1.$$

Leite nun die Wronski-Determinante ab:

$$[y_1, y_2]' = (y_1 y_2' - y_1' y_2)'.$$

Mit der Produktregel ergibt sich:

$$[y_1, y_2]' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2.$$

Da y_1 und y_2 Lösungen der DGL $y'' = (q - \lambda)y$ sind, setzen wir dies ein:

$$[y_1, y_2]' = y_1(q - \lambda)y_2 - (q - \lambda)y_1 y_2 = 0.$$

Da die Ableitung der Wronski-Determinante überall Null ist folgt, dass $[y_1, y_2]$ konstant ist. Also gilt

$$[y_1, y_2](x) = [y_1, y_2](0) = 1 \quad \forall x \in [0, 1].$$

$\square$

Theorem 2

Sei $f \in L^2_{\mathbb{C}}$ und $a, b \in \mathbb{C}$. Dann existiert eine eindeutige Lösung der inhomogenen Gleichung

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x) - f(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = a, \quad y'(0) = b.$$

Sie lautet:

$$y(x) = ay_1(x) + by_2(x) + \int_0^x (y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t))f(t)\,dt.$$

Beweis

Seien y_1 und y_2 zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,$$

mit Anfangsbedingungen $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$ und $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$. Dann ist ihre Wronskische Determinante konstant gleich 1:

$$W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = 1 \quad \text{für alle } x.$$

Wir definieren die Funktion

$$y_f(x) := \int_0^x (y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t))f(t)\,dt.$$

Diese schreiben wir um als

$$y_f(x) = y_2(x)\int_0^x y_1(t)f(t)\,dt - y_1(x)\int_0^x y_2(t)f(t)\,dt.$$

Überprüfung der Anfangswerte:

- Für $x = 0$ ergibt sich direkt:

$$y_f(0) = \int_0^0 (y_1(t)y_2(0) - y_1(0)y_2(t))f(t)\,dt = 0.$$

- Für die Ableitung an der Stelle $x = 0$ gilt:

$$y_f'(x) = y_2'(x)\int_0^x y_1(t)f(t)\,dt - y_1'(x)\int_0^x y_2(t)f(t)\,dt,$$

  also:

$$y_f'(0) = y_2'(0)\cdot 0 - y_1'(0)\cdot 0 = 0.$$

Durch Ableiten mit der Produktregel und Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ergibt sich:

$$y_f'(x) = y_2'(x)\int_0^x y_1(t)f(t)\,dt - y_1'(x)\int_0^x y_2(t)f(t)\,dt.$$

Die zweite Ableitung lautet:

$$\begin{aligned} y_f''(x) &= y_2'(x)y_1(x)f(x) + y_2''(x)\int_0^x y_1(t)f(t)\,dt \\ &\quad - y_1'(x)y_2(x)f(x) - y_1''(x)\int_0^x y_2(t)f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Da $y_j'' = (q-\lambda)y_j$ für $j = 1, 2$, setzen wir dies ein:

$$\begin{aligned} y_f''(x) &= (y_2'(x)y_1(x) - y_1'(x)y_2(x))f(x) \\ &\quad + q(x)y_2(x)\int_0^x y_1(t)f(t)\,dt - \lambda y_2(x)\int_0^x y_1(t)f(t)\,dt \\ &\quad - q(x)y_1(x)\int_0^x y_2(t)f(t)\,dt + \lambda y_1(x)\int_0^x y_2(t)f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Verwenden wir die Wronski-Identität $y_2'(x)y_1(x) - y_1'(x)y_2(x) = 1$, so erhalten wir:

$$y_f''(x) = f(x) + q(x)y_f(x) - \lambda y_f(x),$$

d. h.

$$-y_f''(x) + q(x)y_f(x) = \lambda y_f(x) - f(x),$$

also ist y_f eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

Allgemeine Lösung: Die Funktion

$$y(x) := ay_1(x) + by_2(x) + y_f(x)$$

erfüllt die Anfangsbedingungen $y(0) = a$, $y'(0) = b$ und die inhomogene Gleichung, da y_f die Differentialgleichung erfüllt und bei $x = 0$ verschwindet.

Eindeutigkeit der Lösung

Die Differentialgleichung ist linear mit gegebenen Anfangsbedingungen. Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung folgt, dass die Lösung eindeutig ist.

Die Eindeutigkeit der Lösung zeigen wir wie folgt: Wir nehmen an, dass es eine weitere Lösung $\tilde{y}_f(x)$ mit denselben Anfangsbedingungen gibt. Wir definieren die Differenzfunktion:

$$v(x) := y_f(x) - \tilde{y}_f(x).$$

Diese Funktion erfüllt:

$$-v''(x) + q(x)v(x) = \lambda v(x),$$

also ist $v(x)$ eine Lösung der homogenen Gleichung. Gleichzeitig gelten durch die Anfangsbedingungen:

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0.$$

Da die Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung durch Anfangswerte eindeutig bestimmt ist, folgt:

$$\Rightarrow \quad y_f(x) = \tilde{y}_f(x).$$

□

Korollar 1

Jede Lösung der Differentialgleichung

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x)$$

ist eindeutig gegeben durch

$$y(x) = y(0)y_1(x) + y'(0)y_2(x).$$

Weiter gilt: Wenn eine Lösung eine doppelte Nullstelle hat, verschwindet sie vollständig. Damit ist das ursprüngliche Anfangswertproblem zur Gleichung (1) gelöst.

Beweis

Wir konstruieren zwei spezielle Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$, die folgende Anfangsbedingungen erfüllen:

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \qquad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1.$$

Diese beiden Lösungen bilden ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung. Das bedeutet, dass jede Lösung $y(x)$ als Linearkombination dieser beiden geschrieben werden kann:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Die Konstanten C_1, C_2 lassen sich durch Einsetzen der Anfangsbedingungen bestimmen:

$$C_1 = y(0), \quad C_2 = y'(0).$$

Einsetzen in die allgemeine Lösung ergibt:

$$y(x) = y(0)y_1(x) + y'(0)y_2(x).$$

Nun betrachten wir den Fall, dass eine Lösung $y(x)$ eine doppelte Nullstelle bei einer Stelle $x \in [0,1]$ besitzt, also:

$$y(x) = 0, \quad y'(x) = 0.$$

Dann ergibt sich mit der Darstellung:

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = 0.$$

Die Matrix

$$M(x) := \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$$

ist aufgrund der Wronski-Identität

$$\det M(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = 1$$

für alle $x \in [0,1]$ invertierbar. Daher muss gelten:

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = M(x)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$y(x) = 0 \cdot y_1(x) + 0 \cdot y_2(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1],$$

d. h. die Lösung ist identisch Null:

$$y(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0,1].$$

$\square$