Dirichlet-Problem
Ausgewählte Themen der Differentialgleichung
und dynamische Systeme

vorgelegt von *Damlanur, Avci*

Matrikelnummer: 1711415

E-Mail: damlanur.avci@students.uni-mannheim.de

Universität Mannheim
Betreuer: Prof. Dr. Martin Schmidt
Eingereicht am:08.05.2025

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

The Dirichlet-Problem

1.1 Definition

Das Dirichletproblem ist ein Randwertproblem für die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \tag{1.1}$$

$0 \leq x \leq 1$.
Hierbei ist $\lambda \in \mathbb{C}$ und $q \in L^2 = L^2_{\mathbb{R}}([0,1])$ der Hilbertraum aller reelwertigen, quadratintegrierbaren Funktionen auf dem Intervall [0,1]).
Nun betrachten wir, ob es nicht triviale Lösungen dieser Gleichungen gibt, die die Dirichlet-Randbedingungen

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

erfüllen.
(Die Lösung $y(x)$ soll die Dirichlet-Randbedingung erfüllen dh. die Lösung verschwindet an den Randpunkten des Intervalls.)

1.2 Mathematischer Rahmen

Der Operator$Q$

Der Operator Q ist ein Differentialoperator, der folgendermaßen definiert ist:

$$Q = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

umgeschrieben

$$Qy = -y''(x) + q(x)y(x).$$

Hier ist:
y(x) eine Funktion, auf die der Operator wirkt.
$y''(x)$ die zweite Ableitung von $y(x)$.
q(x) eine gegebene Funktion.

Der Definitionsbereich $D(Q)$ des Operators Q besteht aus allen Eigenfunktionen $y(x) \in L^2[0,1]$ und erfüllen folgende Eigenschaften:

- $y(x)$ ist zweimal differenzierbar auf $[0,1]$
- $y(x)$ erfüllt die Dirichlet-Ranbedingungen:

$$y(0) = 0, y(1) = 0.$$

- $y''(x)$ ist quadratintegrierbar, d.h.:

$$\int_0^1 |y''(x)|^2 \, dx < \infty.$$

Der Operator Q ist **selbstadjungiert**, wenn er gleich seinem adjungierten Operator Q^* ist, damit gilt:

$$Q = Q^*.$$

Für alle Funktionen $f, g \in D(Q)$ gilt:

$$\langle Qf, g \rangle = \langle f, Qg \rangle .$$

Der selbstadjungierte Operator Q hat reele Eigenwerte und seine Eigenfunktionen bilden eine orthonormale Basis des Hilbertraums $L^2[0,1]$. Das Dirichlet-Problem kann als Eigenwertproblem für den Differentialoperator aufgefasst werden.

Definitionen
Ein **Eigenwert** λ ist eine komplexe Zahl.
Die entsprechende nicht-triviale Lösung $y(x)$ heißt **Eigenfunktion.**
Ein Eigenwert λ besitzt eine nicht-triviale Lösung $y(x)$, sodass $Qy = \lambda y$ gilt.
Ein **Spektrum** ist die Menge aller Eigenwerte λ.

In diesem Abschnitt wird die allgemeine Lösung für den Fall $q(x) = 0$ hergeleitet.
Für $q(x) = 0$ vereinfacht sich die Differentialgleichung zur

$$-y''(x) = \lambda y(x).$$

Das ist eine lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Zunächst schreiben wir die Gleichung um: $y''(x) + \lambda y(x) = 0$.
Die allgemeine Lösung ist:

$$y(x) = Asin(\sqrt{\lambda x}) + Bcos(\sqrt{\lambda x}).$$

Nun werden die Randbedingungen angewendet:
1.$y(0) = 0$:
$y(0) = A \cdot 0 + B \cdot 1 = B = 0$.
Also ist $B = 0$, und die Lösung vereinfacht sich zu:

$$y(x) = Asin(\sqrt{\lambda x})$$

2.$y(1) = 0$:

$$y(1) = Asin(\sqrt{\lambda} \cdot 1) = 0.$$

Damit dies erfüllt ist, muss $sin(\sqrt{\lambda}) = 0$.
Das ist der Fall, wenn:

$$\sqrt{\lambda} = n\pi, n = 1, 2, 3, ...$$

Also sind die Eigenwerte:

$$\lambda_n = n^2\pi^2, n = 1, 2, 3...$$

Dazu gehören die Eigenfunktionen: $y_n(x) = sin(n\pi x)$.

1.3 Anwendungsbereich

Das Dirichlet-Problem ist ein grundlegendes Problem in der mathematischen Physik und Analysis. Ein Anwendungsbereich ist in der Quantenmechanik, der Wärmeleitung oder Schwingung von Saiten. In der Quantenmechanik ist z.B.$y(x)$ eine Wellenfunktion und λ eine Energie.

Das Problem führt zu einer tiefen Einsicht in die Spektraltheorie von Differentialoperatoren. Insbesondere ist der Zusammenhang der Gebiete Analysis, lineare Algebra und Funktionalanalysis.

Kapitel 2

Shooting-Methode

Die Shooting-methode ist ein wichtiges Werkzeug, um das Dirichlet-Problem zu lösen.Sie wird verwendet, um die Existenz und Eigenschaft der Eigenwerte sowie Eigenfunktionen zu finden.Die Shooting-Methode ist ein numerisches Verfahren, dass zur Lösung von Randwertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen geeignet ist.
Die Shooting-Methode wandelt das Randwertproblem in ein Anfangswertproblem um, indem die Anfangssteigung $y'(0) = s$ gewählt wird. Dies wird auch als Schuss bezeichnet. Die Anfangsbedingungen sind $y(0) = 0, y'(0) = s$. Da die Lösung linear in s ist, kann $s = 1$ gesetzt werden.
Die Lösung $y_2(x, \lambda)$ wird vom linken Rand $x = 0$ mit Steigung s "geschossen".Dabei muss λ so gewählt werden, dass die Lösung am rechten Rand $x = 1$ die Bedingung $y_2(1, \lambda) = 0$ erfüllt (Siehe Abb. 2.1).

Dafür müssen die Nullstellen von $y_2(1, \lambda)$ berechnet werden. Diese entsprechen den Eigenwerten μ_nd.h. die Eigenwerte λ_n sind die λ für die $y_2(1, \lambda) = 0$ gilt. Dazu kann ein iteratives Verfahren verwendet werden, um die Nullstellen zu approximieren.

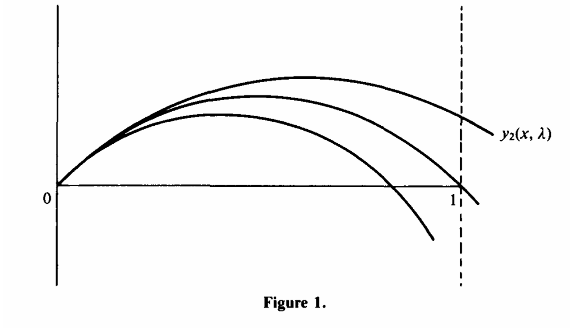

Abbildung 2.1: Shooting-Methode

Kapitel 3

Lemma 1

Für eine komplexe Zahl z, die mindestens $\frac{\pi}{4}$ von jedem ganzzahligen Vielfachen von π entfernt ist, gilt:

$$e^{|\operatorname{Im} z|} < 4|\sin z|$$

3.1 Beweis

Im Beweis soll ausgeführt werden, dass $|\sin z|^2$ eine exponentielle untere Schranke besitzt.

Dabei wird die Identität verwendet:

$$|\sin z|^2 = \cosh^2 y - \cos^2 x$$

, wobei $z = x + iy$. mit $x, y \in \mathbb{R}$.
Davor beweisen wir die Identität.
$iz = i(x + iy) = ix - y$

$$sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \frac{e^{(ix-y)} - e^{(-ix+y)}}{2}$$

$$|sin(z)|^2 = sin(z)\overline{sin(z)}$$

$$= \frac{e^{(ix-y)} - e^{(-ix+y)}}{2} \cdot \frac{\overline{e^{(ix-y)}} - \overline{e^{(-ix+y)}}}{2}$$

$$= \frac{(e^{ix-y} - e^{-ix+y})(e^{-ix-y} - e^{ix+y})}{4}$$

$$= \frac{e^{-2y} - e^{2ix} - e^{-2ix} + e^{2y}}{4}$$

$$= \frac{e^{-2y} - e^{2y}}{4} - \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{4}$$

$$cosh^2 y = (\frac{e^y + e^{-y}}{2})^2 = \frac{e^{2y} + 2 + e^{-2y}}{4}$$
$$cos^2 y = (\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2})^2 = \frac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4}$$

Der Term $sin^2(x)$ ist π periodisch, weil

$$sin^2(x+\pi) = (sin(x)cos(x) + cos(x)sin(x))^2 = (-sin(x))^2 = sin(x)^2$$

Da $|\sin z|$ von $sin^2(x)$ abhängt und $sin^2(x)$ sich alle π wiederholt, ist auch $|sin(z)|$ π periodisch in x.

$$|sin(z+\pi)| = |sin(z)|.$$

Durch die π Periodizität reicht es, die Ungleichung für z $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ und $|z| \geq \frac{\pi}{4}$ zu zeigen.Der Rest erfolgt durch Verschiebung.

Fall 1: Für $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$:

Wir benötigen eine Abschätzung für $cos^2 x$. Wir haben die folgende Eigenschaft gegeben:

$$cos^2(x) \leq \frac{3}{4}$$

Da $cos(x)$ eine monoton fallende Funktion für $x \geq 0$ ist, gilt:

$$cos^2(x) \geq cos^2(\frac{\pi}{6}).$$

Da $cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ ist, folgt $cos^2 x \leq (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4}$. Nun wird die untere Schranke für $|\sin z|^2$ festgelegt. Dafür setzen wir den Wert in die Identität ein.
Aus

$$|\sin z|^2 = \cosh^2 y - \cos^2 x$$

und

$$cos^2(x) \leq \frac{3}{4}$$

folgt:

$$|\sin z|^2 \geq \cosh^2 y - \frac{3}{4}.$$

Dann wird $cosh^2(y)$ abgeschätzt.
Es gilt die Eigenschaft $cosh^2(y) \geq 1$, da $cosh(y) \geq 1$ für alle y gilt.
Wir wissen bereits, dass

$$cos^2(x) \leq \frac{3}{4} \leq \frac{3}{4}cosh^2(y)$$

,da

$$\frac{3}{4}cosh^2(y) \geq \frac{3}{4} \leftrightarrow cosh^2(y) = 1.$$

Dies ist wahr, da $cosh(y) \geq 1$.
Da für große Werte von y die Funktion $cosh^2(y)$ exponentiell wächst, haben wir die Abschätzung:

$$cosh^2(y) - \frac{3}{4} \geq \frac{1}{4}cosh^2(y)$$

Wenn dies in Identität eingesetz wird erhalten wir:

$$|\sin z|^2 \geq \frac{1}{4}cosh^2(y)$$

Nun wird die bekannte Abschätzung verwendet:

$$cosh(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \geq \frac{1}{2}e^{|y|}.$$

Durch das Quadrieren erhalten wir:

$$cosh^2(y) \geq \frac{1}{4}e^{2|y|}.$$

Wenn wir es in die vorherige Ungleichung einsetzen, erhalten wir:

$$|\sin z|^2 \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}e^{2|y|} = \frac{1}{16}e^{2|y|}.$$

Letztendlich erhalten die Ungleichung:

$$|\sin z|^2 \geq \frac{1}{4}e^{2|y|} \geq \frac{1}{16}e^{2|y|}.$$

Durch das Wurzelziehen erhält man die endgültige Abschätzung:

$$|\sin z| \geq \frac{1}{4}e^y$$

$$= e^{|y|} < 4|\sin z|.$$

Fall 2: Für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$:
Wir haben den Betrag $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{\pi}{4}$.
Durch das Quadrieren erhalten wird:
$x^2 + y^2 \geq (\frac{\pi}{4})^2 = \frac{\pi^2}{16}$.

Da $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$, ist $x^2 \leq (\frac{\pi}{6})^2 = \frac{\pi^2}{36}$.
Die untere Schranke für y^2 ist:

$$y^2 \geq \frac{\pi^2}{16} - x^2 \geq \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{36}$$

Die Differenz lautet:

$$\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{36} = \pi^2(\frac{9}{144} - \frac{4}{144}) = \pi^2 \cdot \frac{5}{144}.$$

Somit erhalten wir:

$$y^2 \geq \frac{5}{144}\pi^2 \approx 0,343.$$

$$0,343 \to |y| \geq \sqrt{0,343} \approx 0,586.$$

Daraus lässt sich schließen, dass der Imaginärteil y groß genug ist.
Im nächsten Schritt müssen wir $cosh^2(y)$ abschätzen.
Die Hyperbelfunktion $cosh(y)$ ist definiert als:

$$cosh(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \geq 1$$

Da $cosh^2(y) \geq 1 + y^2$ ist, gilt für $y^2 \geq \frac{5}{144}\pi^2$:

$$cosh^2(y) \geq 1 + \frac{5}{144}\pi^2$$

Da wir wissen, dass

$$y_2 \geq \frac{5}{144}\pi^2 \approx 0,343.$$

benötigen wir eine Abschätzung.
Da $0,343 > \frac{1}{3} \approx 0,333$ ist, gilt sicher:

$$y_2 \geq \frac{1}{3}.$$

Wie berechnen den Wert für π.

$$\frac{5}{144}\pi^2 \geq \frac{1}{3}$$

$$5\pi^2 \geq \frac{144}{3}$$

$$5\pi^2 \geq 48$$

$$\pi^2 \geq 9,6$$

$$\pi \geq \sqrt{9,6} \approx 3,098.$$

Für $y^2 \geq \frac{1}{3}$:

$$cosh^2(y) \geq 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Bisher haben wir diese Ungleichung:

$$cosh^2 y \geq 1 + y^2 \geq \frac{4}{3}.$$

Die Abschätzung von $cosh^2(y) \geq \frac{4}{3}$ wird benötigt, um zu zeigen:

$$|sin(z)| = cosh^2(y) - cos^2(y) \geq \frac{4}{3} - cos^2(x)$$

Für $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$ ist $cos^2(x) \leq cos^2(0) = 1$, also:

$$|sin(z)|^2 \geq \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

Damit folgt:

$$|sin(z)| \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577.$$

Also haben wir die Ungleichung:

$$cosh^2 y \geq 1 + y^2 \geq \frac{4}{3} \geq \frac{4}{3} cos^2 x.$$

Wie bereits oben berechnet, erhalten wir auch für diesen Fall das Ergebnis:

$$|\sin z|^2 \geq \frac{1}{4} \cosh^2 y \geq \frac{1}{16} e^{2|y|}$$

In beiden Fällen folgt:

$$e^{|\operatorname{Im} z|} < 4|\sin z|.$$

In diesem Lemma wurde die Abschätzung für den Sinus einer komplexen Zahl bewiesen. Die Ausführung des Lemmas ist in der Hinsicht wichtig, weil die Abschätzung für $|\sin z|$ in Lemma 2 verwendet wird.

Kapitel 4

Lemma 2

Dieses Lemma nennt man auch Zähllemma.
Sie liefert eine Abschätzung für die Anzahl der Nullstellen der Funktion $y_2(1, \lambda, q)$.
Die Funktion hat einen Zusammenhang mit den Eigenwerten von q.

4.1 Aussage

Sei $q \in L^2_{\mathbb{C}}$ und $N > 2e^{\|q\|}$ eine ganze Zahl. Dann hat die Funktion $y_2(1, \lambda, q)$ N Nullstellen in der offenen Halbebene.

$$Re\lambda < (N + \frac{1}{2})^2\pi^2,$$

*

und für jedes $n > N$ gibt es genau eine einfache Nullstelle in der eiförmigen Region um $\lambda = (n\pi)^2$.

$$|\sqrt{\lambda} - n\pi| < \frac{\pi}{2}.$$

Es gibt keine weiteren Nullstellen.
*Es gibt unendlich viele Eigenwerte, die asymptotisch quadratisch verteilt sind.

4.2 Beweis

$$Re\lambda < (N + \frac{1}{2})^2\pi^2,$$

beschreibt eine parabolische Schranke in der komplexen Ebene.
Der Ursprung der Ungleichung hängt von der Wurzeltransformation $\sqrt{\lambda}$ zusammen.
Herleitung von $\sqrt{\lambda}$
Die komplexe Wurzel kann geschrieben werden als:

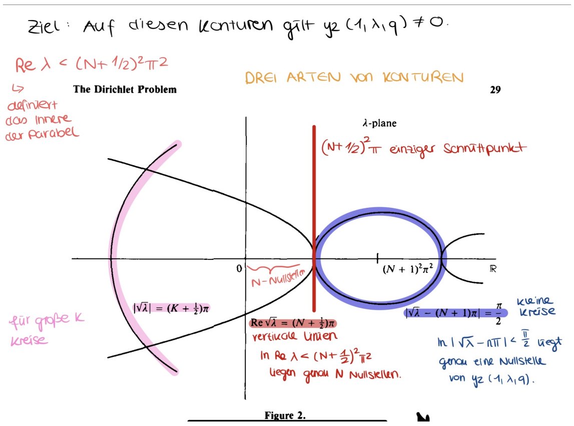

Abbildung 4.1: Drei Arten von Konturen

$\sqrt{\lambda} = a + ib$, mit $a = Re\sqrt{\lambda}, b = Im\sqrt{\lambda}$.
Dann gilt:

$$\lambda = (a + ib)^2 = (a^2 - b^2) + i(2ab).$$

Somit ist:

$$Re\lambda = a^2 - b^2.$$

Geometrische Bedeutung:
- In der $\sqrt{\lambda}$-Ebene:
Die Bedingung $Re\sqrt{\lambda} = (N + \frac{1}{2})\pi$, ist eine **vertikale Gerade** bei $a = (N + \frac{1}{2})\pi$.
-In derλ- Ebene:
Durch die Abbildung $\lambda = (a + ib)^2$ wird diese Gerade zu einer links geöffneten Parabel:

$$\sigma = a^2 - b^2, \tau = 2ab$$

$$\sigma = ((N + \frac{1}{2})\pi)^2 - (\frac{\tau}{2(N + \frac{1}{2})\pi})^2.$$

$$\sigma = (N + \frac{1}{2})^2\pi^2 - \frac{\tau^2}{4(N + \frac{1}{2})^2\pi^2}.$$

Wir erhalten eine Parabel mit dem Scheitepunkt:

$$\sigma = ((N + \frac{1}{2})^2\pi^2, 0)$$

-Der Bereich $Re\lambda < (N + \frac{1}{2})^2\pi^2$:
entspricht der ïnneren"Parabel.

Wir betrachten zunächst die Konturen:

$$|\sqrt{\lambda}|= (K + \frac{1}{2})\pi,$$

$$Re\sqrt{\lambda} = (N + \frac{1}{2})\pi,$$

und

$$|\sqrt{\lambda} - n\pi|= \frac{\pi}{2}, n > N.$$

Zz. ist, dass $y_2(1, \lambda, q)$ auf den Konturen nicht verschwindet. Dafür muss gezeigt werden, dass auf diesen Konturen bestimmte Abschätzungen für y_2 gelten.
Es gilt:

$$|e^{i\sqrt{\lambda}}| \approx |sin(\sqrt{\lambda})|.$$

Hierfür benötigen wir das Lemma 1 und eine Basic Estimate. Das Lemma 1 liefert eine notwendige Abschätzung für $sin(\sqrt{\lambda})$.
Sie zeigt, wie stark sich die Lösung $y_2(1, \lambda, q)$ von der Lösung $\frac{sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$ unterscheidet.
Das Lemma 1 besagt für $|z - n\pi| > \frac{\pi}{4}$ gilt:

$$e^{|\operatorname{Im} z|} < 4|\sin z|.$$

Auf unseren Konturen ist $|\sqrt{\lambda} - n\pi| > \frac{\pi}{4}$ für alle n. Daher gilt:

$$e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|} < 4|\sin \sqrt{\lambda}|.$$

Das Basic Estimate für y_2 ist:

$$|y_2(1, \lambda, q) - \frac{sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}| \leq \frac{e^{||q||}}{|\sqrt{\lambda}|}\frac{e^{Im\sqrt{\lambda}}}{|\sqrt{\lambda}|}$$

Mit Lemma 1 folgt:

$$|y_2(1, \lambda, q) - \frac{sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}| \leq \frac{4e^{||q||}|sin\sqrt{\lambda}|}{|\lambda|}$$

Für $N > 2e^{||q||}$ und $|\lambda|$ groß genug gilt:

$$\frac{4e^{||q||}}{|\sqrt{\lambda}|} < \frac{1}{2} \rightarrow |y_2(1, \lambda, q) - \frac{sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}| < \frac{1}{2}|\frac{sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}|.$$

Die Voraussetzung für Rouche´ ist erfüllt:

$$|y_2(1,\lambda,q) - g(\lambda)| < |g(\lambda)|$$

mit

$$g(\lambda) = \frac{sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Rouche´s Theorem:
Seien f und g holomorph auf einem Gebiet G mit einer einfachen geschlossenen Kurve $\gamma \subset G$, falls,

$$|f(\lambda) - g(\lambda)| \leq |g(\lambda)|$$

für alle $\lambda \in \gamma$, dann haben f und g gleich viele Nullstellen im Inneren von γ. Hier ist:

$$f(\lambda) = y_2(1,\lambda,q)$$
$$g(\lambda) = \frac{sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$$

Somit gilt auf den gewählten Konturen:

$$|y_2(1,\lambda,q) - \frac{sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}| \leq |\frac{sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}|.$$

Die Beweisidee von Rouche´ ist, dass $y_2(1,\lambda,q)$ und $\frac{sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$ auf dem Rand der gewählten Konturen fast gleich groß sind und somit gleich viele Nullstellen innerhalb der Kontur besitzen.
Nullstellenvergleich:
-Für $g(\lambda) = \frac{sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$:

$\frac{sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$ hat nur einfache Nullstellen bei $\lambda = n^2\pi^2$ $(n \geq 1)$.
-Für $y_2(1,\lambda,q)$:

Rouche´ hat uns gezeigt, dass y_2 gleich viele Nullstellen wie g in den betrachteten Gebieten hat:
1. **Innerhalb der kleinen Kreise** $|\sqrt{\lambda} - n\pi| < \frac{\pi}{2}$:
g hat **genau eine Nullstelle** bei $\lambda = n^2\pi^2 \to y_2$ hat auch genau eine.

2.**Außerhalb der großen Kreise**$|\sqrt{\lambda}| > (K + \frac{1}{2})\pi$:

g hat keine Nullstellen $\to y_2$ hat auch keine.

3.**Auf der vertikalen Linie** $Re\lambda = (N + \frac{1}{2})^2\pi^2$:

g hat **genau N Nullstellen** $\rightarrow y_2$ hat auch N Nullstellen.