**Seminar: Ausgewählte Themen
gewöhnlicher Differentialgleichungen und
dynamische Systeme**

**Theoreme 6 und 7 aus dem ersten Kapitel des
Buches “Inverse Spectral Theory”**

Maximilian Burgey

Matrikelnummer: 1753519

Bachelor of Education: Mathematik und Geschichte

Universität Mannheim

Dozent: Prof. Dr. Martin Schmidt

Frühjahr-/Sommersemester 2025

Abgabe: 16.04.2025

Contents

1	Einleitung	2
2	Grundlagen und Definitionen	3
3	Theorem 6	4
4	Theorem 7	8

1 Einleitung

Theorem 6 und **Theorem 7** aus dem Originalpaper zur inversen Spektraltheorie beschäftigen sich mit den Eigenschaften zweier sogenannter Fundamentallösungen $y_1(x, \lambda, q)$ und $y_2(x, \lambda, q)$ der Differentialgleichung

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (1)$$

mit Potential q auf $[0, 1]$ und Spektralparameter $\lambda \in \mathbb{C}$.

Zunächst werden in Theorem 6 die *Gradienten* dieser Fundamentallösungen bezüglich des Potentials q untersucht. Insbesondere wird eine explizite Formel für diese Ableitungen hergeleitet. Zudem wird deutlich, dass die Ableitung nach dem Spektralparameter λ genau mit der Richtungsableitung mit Richtung -1 nach q zusammenfällt.

Theorem 7 behandelt zunächst die lineare Unabhängigkeit von Kompositionen von y_1 und y_2 . Diese lineare Unabhängigkeit ist ein wichtiges Hilfsmittel. Außerdem wird ein Operator L eingeführt, der von Bedeutung für die Korteweg-de Vries-Gleichung ist, und ein Zusammenhang zwischen dem Operator und der Ableitung zweier Lösungen der Gleichung (1) herstellt.

Die folgenden Ausführungen setzen Kenntnisse aus Analysis I und II sowie aus Linearer Algebra I voraus, ebenso grundlegende Kenntnisse über den Hilbertraum $L^2_{\mathbb{C}}([0, 1])$

Alle verwendeten Begriffe aus dem Originalpaper werden zunächst definiert oder erläutert.

Es werden die exakten Formulierungen von Theorem 6 und Theorem 7 aus dem Originaltext gegeben und ausführliche Beweise aufgezeigt.

2 Grundlagen und Definitionen

Bevor wir uns den Theoremen zuwenden, werden einige wichtige Definitionen und bekannte Resultate zusammengefasst, die im Folgenden benutzt werden:

Definition 1 (Wronski-Identität). Der *Wronskian* zweier differenzierbarer Funktionen f und g ist die Funktion

$$[f, g] = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g.$$

Wronski-Identität:

$$[y_1, y_2] = 1.$$

Das heißt,

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}).$$

Definition 2 (Theorem 2). Für $f \in L^2_{\mathbb{C}}$ und $a, b \in \mathbb{C}$ mit $y(0) = a$, $y'(0) = b$ hat

$$-y'' + q(x)y = \lambda y - f(x)$$

Eine eindeutige Lösung ist gegeben durch:

$$y(x) = ay_1(x) + by_2(x) + \int_0^x (y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)) f(t) dt$$

Erinnerung: Ableitung zwischen Banachräumen

Die Ableitung zwischen zwei Banachräumen ist eine beschränkte lineare Funktion. $d_x f$ ist als ein linearer Operator (zwischen 2 Vektorräumen) definiert. Wenn die Definitionsmenge nun ein Hilbertraum wie hier $L^2_{\mathbb{C}}([0, 1])$ und der Zielraum die $\mathbb{C}$ sind, dann ist der Riesz-Darstellungssatz anwendbar. Dieser besagt, dass jedes Element des Dualraums auf einem Hilbertraum wieder unter dem Skalarprodukt mit einem Element des Hilbertraums im Hilbertraum liegt. Das bedeutet, es existiert ein eindeutiger Gradient df/dx , mit

$$d_x f(v) = \langle v, \overline{\frac{df}{dx}} \rangle$$

Der Gradient ist also das Element im Hilbertraum $L^2_{\mathbb{C}}([0, 1])$, das für alle Elemente $v \in L^2_{\mathbb{C}}([0, 1])$ die Ableitung über das innere Produkt darstellt.

Erinnerung:

Bereits vorher wurde in dem zugrunde liegenden Originalpaper gezeigt, dass für stetige q gilt, dass y_i 2-mal stetig differenzierbar in x ist. Außerdem wurde gezeigt, dass y_1 und y_2 analytisch, also unendlich oft stetig differenzierbar in q , sind. Um diese Ableitungen in q geht es in Theorem 6.

3 Theorem 6

Für $i = 1, 2$ gilt:

a) (i)

$$\frac{dy_i}{dq(t)}(x) = y_i(t) \cdot [y_1(t) \cdot y_2(x) - y_1(x) \cdot y_2(t)] \mathbf{1}_{[0,x]}(t)$$

(ii)

$$\frac{dy'_i}{dq(t)}(x) = y_i(t) \cdot [y_1(t) \cdot y'_2(x) - y'_1(x) \cdot y_2(t)] \mathbf{1}_{[0,x]}(t)$$

Die Ableitungen sind **gemeinsam stetig** in x, λ, q .

b) (i)

$$\frac{dy_i}{d\lambda} = - \int_0^x \frac{dy_i}{dq(t)} dt$$

(ii)

$$\frac{dy'_i}{d\lambda} = - \int_0^x \frac{dy'_i}{dq(t)} dt$$

Proof. Theorem 6a) i)

Ableitung von

$$-y''_i + q(x) \cdot y_i = \lambda y_i$$

nach q in Richtung $v \in L^2_{\mathbb{C}}$.

$$\frac{d}{d\varepsilon} [-y''_i(q + \varepsilon v) + (q + \varepsilon v) \cdot y_i(q + \varepsilon v)] = \frac{d}{d\varepsilon} [\lambda y_i(q + \varepsilon v)]$$

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} [-y''_i(q + \varepsilon v) + (q + \varepsilon v) \cdot y_i(q + \varepsilon v)] = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} [\lambda y_i(q + \varepsilon v)]$$

$$-\frac{d}{dq} y''_i(v) + v(x) \cdot y_i + q(x) \frac{d}{dq} y_i(v) = \lambda \frac{d}{dq} y_i(v) \quad | -v(x) \cdot y_i$$

$$-\frac{d}{dq} \left(\frac{d}{dx} \right)^2 y_i(v) + q(x) \frac{d}{dq} y_i(v) = \lambda \frac{d}{dq} y_i(v) - v(x) y_i$$

$$-\left(\frac{d}{dx} \right)^2 \frac{d}{dq} y_i(v) + q(x) \frac{d}{dq} y_i(v) = \lambda \frac{d}{dq} y_i(v) - v(x) y_i$$

Diese Gleichung ist jetzt von der Form wie in Theorem 2 für $\frac{d}{dq} y_i(v)$, da $v(x) y_i \in L^2_{\mathbb{C}}([0, 1])$. Die Anfangswerte a, b fallen jeweils weg, da sie unabhängig von q sind, also unter der Ableitung gleich 0.

$$\frac{d}{dq} y_i(v) = \int_0^x (y_1(t) \cdot y_2(x) - y_1(x) \cdot y_2(t)) \cdot v(t) \cdot y_i(t) dt$$

$$\frac{d}{dq} y_i(v) = \int_0^x [(y_1(t) \cdot y_2(x) - y_1(x) \cdot y_2(t)) \cdot y_i(t)] \cdot \mathbf{1}_{[0,x]}(t) \cdot v(t)$$

$$= \langle v(t) , y_i(t)(y_1(t) \cdot y_2(x) - y_1(x) \cdot y_2(t)) \cdot \mathbf{1}_{[0,x]}(t) \rangle$$

$$= \langle v , \overline{\frac{dy_i(x)}{dq(t)}} \rangle$$

Damit man Ableitungen vertauschen darf, muss der Satz von Schwartz in unendlich dimensionalen Räumen anwendbar sein. Dafür muss gelten, dass y_i sowohl in q als auch in x 2-mal stetig differenzierbar ist. y_i ist, wie eingangs erwähnt, analytisch in q , also unendlich oft stetig differenzierbar in q . Daher bleibt zu zeigen, dass y_i in x 2-mal stetig differenzierbar ist.

Angenommen q ist stetig, so gilt wie eingangs bereits erwähnt, dass y_i in x 2-mal stetig differenzierbar ist. Also gilt für stetige q die Darstellung,

$$\frac{d}{dq} y_i(v) = \int_0^x y_i(t) \cdot (y_1(t) \cdot y_2(x) - y_1(x) \cdot y_2(t)) \cdot v(t) dt$$

Offensichtlich sind beide Seiten der Gleichung stetige Funktionen über $q \in L_{\mathbb{C}}^2([0, 1])$. Die stetigen Funktionen über q bilden eine dichte Teilmenge des Hilbertraums $L_{\mathbb{C}}^2$. Es reicht nun die Gültigkeit auf einer dichten Teilmenge von $L_{\mathbb{C}}^2$ zu zeigen und anschließend kann die Aussage durch stetige Fortsetzung auf den gesamten Hilbertraum fortgesetzt werden. Also gilt, dass für alle $q \in L_{\mathbb{C}}^2([0,1])$ die Reihenfolge der Ableitungen nach q und nach x vertauscht werden dürfen. Also gilt das Ergebnis:

$$\frac{dy_i}{dq}(x) = y_i(t) \cdot [y_1(t) \cdot y_2(x) - y_1(x) \cdot y_2(t)] \cdot \mathbf{1}_{[0,x]}(t)$$

Dass gerade die Aussage von Theorem 6a) i) ist. □

Proof. Theorem 6a) ii)

Ableiten nach x von $\frac{d}{dq}y_i(v)$

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{d}{dx}y_i(v)\right) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x [y_1(t) \cdot y_2(x) - y_1(x) \cdot y_2(t)] \cdot v(t) \cdot y_i(t) dt\right)$$

Mit dem selben Argument wie in i) darf die Ableitung nach x mit der Ableitung nach q vertauscht werden. Setzt man nun

$$f(y(x, t)) = [y_1(t) \cdot y_2(x) - y_1(x) \cdot y_2(t)] \cdot v(t) \cdot y_i(t)$$

für das gilt:

$$f(y(x, x)) = \underbrace{[y_1(x) \cdot y_2(x) - y_1(x) \cdot y_2(x)]}_{=0} \cdot v(x) \cdot y_i(x) = 0$$

erhält man mit dem Hauptsatz der Integration:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(d_q y_i(v)) &= \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(y(x, t)) dt\right) = f(y(x, x)) + \int_0^x \frac{d}{dx}f(y(x, t)) dt \\ &= 0 + \int_0^x y_i(t) \cdot v(t) \frac{d}{dx}(y_1(t) \cdot y_2(x) - y_1(x) \cdot y_2(t)) dt \\ &= \int_0^x y_i(t) \cdot v(t) (y_1(t) \cdot y_2'(x) - y_1'(x) \cdot y_2(t)) dt \\ &= \left\langle v, \overline{\frac{dy_i'}{dq(t)}} \right\rangle \end{aligned}$$

Der Schluss zum Skalarprodukt beim letzten Gleichheitszeichen begründet sich analog zu i).

□

Proof. $y_i(x, \lambda + \varepsilon, q)$ erfüllt nach Konstruktion

$$-y_i''(x) + q(x) \cdot y_i(x) = (\lambda + \varepsilon) \cdot y_i(x)$$

Umformung gibt:

$$-y_i''(x) + q(x) \cdot y_i(x) = \lambda \cdot y_i(x) + \varepsilon \cdot y_i(x)$$

$$-y_i''(x) + q \cdot y_i(x) - \varepsilon \cdot y_i(x) = \lambda \cdot y_i(x)$$

$$-y_i''(x) + (q(x) + \varepsilon) \cdot y_i(x) = \lambda \cdot y_i(x)$$

Diese Gleichung wird wiederum von $y_i(x, \lambda, q + \varepsilon)$ erfüllt. Daraus folgt, dass:

$$y_i(x, \lambda + \varepsilon, q) = y_i(x, \lambda, q - \varepsilon)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} y_i(x, \lambda + \varepsilon, q) = \frac{d}{d\varepsilon} y_i(x, \lambda, q - \varepsilon)$$

$\varepsilon = 0$ setzen gibt, da auf der linken Seite eine Änderung in ε einer Änderung in λ entspricht:

$$\frac{d}{d\lambda} y_i(x, \lambda, q) = \frac{d}{d\varepsilon} y_i(x, \lambda, q - \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}$$

Hier entspricht nun auf der rechten Seite eine Änderung in ε genau einer umgekehrten Änderung in q . Der Ausdruck entspricht also der Richtungsableitung nach q mit Richtungsvektor $v = (-1)$. Mit Teil a) des Theorems folgt:

$$\frac{d}{d\varepsilon} y_i(x, \lambda, q - \varepsilon) = \int_0^x \frac{dy_i}{dq(t)} \cdot (-1) dt$$

Also folgt:

$$y_i(x, \lambda, q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} y_i(x, \lambda, q - \varepsilon) = - \int_0^1 \frac{dy_i}{dq(t)} dt$$

□

4 Theorem 7

a) Für jedes $(\lambda, q) \in \mathbb{C} \times L^2$ sind die Funktionen

$$y_1^2, \quad y_1 y_2, \quad y_2^2$$

linear unabhängig über $[0, 1]$.

b) Sei $q \in C^2[0, 1]$, dann gilt

$$L = q(x) \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} q(x) - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} \right)^2.$$

Falls f, g zwei Lösungen der Gleichung (1) für das gleiche λ sind, dann gilt:

$$L(fg) = 2\lambda \frac{d}{dx}(fg).$$

Proof. In Definition 1 wurde die Wronskian-Identität und die Bildung des Wronskian wiederholt. Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, reicht es zu zeigen, dass der Wronskian von $y_1^2, y_1 y_2, y_2^2$ ungleich 0 ist.

$$\begin{aligned} [y_1^2, y_1 y_2, y_2^2] &= \\ & \begin{vmatrix} q_a^2 & q_a q_2 & q_2^2 \\ (q_a^2)' & (q_a q_2)' & (q_2^2)' \\ (q_a^2)'' & (q_a q_2)'' & (q_2^2)'' \end{vmatrix} = \\ & \begin{vmatrix} y_1^2 & y_1 y_2 & y_2^2 \\ 2 y_1 y_1' & y_1 y_2' + y_1' y_2 & 2 y_2 y_2' \\ 2((y_1')^2 + y_1 y_1'') & y_1 y_2'' + 2 y_1' y_2' + y_1'' y_2 & 2((y_2')^2 + y_2 y_2'') \end{vmatrix} \end{aligned}$$

rechnet man nun $2(q - \lambda)$ mal die erste Zeile, erhält man:

1.

$$\begin{aligned} 2 \cdot (q - \lambda) \cdot y_i^2 &= \\ 2 y_i \cdot (q \cdot y_i - \lambda \cdot y_i) &= \\ 2 y_i \cdot (q \cdot y_i - (-y_i'' + q \cdot y_i)) &= \\ 2 y_i \cdot (q \cdot y_i - q \cdot y_i + y_i'') &= \\ 2 y_i y_i'' & \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
& 2 \cdot (q - \lambda) \cdot y_1 y_2 = \\
& y_1 \cdot (q \cdot y_2 - \lambda \cdot y_2) + y_2 \cdot (q \cdot y_1 - \lambda \cdot y_1) = \\
& y_1 \cdot (q \cdot y_2 - (-y_2'' + q \cdot y_2)) + y_2 \cdot (q \cdot y_1 - (-y_1'' + q \cdot y_1)) = \\
& y_1 \cdot (q \cdot y_2 + y_2'' - q \cdot y_2) + y_2 \cdot (q \cdot y_1 + y_1'' - q \cdot y_1) = \\
& y_1 \cdot y_2'' + y_2 \cdot y_1''
\end{aligned}$$

Zieht man nun $2(q - \lambda)$ mal die erste von der letzten Zeile ab erhält man:

$$\begin{vmatrix}
y_1^2 & y_1 y_2 & y_2^2 \\
2 y_1 y_1' & y_1 y_2' + y_1' y_2 & 2 y_2 y_2' \\
2(y_1')^2 & 2 y_1' y_2' & 2(y_2')^2
\end{vmatrix}$$

Entwickeln der Matrix nach der ersten Zeile zur Bestimmung der Determinante gibt:

$$\begin{aligned}
& y_1^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 y_1' y_2' & 2 y_1 y_2' \\ 2(y_1')^2 & 2(y_1')^2 \end{vmatrix} - y_1 y_2 \cdot \begin{vmatrix} 2 y_1' y_2' & 2 y_1 y_2' \\ 2(y_1')^2 & 2(y_1')^2 \end{vmatrix} + y_2^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 y_1' y_2' & y_1' y_2' \\ y_1 & y_2' \end{vmatrix} = \\
& y_1^2 \cdot [(y_1' y_2 + y_1 y_2') \cdot 2(y_2')^2 - 4 y_1' y_2 (y_2')^2] - y_1 y_2 \cdot [4 y_1 y_1' (y_2')^2 - 4 y_1 (y_1')^2 y_2] \\
& \quad + y_2^2 \cdot [4 y_1 (y_1')^2 y_2 - (y_1' y_2 + y_1 y_2') \cdot 2(y_1')^2] = \\
& y_1^2 \cdot (2 y_1 (y_2')^3 - 2 y_1' y_2 (y_2')^2) - y_1 y_2 (4 y_1 y_1' (y_2')^2 - 4 (y_1')^2 y_2 (y_2')^2) \\
& \quad + y_2^2 (2 y_1 (y_1')^2 y_2' - 2 (y_1')^3 y_2) = \\
& 2 y_1^3 y_2^3 - 2 y_1^2 y_1' y_2 (y_2')^2 - 4 y_1^2 y_1' y_2 (y_2')^2 + 4 y_1 (y_1')^2 y_2^2 y_2' + 2 y_1^2 y_1' y_2^2 y_2' - 2 y_1^3 y_2^3 = \\
& \quad 2 y_1^3 y_2^3 - 6 y_1^2 y_1' y_2^2 + 6 y_1 (y_1')^2 y_2 - 2 y_1^3 y_2 = \\
& \quad 2 \cdot (y_1 y_2' - y_1' y_2) = 2
\end{aligned}$$

Da $(y_1 y_2' - y_1' y_2) = 1$ gilt wegen der Wronskian-Identität.

Da nun $2 \neq 0$ gilt, folgt die Lineare Unabhängigkeit von $y_1^2, y_1 y_2, y_2^2$ $\square$

Proof. Die Lösung $L(\text{fg})$, für den in Theorem 7b) eingeführten Operator L , lässt sich durch direkte Rechnung überprüfen.

Seien dazu $f(x, \lambda, q)$ und $g(x, \lambda, q)$ zwei Lösung der zugrunde liegenden Differentialgleichung für das selbe $\lambda \in \mathbb{C}$.

Da $q \in C_{\mathbb{C}}^1[0, 1]$ gilt, dass q stetig ist und eine eindeutige Ableitung q' existiert.

Sei außerdem $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ Dann gilt:

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ F''(x) &= f''(x) \cdot g(x) + 2f'(x) \cdot g'(x) + f(x) \cdot g''(x) \\ F'''(x) &= f'''(x) \cdot g(x) + 3f''(x) \cdot g'(x) + 3f'(x) \cdot g''(x) + f(x) \cdot g'''(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(fg)(x) &= L(F(x)) = q(x) \frac{d}{dx} F(x) + \frac{d}{dx} [F(x) \cdot q(x)] - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} F(x) \right)^3 \\ &= 2 \cdot q(x) \cdot F'(x) + F(x) \cdot q'(x) - \frac{1}{2} F'''(x) \\ &= 2q(x) \cdot F'(x) + q'(x) \cdot F(x) \\ &\quad - \frac{1}{2} [f'''(x) \cdot g(x) + 3f''(x) \cdot g'(x) + 3f'(x) \cdot g''(x) + f(x) \cdot g'''(x)] \end{aligned}$$

Da f und g beides Lösungen der Differentialgleichung sind gilt:

$$f''(x) = (q(x) - \lambda) \cdot f(x)$$

Ableiten nach x :

$$\begin{aligned} f'''(x) &= (q(x) - 2) \cdot f'(x) + q'(x) \cdot f(x) \\ f'''(x) \cdot g(x) &= (q(x) - 2) f'(x) \cdot g(x) + q'(x) \cdot f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

Analog gilt:

$$g'''(x) \cdot f(x) = (q(x) - 2) g'(x) \cdot f(x) + q'(x) \cdot g(x) \cdot f(x)$$

Zusammen folgt:

$$\begin{aligned} f'''(x)g(x) + g'''(x)f(x) &= (q(x) - \lambda)[f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] + 2q(x)f(x)g(x) \\ &= (q(x) - 2) \cdot F'(x) + 2q(x) \cdot F(x) \end{aligned}$$

$f'''(x)g(x) + f(x)g'''(x)$ in die Gleichung einsetzen gibt:

$$\begin{aligned} L(fg)(x) &= 2q(x) \cdot F'(x) + q'(x) \cdot F(x) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[(q(x) - \lambda) \cdot F'(x) + 2q'(x)F(x) + 3f''(x)g'(x) + 3f'(x)g''(x) \right] \\ &= 2q(x) \cdot F'(x); + q'(x) \cdot F(x) - q'(x) \cdot F(x) \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{2} \left[(q(x) - \lambda) \cdot F'(x) + 3f''(x)g'(x) + 3f'(x)g''(x) \right]$$

Ersetzt man nun $f''(x)$ und $g''(x)$ durch die Differentialgleichung erhält man:

$$\begin{aligned} &= 2q(x) \cdot F'(x) - \frac{1}{2} \left[(q(x) - \lambda) \cdot F'(x) + 3(q(x) - \lambda) \cdot (f(x)g'(x)) + 3(q(x) - \lambda) \cdot (f'(x)g(x)) \right] \\ &= 2q(x) \cdot F'(x) - \frac{1}{2} \left[(q(x) - \lambda) \cdot F'(x) + 3(q(x) - \lambda) \cdot [f(x)g'(x) + f'(x)g(x)] \right] \\ &= 2q(x) \cdot F'(x) - \frac{1}{2} \left[(q(x) - \lambda) \cdot F'(x) + 3(q(x) - \lambda) \cdot F'(x) \right] \\ &= 2q(x) \cdot F'(x) - 2q(x) \cdot F'(x) + 2\lambda F'(x) \\ &= 2\lambda \frac{d}{dx}(fg)(x) \end{aligned}$$

□