Dynamische Systeme und Stabilität
1. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie, Noah Schepp 17. Februar 2025

---

1. Zeitdiskrete dynamische Systeme

Ein *zeitdiskretes dynamisches System* ist eine stetige Abbildung

$$\Phi : \mathbb{N}_0 \times M \to M,$$

wobei M ein metrischer Raum ist (hier typischerweise der $\mathbb{R}^n$), und für deren Familie von Abbildungen

$$\Phi_t : M \to M,\ \Phi_t(m) := \Phi(t, m)\ \ (t \in \mathbb{N}_0)$$

gilt, dass

$$\Phi_0 = \mathbb{1} \text{ und } \Phi_{t_1+t_2} = \Phi_{t_2} \circ \Phi_{t_1}\ \ (t_1, t_2 \in \mathbb{N}_0).$$

(a) Sei $A : M \to M$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : \mathbb{N}_0 \times M \to M$

$$\Phi(t, m) := A^t(m)$$

ein zeitdiskretes dynamisches System definiert. $A^t(m)$ bedeutet die t-fachen Anwendung von A auf m, z.B. $A^2(m) = A(A(m))$, und per Konvention ist $A^0(m) = m$. *(2 Punkte)*

(b) Sei $\Phi : \mathbb{N}_0 \times M \to M$ ein zeitdiskretes dynamisches System. Beweisen sie durch Induktion, dass $\Phi_t(m) = A^t(m)$, wobei $A(m) = \Phi_1(m) = \Phi(1, m)$. *(2 Punkte)*

Bemerkung. *Deshalb haben alle zeitdiskreten dynamischen Systeme die Form von (a).*

(c) Was ist die Definition von *Orbit*? *(1 Punkt)*

(d) Betrachten Sie die Fibonacci-Folge, definiert durch

$$a_0 := 0,\ a_1 := 1 \text{ und } a_{n+1} := a_n + a_{n-1},\ n \geq 1.$$

Wir können die als eine zeitdiskrete dynamische System beschreiben. Seien $M = \mathbb{R}^2$ und $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \text{und } m_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A(m_0)$, $A^2(m_0)$, $A^3(m_0)$ und $A^4(m_0)$. Was ist der Zusammenhang mit der Fibonacci-Folge? Warum muss M 2-dimensional sein? *(5 Punkte)*

(e) Geben Sie eine *explizite* Formel für den Zustand des Systems von **(d)** zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ an *(3 Punkte)*

[Tipp: Diagonalisieren Sie die lineare Abbildung A, um ihre Potenz zu berechnen.]

(f) Sei $l \in \mathbb{N}_0$ und $f : \mathbb{R}^{l+1} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine rekursiv definierte Folge, für die gilt:

$$a_0, \dots, a_l \text{ sind vorgegeben und } a_{n+1} := f(a_{n-l}, \dots, a_n) \text{ für } n \geq l.$$

Zeigen Sie, dass sich obige Rekursion als ein zeitdiskretes dynamisches System darstellen lässt. *(2 Punkte)*

2. Periodische Orbits.

Sei $\alpha \in [0,1)$ gegeben. Definieren wir das zeitdiskrete dynamische System $\Phi : \mathbb{Z} \times S^1 \to S^1$ durch

$$(n,z) \mapsto \Phi(n,z) := e^{2\pi i \alpha n} z.$$

Hierbei wird der Phasenraum $M := S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ mit den komplexen Zahlen vom Betrag 1 identifiziert.

(a) Was bedeutet *periodisch*? *(1 Punkt)*

(b) Zeigen Sie für $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$, dass jeder Orbit periodisch ist. *(2 Punkte)*

(c) Nehmen wir an, dass es $z_0 \in S^1$ mit periodischem Orbit gibt. Zeigen Sie, dass $\alpha \in \mathbb{Q}$. *(2 Punkte)*