Topologische Konjugation und strukturelle Stabilität in differenzierbaren Dynamischen Systemen

Christian Andrés Dávila

Mai 2023

Contents

1 Einführung **3**

2 Topologische Konjugation **4**

3 Strukturelle Stabilität **11**

4 Quellen **14**

1 Einführung

Um das Konzept der topologischen Konjugation zu verstehen und ihre wichtigsten Eigenschaften zu untersuchen, ist es notwendig, einige grundlegende Definitionen aus der Theorie der dynamischen Systeme einzuführen.

Definition 1.1. (Homöomoprhismus)
Eine bijektive und steige Funktion zwischen topologischen Räumen mit einer stetigen Umkehrabbildung heißt Homöomorphismus.

Definition 1.2. (Dynamisches System)
Sei X ein kompakter metrischer Raum und $f: X \to X$ ein Homöomorphismus. Die Familie von Iterationen $\{f^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ heißt Dynamisches System.

Definition 1.3. (Orbit)
Für $x \in X$ heißt die Menge $\{f^n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ der Orbit von x unter f. Man schreibt $Orb(x, f)$ oder einfach $Orb(x)$.

Definition 1.4. (periodische Punkt)
Ein Punkt $x \in X$ heißt periodisch, falls es ein $n \leq 1$ existiert, sodass $f^n(x) = x$. Man bezeichnet die Menge aller periodischen Punkte von f mit $P(f)$.

Für $n = 1$ sind periodische Punkte Fixpunkte und die die Menge aller Fixpunkte von f wird mit $Fix(f)$ bezeichnet.

Definition 1.5. ($\omega - limit$)
Ein Punkt $y \in X$ heißt $\omega - limit$ von $x \in X$, falls es eine Teilfolge $n_i \to +\infty$, für $i \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $f^{n_i}(x) \to y$.
Die Menge aller $\omega - limit$ Punkte wird mit $\omega(x)$ bezeichnet.

Analog defniniert man das $\alpha - limit$. Ein Punkt $y \in X$ heißt $\alpha - limit$ von $x \in X$, falls es eine Teilfolge $n_i \to +\infty$, für $i \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $f^{-n_i}(x) \to y$. Die Menge aller $\alpha - limit$ Punkte wird mit $\alpha(x)$ bezeichnet.

Definition 1.6. (nichtwandernde Punkt)
Ein Punkt $x \in X$ heißt nichtwandernd unter f, falls für alle Umgebungen V von x in X ein $n \geq 1$ existiert, sodass $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$.
Die Menge aller nichtwandernden Punkte wird mit $\Omega(f)$ bezeichnet.

Definition 1.7. ($\epsilon - Kette$)
Eine $\epsilon - Kette$ von x zu y ist eine endliche Folge $x_0, x_1, ..., x_k$ mit $x_0 = x$ und $x_k = y$, sodass

$$d(f(x_n), x_{n+1}) < \epsilon, \qquad \text{für } n = 0, 1, ..., k-1$$

Definition 1.8. (chain-recurrence)
Ein Punkt $x \in X$ heißt chain-recurrent von f, falls für alle $\epsilon > 0$ eine $\epsilon - Kette$

von x zu x existiert.
Die Menge der chain-recurrent Punkte wird mit $CR(f)$ bezeichnet.

2 Topologische Konjugation

Deinition 2.1. (Topologische Konjugation)
Zwei Homöomorphismen $f\colon X \to X$ und $g\colon X \to X$ heißen topologisch zueinander konjugiert, falls es ein Homöomorphismus $h\colon X \to X$ existiert, sodass gilt

$$h \circ f = g \circ h$$

Dann heißt h Topologische Konjugation von f zu g.

Intuitiv entspricht eine topologische Konjugation einer stetigen Änderung der Koordinaten.

Lemma 2.2.
Für zwei topologisch konjugierte Homöomorphismen f und g gilt insbesondere $h \circ f^n = g^n \circ h$, für $n \in \mathbb{N}$

Proof. Wir zeigen die Behaptung mit Induktion. Seien dazu f und g zwei topologisch konjugierte Homöomorphismen auf X und $x \in X$ beliebig.

Induktionsanfang: Nach Annhame existiert ein Homöomorphismus $h\colon X \to X$, sodass $h(f(x)) = g(h(x))$. Also gilt die Behauptung für $n = 1$.

Induktionsvoraussetzung: Die Behuptung gilt für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt:

$$h(f^{n+1}(x)) = h(f^n(f(x))) \overset{\text{I.V.}}{=} g^n(h(f(x))) \overset{\text{I.A.}}{=} g^n(g(h(x))) = g^{n+1}(h(x))$$

Somit folgt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Lemma 2.3.
Topologische Konjugationen sind unter dem Orbit und der Menge der periodiche Punkte erhaltend, das heißt

$$h(Orb(x, f) = Orb(h(x), g) \tag{1}$$
$$h(P(f)) = P(g) \tag{2}$$

Im vorherigen Vortrag wurde gezeigt::

$h(\omega(x, f)) = \omega(h(x), g)$ $\qquad$ $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$ $\qquad$ $h(CR(f)) = CR(g)$

Proof. Wir zeigen nun (1) und (2) für $n = 1$, also für Fixpunkte. Sei dazu f topologisch konjugiert zu g und h die topologische Konjugation.

Zur (1)
" $\subset$ " Sei $f^n(x) \in Orb(x, f)$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$h \circ f^n(x) = h(f^n(x)) \overset{\text{Ann.}+2.2}{=} g^n(h(x)) \in Orb(h(x), g)$$

Also ist $h(Orb(x, f) \subset Orb(h(x), g)$.

" $\supset$ " Sei nun $g^n(h(x)) \in Orb(h(x), g)$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$g^n(h(x)) \overset{\text{Ann.}+2.2}{=} h(f^n(x)) = h \circ f^n(x) \in h(Orb(x, f))$$

Also ist $h(Orb(x, f) \supset Orb(h(x), g)$ und somit folgt die Behauptung.

Zur (2). Wir zeigen die Gleichheit für Fixpunkte. Sie folgt danach für Periodische Punkte mit Induktion.

" $\subset$ " Sei $x \in Fix(f)$, also gilt $f(x) = x$ und

$g(h(x)) \overset{\text{Ann.}}{=} h(f(x)) = h(x) \implies h(x)$ ist ein Fixpunkt von g, also $h(Fix(f)) \subset Fix(g)$

" $\supset$ " Sei $x \in Fix(g)$, also $g(x) = x$ und mit $(h \circ f)(x) = (g \circ h)(x)$ folgt

$f(h^{-1}(x)) = (f \circ h^{-1})(x) = (h^{-1} \circ g \circ h \circ h^{-1})(x) = (h^{-1} \circ g)(x) = h^{-1}(g(x)) = h^{-1}(x)$

Also ist $h^{-1}(x) \in Fix(x) \implies Fix(g) \subset h(Fix(f))$

$\square$

Lemma 2.4.
Topologisch konjugiert zu sein, definiert eine Äquivalenzrelation auf dem Raum aller Homöomorphismen.

Proof. Seien f, g und t Homöomorphismen auf X. Wir definieren folgende Äquivalenzrelation

$$f \sim g :\iff f \text{ topologisch konjugiert zu } g$$

Dann gilt:

(i) Reflexivität:
Definiere $h\colon X \to X$ mit $h(x) = x$. Dann gilt $h(f(x)) = f(x) = f(h(x))$. Also ist f zu sich selbst topologisch konjuiert, also $f \sim f$.

(ii) Symmetrie:
Sei f topologisch konjugiert zu g (d.h. $f \sim g$). Dann gilt für ein $h\colon X \to X$ $h \circ f = g \circ h$ und nach Anwendung von h^{-1} auf beiden Seiten folgt $f = h^{-1} \circ g \circ h$. Also folgt

$$f \circ h^{-1} = h^{-1} \circ g \circ h \circ h^{-1} = h^{-1} \circ g$$

Also $g \sim f$.

(iii) Transitivität:
Sei $f \sim g$ und $g \sim t$, also existieren Homöomorphismen $h_1\colon X \to X$ mit $h_1(f(x)) = g(h_1(x))$ und $h_2\colon X \to X$ mit $h_2(g(x)) = t(h_2(x))$. Definiere

$$h\colon X \to X, \quad h(x) = h_2(h_1(x)).$$

Dann gilt

$$h(f(x)) = h_2(h_1(f(x))) \overset{\text{f}\sim\text{g}}{=} h_2(g(h_1(x))) \overset{\text{g}\sim\text{t}}{=} t(h_2(h_1(x))) = t(h(x))$$

Somit ist f topologisch konjugiert zu t, also $f \sim t$.

Nach *(i), (ii)* und *(iii)* wird eine Äquivalenzrelation definiert.

□

Bemerkung 2.5.
Es wäre ideal alle Homöomorphismen anhand ihre topologische Konjugtion einzuornen. Dafür ist die gezeigte Äquivalenzrelation sehr hilfreich, jede Klasse hat Funktionen, die aus toplogische Sichtweise eine ähnliche Dynamik haben. Eine solche Einordnung ist aber leider nicht immer realistisch, jedoch ist sie für den Spezialfall $X = [a, b]$ einfach.

Lemma 2.6.
Sei $X = [a, b]$ ein kompakter metrischer Raum, dann ist jeder Homöomoprhismus $f\colon [a, b] \to [a, b]$ als bijektive Abbildung entweder streng monoton wachsend mit $f(a) = a$ und $f(b) = b$ oder streng monoton fallend mit $f(a) = b$ und $f(b) = a$.

Proof. Als stetige Abbildung von $[a, b]$ nach $[a, b]$ ist f genau dann injektiv, wenn sie streng monoton ist. Also muss sie entweder streng monoton wachsen oder fallen.

□

Definition 2.7. (oreintierungserhaltender bzw. umkehrender Homöomoprhismus)
Ein streng monoton wachsender (bzw. fallender) Homöomoprhismus $f\colon [a, b] \to [a, b]$ heißt orientierungserhaltend (bzw. orientierungsumkehrend).

Lemma 2.8.

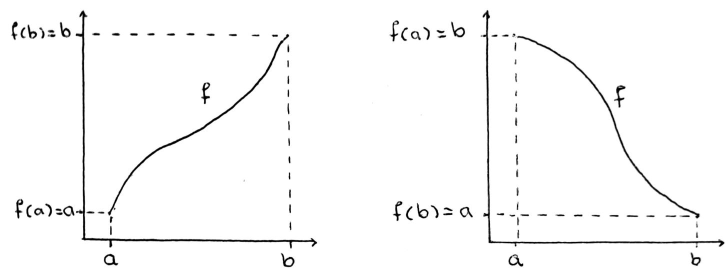

Figure 1: oreintierungserhaltender bzw. umkehrender Homöomoprhismus

Ein orientierungserhaltender Homöomoprhismus kann nicht zu einem orientierungsumkehrenden Homöomoprhismus topologisch konjugiert sein.

Proof. Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ orientierungserhaltnd und $g\colon [a,b] \to [a,b]$ orientierungsumkehrend. Angenommen es existiert ein Homöomoprhismus $h\colon [a,b] \to [a,b]$, sodass $(h \circ f)(x) = (g \circ h)(x)$ gilt.

Dann würde für $x = a$ gelten:

$$h \circ f(a) = g \circ h(a)$$

und für $x = b$:

$$h \circ f(b) = g \circ h(b)$$

Wir wissen aus Lemma 2.6, dass h entweder orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend sein muss. Wir betrachten nun beide Fälle.

Fall 1: Sei h orientierungserhaltend, also gilt $h(a) = a$ und $h(b) = b$.

$$\implies h \circ f(a) = h(f(a)) = h(a) = a \neq b = g(a) = g(h(a)) = g \circ h(a)$$

Fall 2: Sei h orientierungsumkehrend, also gilt $h(a) = b$ und $h(b) = a$.

$$\implies h \circ f(a) = h(f(a)) = h(a) = b \neq a = g(b) = g(h(a)) = g \circ h(a)$$

Das widerspricht unsere Voraussetzung $(h \circ f)(x) = (g \circ h)(x)$, also war unsere Annahme falsch und somit sind f und g nicht zu einander topologisch konjugiert. $\square$

Das folende Lemma zeigt, dass Intervall Homomöorphismen die einfachste bzw. schwächste Wiederkehrung haben.

Lemma 2.9. Für alle orientierungserhaltenden Homomöorphismen $f\colon [a,b] \to [a,b]$ gilt:

$$CR(f) = Fix(f)$$

Proof. Sei $x = x_0, x_1, ..., x_k = x$ eine ϵ-Kette von x nach x, dann gilt:

$$d(f(x_n), x_{n+1}) = |f(x_n) - x_{n+1}| < \epsilon$$

Wir nehmen an, dass x nun kein Fixpunkt von f ist, sei also o.B.d.A $f(x) > x$ und $\epsilon = \frac{|f(x)-x|}{2} > 0$, dann gilt:

$$|f(x) - x_1| < \frac{|f(x) - x|}{2} \implies x_1 > x$$

Da f streng monoton wachsend ist, folgt

$$\underbrace{f(x_1) - x_2}_{> f(x) - x_2} < \frac{|f(x) - x|}{2} \implies x_2 > x$$

Induktiv folgt: $x_n > \frac{f(x)-x}{2}$ und

$$f(x_n) - x_{n+1} < \frac{|f(x) - x|}{2} \implies x_{n+1} > \frac{x}{2}$$

Also muss x ein Fixpunkt von f sein.

□

Theorem 2.10. Zwei oreintierungserhaltende Homomöorphismen auf $[a,b]$ ohne Fixpunkte in (a,b) sind topologisch konjugiert.

Dann liegt er entweder komplett unter oder -überhalb der Diagonale.

Proof. Seien f und g orientierungserhaltende Homomöorphismen auf $[a,b]$ ohne Fixpunkte auf (a,b). Wir nehmen an, es gilt $f(x) > x$ und $g(x) > x$ für alle $x \in (a,b)$. Der Beweis funktioniert analog für die anderen Fälle.

Sei $p \in (a,b)$ beliebig aber fest und definiere das Homomöorphismus

$$h_0\colon [p, f(p)] \to [p, g(p)]$$

$$\text{s.d } \ h_0(p) = p \ \text{ und } \ h_0(f(p)) = g(p).$$

Eine solche Homomöorphismus ist beispielsweise die Funktion

$$h_0(x) = p\frac{f(p) - g(p)}{f(p) - p} + x\frac{g(p) - p}{f(p) - p}$$

Weiterhin definieren wir die Abbildung

$$h_n\colon [f^n(p), f^{n+1}(p)] \to [g^n(p), g^{n+1}(p)]$$

$$h_n = g^n \circ h_0 \circ f^{-n}$$

Als Verkettung von Homomöorphismen ist h_n ein Homomöorphismus und da f und g nach Voraussetzung streng monoton wachsend sind, ist h_n auch streng monoton wachsend. Es gilt

$$h_n(f^n(p)) = g^n(h_0(f^{-n}(f^n(p)))) = g^n(h_0(p)) = g^n(p)$$
$$h_n(f^{n+1}(p)) = g^n(h_0(f^{-n}(f^{n+1}(p)))) = g^n(h_0(f(p))) = g^n(g(p)) = g^{n+1}(p)$$

Für $x \in [f^n(p), f^{n+1}(p)]$ bildet $f^{-n}(x)$ auf $[p, f(p)]$ ab, was dem Definitionsbereich von h_0 entspricht. Dann bildet h_0 auf $[p, g(p)]$ ab, was gleich dem Definitionsbereich von g^n ist und dann auf $[g^n(p), g^{n+1}(p)]$ abbildet. Also ist unsere Funktion wohldefiniert.

Wir zeigen nun, dass die Zusammensetzung alle h_n eine Abbildung der Form $h\colon [a, b] \to [a, b]$ ergibt.

Wir betrachten also den Definitionsbereich $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [f^n(p), f^{n+1}(p)] \subset (a, b)$. Mit der Annhame $x < f(x)$ für alle $x \in (a, b)$ folgt

$$f^n(p) < f^{n+1}(p), \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Da $f^n(p)$ monoton wachsend und nach oben und unten beschränkt ist, muss sie für alle $p \in (a, b)$ konvergieren. Sei also $q = \lim_{n\to\infty} f^n(p)$, dann gilt

$$f(q) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(p)) \overset{\text{f stetig}}{=} \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(p) = q$$

Dann ist der Grenzwert q ein Fixpunkt von f. Also muss gelten $q = a$ oder $q = b$ und wegen der Annahme $x < f(x)$ ist $\lim_{n\to\infty} f^n(p) = b$.
Analog folgt mit $f(x) > x \iff x > f^{-1}(x)$, $\lim_{n\to\infty} f^{-n}(p) = a$ für $p \in (a, b)$.

Mit der gezeigte Konvergenz wissen wir, dass für alle $p \in (a, b)$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $p < f^{N+1}(p)$ gilt und analog, sodass $p > f^{-N-1}(p)$. Also folgt $(a, b) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [f^n(p), f^{n+1}(p)]$ und somit

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [f^n(p), f^{n+1}(p)] = (a, b)$$

Es lassen sich die gleichen Aussagen für g zeigen und zusammen mit $h(b) := b$ und $h(a) := a$ ergibt sich die erwünschte Funktion. Für alle $x \in (a, b)$ gibt es mindestens ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $x \in [f^n(p), f^{n+1}(p)]$ ist. Wenn $x = f^{m+1}(p)$ ist, dann gilt das für $n = m$ und $n = m+1$. In beiden Fällen gilt nach den folgenden Definition $h(f^{m+1}(p)) = g^{m+1}(p)$, sodass die folgende Abbildung wohldefiniert ist.

$$h\colon [a,b] \to [a,b]$$

$$h(x) = \begin{cases} a & , x = a \\ h_n(x) & , x \in [f^n(p), f^{n+1}(p)] \\ b & , x = b \end{cases}$$

Nun zeigen wir, dass h ein Homöomorphismus ist.

Stetigkeit:
Für $x \in (a,b)$ stimmen die linkseitigen und rechtseitigen Grenzwerte überein und als Verkettung von stetigen Funktionen ist h wieder stetig. Es bleibt die Stetigkeit an den Stellen $x = a$ und $x = b$ zu untersuchen.

Sei x_n eine Folge Folge in $[a,b]$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Wir wollen nun zeigen, dass $h(x_n)$ gegen $h(a) = a$ konvergiert. Sei o.B.d.A. $x_n \in (a,b)$ und weiterhin $m_n \in \mathbb{Z}$, sodass $x_n \in [f^{-m_n}(p), f^{-(m_n+1)}(p)]$, dann gilt wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = a$,

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \infty$$

Dann gilt auch

$$h(x_n) \in [g^{-m_n}(p), g^{-(m_n+1)}(p)]$$

und wieder wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ folgt $\lim_{n\to\infty} h(x_n) = a$. Also ist h auf $[a,b]$ stetig.

Bijektivität:
Erstmal stellen wir fest, dass h streng monoton auf alle Intervalle ist, da h_n auch streng monoton wachsend ist. Dann folgt mit der Stetigkeit, dass h injektiv ist.

Es gilt dazu noch $h(a) = a$ und $h(b) = b$. Dann folgt mit dem Zwischenwertsatz die Surjektivität von h.

Also ist h bijektiv. Als stetige und bijektive Abbildung auf einem Kompaktem Intervall ist die Umkehrabbildung h^{-1} auch stetig und somit ist h ein Homöomorphismus.

Nun zeigen wir, dass h die Eigenschaft $h \circ f = g \circ h$ erfüllt. Sei $x \in [a,b]$, dann gilt

Fall 1 Sei $x = a$: $h \circ f(a) = h(f(a)) = h(a) = a = g = g(h(a)) = g \circ h(a)$

Fall 2 Sei $x = b$: $h \circ f(b) = h(f(b)) = h(b) = b = g = g(h(b)) = g \circ h(b)$

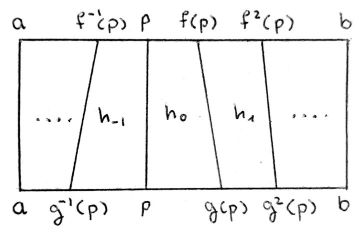

Figure 2: Konstruktion der topologische Konjugation h

Fall 3 Sei $x \in (a, b)$: dann existiert ein $n \in \mathbb{Z}$, sodass $x \in [f^{n-1}, f^n]$ und $f(x) \in [f^n, f^{n+1}]$. Damit folgt

$$h(f(x)) = h_n(f(x)) = g^n(h_0(f^{-n}(f(x)))) = g^n(h_0(f^{-n+1}(x)))$$
$$= g(g^{n-1}(h_0(f^{-n+1}(x)))) = g(h_{n-1}(x)) = g(h(x))$$

Damit haben wir gezeigt, dass eine Topologische Konjugation h für f und g existiert. Die anderen Fälle werden analog bewiesen.

□

3 Strukturelle Stabilität

Definition 3.1. (Diffeomorphismus)
Eine Funktion f heißt Diffeomorphismus, falls f stetig differenzierbar und bijektiv ist und ihre Umkehrabbildung f^{-1} auch stetig differenzierbar ist.

f heißt C^r-Diffeomorphismus, falls noch dazu f und f^{-1} r-mal differenzierbar sind. Beachte, dass Diffeomorphismen insbesondere Homomöorphismen sind. Wir bezeichnen die Menge alle C^r-Diffeomorphismen von X mit $\text{Diff}^r(X)$

Definition 3.2. (C^r-strukturelle Stabilität)
Ein Diffeomorphismus $f \in \text{Diff}^r(X)$ heißt C^r-strukturell stabil für ein $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, falls eine C^r Umgebung U von f in $\text{Diff}^r(X)$ existiert, sodass alle C^r-Diffeomorphismen $g \in U$ topologisch konjugiert zu f sind.

In anderen Worten, bleibt die topologische Struktur der Orbit eine C^r-strukturell stabile Funktion unverändert unter kleinen Störungen (perturbations).

Folgendes Lemma zeigt, dass die C^1-strukturelle Stabilität die stärkste strukturelle Stabilität ist. Die C^0-strukturelle Stabilität wird nicht als Stabilität betrachtet.

Lemma 3.3.
Ist f C^r-strukturell stabil und ein C^{r+1}-Diffeomrphismus, so ist sie C^{r+1}-strukturell stabil.

Proof. Sei f ein C^{r+1}-Diffeomorphismus, insbesondere ist dann f ein C^r-Diffeomorphismus. Sei weiterhin f C^r-strukturell stabil, also existiert es eine C^r Umgebung U von f in $\mathrm{Diff}^r(X)$, sodass alle $g \in U$ topologisch konjugiert zu f sind.

Dann ist U auch eine C^{r+1} Umgebung von f, sodass f C^{r+1}-strukturell stabil ist.

□

Theorem 3.4.
Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus ohne Fixpunkte in (a,b). Dann ist f genau dann C^r-strukturell stabil, wenn $f'(a) \neq 1$ und $f'(b) \neq 1$.

Proof. " $\Longrightarrow$ "
Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus ohne Fixpunkte in (a,b) und $f'(a), f'(b) \neq 1$. Es reicht zu zeigen, dass f C^1-strukturell stabil ist und nach Lemma 3.3 folgt die C^r-strukturelle Stabilität.

Sei o.B.d.A $f(x) > x$ für $x \in (a,b)$, also muss gelten $f'(a) > 1$ und $f'(b) < 1$. Dann existieren $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, sodass $f'(a) - 1 > 2\epsilon_1$ und $1 - f'(b) > 2\epsilon_2$. Aufgrund der Stetikgeit von f existeieren δ-Umgebungen, $\delta > 0$.

$$U = B_\delta(a) \cap [a,b] \qquad \text{und} \qquad V = B_\delta(b) \cap [a,b],$$

sodass $f'(x) - 1 > \epsilon_1$ für alle $x \in U$ und $1 - f'(x) > \epsilon_2$ für alle $x \in V$ gilt.

Sei $g \in C^1-$Umgebung ein Diffeomorphimsus, also existiert ein $\epsilon_3 = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\} > 0$, sodass

$$\|f - g\|_\infty + \|f' - g'\|_\infty < \epsilon_3,$$

Da f keine Fixpunkte auf $[a,b] - U - V$ hat und es kompakt ist, nimmt $|f(x) - x|$ ein positives Minimum auf $[a,b] - U - V$, d.h. $\min_{x \in [a,b]-U-V}\{f(x) - x\} > 0$. Sei also $0 < \epsilon_4 = \min\{f(x) - x\}$. Dann gilt:

$$g(x) - x = \underbrace{g(x) - f(x)}_{> -\epsilon_2} + \underbrace{f(x) - x}_{> \epsilon_3} > 0$$

Also ist g auf U orientierungserhaltend mit einzigen Fixpunkt a. Analog folgt, dass g auf V orientierungserhaltend ist mit einzigen Fixpunkt b.

Sei $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4\}$. Dann hat g keine Fixpunkte auf $[a,b] - U - V$. Nach Satz 2.10 sind f und g topologisch konjugiert und somit ist f strukturell stabil.

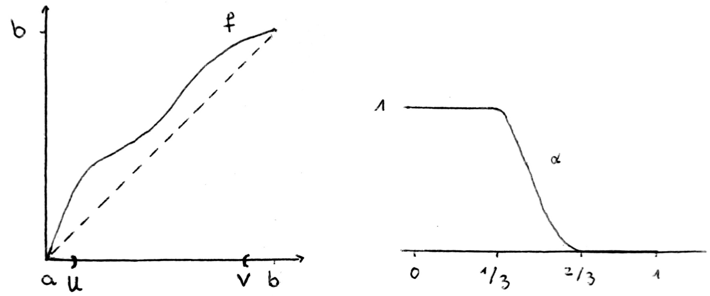

Figure 3: Umgebungen U und V, Funktion α

" $\Longleftarrow$ "
Angenommen $f'(a) = 1$ oder $f'(b) = 1$. Für alle $r \geq 1$ wollen wir eine belibieg kleine C^r Störung g von f konstruieren, sodass g mehr als zwei Fixpunkte hat. Dann wäre g nach Lemma 2.3 nicht zu f topologisch konjugiert und somit f nicht C^r-strukturell Stabil.

Wir zeigen den Satz für $[a, b] = [0, 1]$. Sei also f orientierungserhaltend ohne Fixpunkte in $(0, 1)$ mit $f'(0) = 1$. Wir definieren eine monotone glatte funktion

$$\alpha\colon [0,1] \to [0,1]$$

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [0, 1/3] \\ 0 & , x \in [2/3, 1] \end{cases}$$

und für ein beliebiges $\epsilon > 0$ die funktion

$$g(x) = f(x) - \epsilon\alpha(x)x$$

Sei weiterhin o.B.d.A. $f(x) > x$ für alle $x \in [0, 1]$ (analog für $f(x) < x$) Dann gilt

$$g(0) = f(0) - \epsilon\alpha(0)0 = f(0) = 0$$
$$g(1) = f(1) - \epsilon \underbrace{\alpha(1)}_{=0} 1 = f(1) = 0$$

Da f oritentierungserhaltend ist. Also sind 0 und 1 Fixpunkte von g und für $x \in [2/3, 1]$ gilt noch

$$g(x) = f(x) - \epsilon \underbrace{\alpha(x)}_{=0} x = f(x) \overset{Ann.}{>} x \tag{3}$$

Mit der Produktregel gilt

$$g'(x) = f'(x) - \epsilon(\alpha'(x)x + \alpha(x))$$

also

$$g'(0) = f'(0) - \epsilon(\alpha'(0)0 + \alpha(0)) = f'(0) - \epsilon \overset{Ann.}{=} 1 - \epsilon$$

Dann existiert ein $\delta > 0$, sodass $g(x) < x$ für alle $x \in B_\delta(0) \cap [0, 1]$ gilt.
Also existiert ein $x \in [0, 1/3]$, sodass $g(x) < x$. Wegen (3) muss g mindestens noch einen Fixpunkt in (a, b) haben und kann somit nicht topologisch konjugiert zu f sein, da g und f die gleiche Anzahl an Fixpunkte haben müssen, um topologisch konjugiert zu sein.

$\square$

4 Quellen

1. Wen, L.: Differentiable Dynamical Systems: an introduction to structural stability and hyperbolicity

2. Chen, B. L.: Analysis I/II HWS 2021/ FSS 2022