

### 13. Übung

#### 38. Ein Kriterium für Instabilität nach Lyapunov

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen mit  $0 \in D$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  lokal Lipschitz-stetig mit  $f(0) = 0$ . Wir betrachten das autonome System

$$\dot{y}(t) = f(y(t)). \quad (1)$$

Sei  $L : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare *Lyapunov-Funktion* zum System (1), d.h. es gilt

$$\nabla L(y) \cdot f(y) \leq 0 \quad \text{für alle } y \in D.$$

Beweisen Sie folgendes Kriterium für Instabilität: Falls  $L$  zusätzlich

$$L(0) = 0, \quad \nabla L(0) \cdot f(0) = 0 \quad \text{und} \quad \nabla L(y) \cdot f(y) < 0 \quad \text{für alle } y \in D \setminus \{0\} \quad (2)$$

erfüllt und es in jeder Umgebung von  $0 \in D$  einen Punkt gibt, in dem  $L$  einen negativen Wert annimmt, dann ist die Ruhelage  $y^* \equiv 0$  von (1) instabil. (7 Punkte)

[Tipp: Nehmen Sie an,  $y^*$  wäre stabil und führen Sie einen Widerspruchsbeweis: Zeigen Sie dazu, dass für geeignete Anfangswerte  $y(0) = y_0$  die positiven Halborbis der zugehörigen Lösung  $t \mapsto y(t)$  in einer in  $D$  kompakten Menge enthalten sind, und  $L(y(t)) \rightarrow -\infty$  für  $t \rightarrow \infty$  gilt.]

#### 39. Stabilitätsuntersuchung nach Lyapunov

Gegeben sei das autonome System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x^3 \\ \dot{y} &= x + y^3 \end{aligned}$$

mit gesuchter Lösungsfunktion  $t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ . Zeigen Sie durch Konstruktion einer geeigneten Lyapunov-Funktion, dass der Nullpunkt  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  eine instabile Ruhelage obigen Systems ist. (3 Punkte)

#### 40. Erste Integrale

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  lokal Lipschitz-stetig. Wir betrachten das autonome System

$$\dot{y}(t) = f(y(t)). \quad (3)$$

Eine stetig differenzierbare Funktion  $H : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *erstes Integral* zum System (3), wenn

$$\nabla H(y) \cdot f(y) = 0 \quad \text{für alle } y \in D.$$

Erste Integrale sind also insbesondere Lyapunov-Funktionen.

- (a) Sei  $H : D \rightarrow \mathbb{R}$  ein erstes Integral zu (3). Zeigen Sie, dass  $H$  längs jeder Trajektorie des durch (3) definierten dynamischen Systems konstant ist, d.h.  $H(\Phi(t; y_0)) = H(y_0)$  für alle  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  und alle  $t$  aus dem jeweiligen maximalen Existenzintervall. Mit  $t \mapsto \Phi(t; y_0)$  bezeichnen wir jeweils die Lösung von (3) zum Anfangswert  $y(0) = y_0$ . (1 Punkt)

*Bitte wenden.*

(b) Für den Rest der Aufgabe betrachten wir das autonome System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= 2x - 4x^3\end{aligned}\tag{4}$$

mit gesuchter Lösungsfunktion  $t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ . Bestimmen Sie ein Polynom  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , das  $\frac{\partial H}{\partial x} = 4x^3 - 2x^2$  und  $\frac{\partial H}{\partial y} = y$  erfüllt und zeigen Sie dass diese Funktion ein erstes Integral ist.] (2 Punkte)

(c) Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems (4) und untersuchen Sie sie auf Stabilität (stabil, instabil, asymptotisch stabil). (5 Punkte)

(d) Zeigen Sie, dass alle Niveaumengen von  $H$  kompakt sind und folgern Sie daraus, dass alle Lösungen von (4) auf ganz  $\mathbb{R}$  existieren. (5 Punkte)

(e) Sei  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  so, dass in der Niveaumenge  $N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = H(x_0, y_0)\}$  keine Ruhelagen von (4) enthalten sind. Zeigen Sie: Für alle  $(x, y) \in N$  gibt es eine offene Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^2$  von  $(x, y)$  und ein  $\epsilon > 0$ , so dass

$$U \cap N = \{\Phi(t, (x, y)) : t \in (-\epsilon, \epsilon)\}$$

gilt; mit  $t \mapsto \Phi(t, (x, y))$  bezeichnen wir wie in Teil (a) die Lösung von (4) zum Anfangswert  $(x, y)$ . (6 Zusatzpunkte)

(f) Seien  $(x_0, y_0)$  und  $N$  wie in Teil (e). Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (d), dass für alle  $(x, y) \in N$  die Limesmenge  $\omega^+(x, y)$  nicht leer ist, und dann mit Teil (e), dass der Orbit zu  $t \mapsto \Phi(t, (x, y))$  periodisch ist. (3 Punkte)

(g) Sei  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  beliebig und  $N$  wie in (e) mit dem Zusatz, dass  $N$  nun auch Ruhelagen von (4) enthalten darf. Begründen Sie kurz, dass für  $N$  je einer der folgenden 4 Fälle in Abhängigkeit von  $(x_0, y_0)$  auftritt und charakterisieren Sie diese 4 Fälle durch die Werte von  $H(x_0, y_0)$  (z.B. "Fall 1  $\Leftrightarrow H(x_0, y_0) > 0$ " usw.):

- Fall 1:  $N$  besteht aus einem periodischen Orbit (und ist insbesondere zusammenhängend).
- Fall 2:  $N$  besteht aus zwei periodischen Orbits.
- Fall 3:  $N$  besteht aus drei Orbits, wovon einer eine Ruhelage ist.
- Fall 4:  $N$  besteht aus zwei Ruhelagen.

Skizzieren Sie nun mit dieser Kenntnis und dem Wissen aus den vorherigen Aufgabenteilen das Phasenportrait zum System (4). (5 Zusatzpunkte)

**Abgabe bis spätestens Freitag, den 26. Mai 2023, 10:00h, im beschrifteten Briefkasten**