

## 12. Übung

### 34. Das Mathematische Pendel.

Gegeben sei die Schwingungsgleichung des *Mathematischen Pendels mit Reibung*

$$\ddot{x} + \dot{x} + g \cdot \sin(x) = 0 \tag{1}$$

mit  $g > 1$  und gesuchter Funktion  $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ . (Bemerkung am Rande: die physikalische Bedeutung der Konstanten  $g$  ist die Fallbeschleunigung.)

(a) Transformieren Sie das System (1) auf ein System 1. Ordnung der Form

$$\dot{y} = f(y) \tag{2}$$

mit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Zeigen Sie, dass zu jedem Anfangswert  $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^2$  eine (globale) Lösung  $t \mapsto y(t)$  von (2) auf dem Intervall  $[0, \infty)$  existiert. (3 Punkte)

(b) Bestimmen Sie alle Ruhelagen von (2) und untersuchen Sie diese auf Stabilität (stabil, instabil, asymptotisch stabil). (6 Punkte)

### 35. Stabilitätsuntersuchungen.

Gegeben sei das autonome System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + x^2 + y^2, \\ \dot{y} &= bx - y + xy. \end{aligned}$$

mit  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \leq 0$  und gesuchter Funktion  $t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ .

(a) Zeigen Sie, dass im Fall  $a < 0$  der Nullpunkt eine asymptotisch stabile Ruhelage ist. (5 Punkte)

(b) Man beweise oder widerlege, dass die Behauptung in (a) auch im Fall  $a = 0$  gilt. (4 Punkte)

### 36. Die Lorenz-Gleichungen.

Seien  $\sigma, r$  und  $b$  positive Konstanten. Die *Lorenz-Gleichungen* lauten

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned}$$

mit gesuchter Funktion  $t \mapsto (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ . Zeigen Sie:

Für  $0 < r < 1$  ist der Nullpunkt obigen Systems eine asymptotisch stabile Ruhelage und

für  $r > 1$  ist der Nullpunkt eine instabile Ruhelage. (8 Punkte)

*Bitte wenden.*

### 37. Nichtlineare dynamische Systeme.

(a) Bestimmen Sie den Fluss zu dem nichtlinearen System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y + x^2\end{aligned}$$

mit gesuchter Funktion  $t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ , indem Sie dieses Differentialgleichungssystem lösen. (4 Zusatzpunkte)

(b) Definiere nun die Abbildung

$$\begin{aligned}h : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left(x, y + \frac{x^2}{3}\right).\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung  $h$  eine topologische Flussäquivalenz zwischen dem nichtlinearen System aus (a) und dem linearen  $\mathbb{R}^2$ -wertigen System  $\dot{z} = Az$  liefert. Hierbei ist die Matrix  $A$  definiert durch  $A := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . (4 Zusatzpunkte)

**Abgabe bis spätestens Freitag, den 19. Mai 2023, 10:00h, in dem beschrifteten Briefkasten**