

## Dynamische Systeme

### 11. Übung

#### 31. Topologische Flussäquivalenz

Wir betrachten die linearen  $\mathbb{R}^2$ -wertigen autonomen Systeme  $\dot{x} = Ax$  und  $\dot{y} = -\mathbf{1} \cdot y$ , wobei ersteres durch

$$A := -\alpha \cdot \mathbf{1} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

für  $\alpha > 0$  gegeben sei.

- (a) Geben Sie explizit eine Abbildung  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  an, so dass die beiden Systeme  $\dot{x} = Ax$  und  $\dot{y} = -\mathbf{1}y$  topologisch flussäquivalent sind, d.h.

$$h(e^{tA}x) = e^{-t}h(x) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2.$$

Betrachten Sie dazu ein  $h(x)$  von der Form  $h(x) = x|x|^\gamma$  mit einem zu bestimmenden  $\gamma$  in Abhängigkeit von  $\alpha$  (mit  $|\cdot|$  ist hier die euklidische Norm gemeint). (3 Punkte)

- (b) Zeigen Sie, dass die in (a) gefundene Funktion  $h$  tatsächlich ein Homöomorphismus ist, indem Sie die Umkehrabbildung  $h^{-1}$  von  $h$  explizit bestimmen. Zum Nachweis der Stetigkeit von  $h$  bzw.  $h^{-1}$  genügt der Nachweis der Stetigkeit jeweils bei Null. Für alle von Null verschiedenen Werte darf die Stetigkeit als offensichtlich angenommen werden. (6 Punkte)  
 [Tipp: Für das Finden von  $h^{-1}$  mache man ebenfalls den Ansatz  $h^{-1}(x) = x|x|^\delta$  mit einem zu bestimmenden  $\delta$  in Abhängigkeit von  $\gamma$ .]

- (c) In diesem Teil wollen wir eine Alternative zur Bestimmung der Funktion  $h$  aus Teil (a) angeben: Bestimmen Sie die Funktion  $h$  aus Teil (a) mit Hilfe von Lemma 2.13 und Lemma 2.14 aus der Vorlesung.

[Tipp: Für die Norm  $\|\cdot\|_A$  in Lemma 2.13 dürfen Sie die euklidische Norm verwenden. Bestimmen Sie zunächst die Umkehrabbildung von  $\hat{\Phi}$  aus Lemma 2.13 und berechnen Sie dann explizit die Abbildung  $\Psi$  aus dem Beweis von Lemma 2.14.] (6 Punkte)

#### 32. Transformation autonomer Systeme

Gegeben sei das autonome System

$$y'(t) = f(y(t)) \tag{1}$$

mit einer auf einer offenen Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  definierten lokal Lipschitz-stetigen Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sei ferner  $t \mapsto \tilde{y}(t)$  eine auf dem Intervall  $[0, \infty)$  existierende fixierte Lösung von (1). Wir betrachten das durch  $\tilde{y}$  "translatierte" System

$$x'(t) = f(x(t) + \tilde{y}(t)) - f(\tilde{y}(t)). \tag{2}$$

Zeigen Sie:

- (a) Die transformierte nicht-autonome Differentialgleichung (2) besitzt die triviale Lösung  $\tilde{x} \equiv 0$ . (1 Punkt)

- (b) Die triviale Lösung  $\tilde{x}$  von (2) ist genau dann (asymptotisch) stabil, wenn die Lösung  $\tilde{y}$  von (1) (asymptotisch) stabil ist. [Beachten Sie die Definition aus Aufgabe 27, welche sich völlig analog auf nicht-autonome Systeme übertragen lässt.] (5 Punkte)

### 33. Phillips Modell mit Beschleuniger

Wir betrachten ein dynamisches System mit stetiger Zeit, in dem wir die Beziehung zwischen dem Produkt  $Y$  und der (induzierten) Investition  $I$  beschreiben durch

$$I'(t) = -k(I(t) - vY'(t)), \quad k, v > 0$$

Die Entwicklungsgeschwindigkeit des Produkts  $Y$  sei proportional zu der Differenz zwischen der Produktmenge und der Nachfrage  $Z$ :

$$Y'(t) = -\lambda(Y(t) - Z(t)), \quad \lambda > 0$$

Die Nachfrage  $Z(t)$  bestehe aus drei Komponenten: Konsum  $C(t)$ , autonome Investition  $A$  (von  $t$  unabhängig) und induzierte Investition  $I(t)$ , es ist also  $Z(t) = C(t) + A + I(t)$ . Zusätzlich soll der Konsum ein fester Anteil des Produktes sein,  $C(t) = cY(t)$ ,  $0 < c < 1$ . Dieses Modell bezeichnet man als Phillips Modell mit Beschleuniger.

- (a) Leiten Sie eine Differentialgleichung für  $Y''(t)$  her. (Die rechte Seite darf keine Terme mehr enthalten, die von  $I(t)$  abhängen, kombinieren Sie dazu die obigen Gleichungen.) (4 Punkte)
- (b) Berechnen Sie die Ruhelage dieses dynamischen Systems, indem Sie die Differentialgleichung aus (a) zunächst in ein System 1. Ordnung transformieren. (3 Punkte)
- (c) Zeigen Sie, dass die Ruhelage aus (b) genau dann asymptotisch stabil ist, wenn die Parameter  $\lambda, k, v, c$  die Bedingung  $\lambda(1 - c) + k - \lambda kv > 0$  erfüllen. [Tipp: Aufgabe 28(b)] (6 Punkte)

Die Zulassungsgrenze für den Kurs liegt bei 175, nicht bei den fälschlicherweise genannten 201 Punkten.

Abgabe bis spätestens Freitag, den 12. Mai 2023, 10:00h, im beschrifteten Briefkasten