

Dynamische Systeme

10. Übung

28. Stabilitätsuntersuchung von Ruhelagen

Untersuchen Sie, ob der Nullpunkt der folgenden linearen Systeme stabil, asymptotisch stabil oder instabil ist und skizzieren Sie die Phasenportraits (indem Sie zuvor die Differentialgleichungen allgemein lösen). Charakterisieren Sie ferner den Typ der Ruhelage 0 (Quelle, Senke, Sattel, Knoten, Spirale usw.)

$$(a) \quad y' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y, \quad (b) \quad y' = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} y$$

[Tipp zur schnellen Lösung der Differentialgleichungen: Aufgabe 24]

(6+6 Punkte)

29. Flüsse einer Differentialgleichung 2. Ordnung

Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - \alpha x = 0 \tag{1}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und gesuchter Lösungsfunktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Transformieren Sie die Gleichung (1) zunächst auf ein System erster Ordnung der Form

$$\dot{y} = f(y) \tag{2}$$

mit einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Charakterisieren Sie die Ruhelage $y \equiv 0$ (Spirale, Quelle, Senke, Knoten, Sattel usw.) in Abhängigkeit von α und skizzieren Sie das Phasenportrait für den Fall $\alpha = 0$, indem Sie wie in Aufgabe 26 für den Fall $\alpha = 0$ die Differentialgleichung (2) allgemein lösen.

(5 Punkte)

Bitte wenden.

30. Stabilität aufgrund negativen Realteils

Die Aussage, dass 0 eine Senke ist, wenn alle Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ negativen Realteil haben, gilt nur für von t unabhängige A . Wir betrachten hierzu die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ mit

$$A(t) := \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2} \sin(t) \cos(t) \\ -1 - \frac{3}{2} \sin(t) \cos(t) & -1 + \frac{3}{2} \sin^2(t) \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von $A(t)$ und zeigen Sie, dass diese negativen Realteil haben. *(4 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass eine Lösung der Differentialgleichung gegeben ist durch

$$x(t) = e^{t/2} \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

(3 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass die Ruhelage $x \equiv 0$ des Systems $\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t)$ nicht attraktiv ist.

(2 Punkte)

Abgabe bis spätestens Freitag, den 6. Mai 2023, 10:00h, in den beschrifteten Briefkästen.