Martin Schmidt
Nicolas A. Hasse
Valeriia Zhidkova

24. März 2023

Dynamische Systeme

7. Übung

18. Lineare Unabhängigkeit von Lösungen linearer Differentialgleichungen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $y_1, \ldots, y_m : I \to \mathbb{R}^n$ seien Lösungen der homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung $y' = A \cdot y$. Zeigen Sie, dass wenn für ein $x_0 \in I$ die Vektoren $y_1(x_0), \ldots, y_m(x_0) \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig sind, dass dann die Lösungen $y_1, \ldots, y_m : I \to \mathbb{R}^n$ ebenfalls linear abhängig sind.

[Tipp: Existenz und Eindeutigkeit linearer Anfangswertprobleme] *(5 Punkte)*

19. Lineare Differentialgleichungen

Finden Sie die Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des inhomogenen linearen Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = t \cdot u(t) + t, \quad u(1) = 1\ .$$

(5 Punkte)

20. Eine exakte Differentialgleichung

Zeigen Sie, dass die folgende Differentialgleichung exakt ist,

$$(\cos(t + u^2) + 3u) + (2u\cos(t + u^2) + 3t)\dot{u} = 0;$$

und lösen Sie die Differentialgleichung, indem sie eine implizite Lösungsformel zu dem Anfangswert $u(0) = 0$ angeben. *(7 Punkte)*

21. Die Exponentialabbildung für Matrizen

Gegenstand dieser Aufgabe ist die *Exponentialabbildung* (für Matrizen), das heißt die Potenzreihe

$$e^A := \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}\, A^k \quad \text{für Matrizen } A \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

die wir etwa bei der Lösung von linearen Differentialgleichungssystemen mit konstanten Koeffizienten benötigen werden. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(a) *Basiswechsel.* Ist $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, so gilt $\exp(CAC^{-1}) = C \cdot \exp(A) \cdot C^{-1}$. *(2 Punkte)*

(b) *Diagonalmatrizen.* Ist $A = \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_n)$ mit $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ eine Diagonalmatrix, so gilt $\exp(A) = \mathrm{diag}(e^{c_1}, \ldots, e^{c_n})$. *(2 Punkte)*

Bitte wenden.

(c) *Nilpotente Matrizen.* Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine nilpotente Matrix in Normalform. Man berechne $\exp(t \cdot A)$ für $t \in \mathbb{R}$. Hierbei darf ohne Begründung verwendet werden, dass A^l die Matrix ist, die auf der l-ten oberen Nebendiagonalen Einsen und sonst nur Nullen als Einträge hat. *(3 Punkte)*

(d) *Jordan-Blöcke.* Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ein Jordan-Block zum Eigenwert λ. Berechnen Sie $\exp(t \cdot A)$ für $t \in \mathbb{R}$.

[Tipp: Aufgabe 21 (ii),(iii), es darf weiter verwendet werden, dass für kommutierende Matrizen A, B $\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$ gilt.]

(3 Punkte)

Abgabe bis spätestens Freitag, den 31. März 2023, 10:00h, in den beschrifteten Briefkästen.

Es wird über die Osterferien ein Übungsblatt zur freiwilligen Bearbeitung geben. Dieses wird 30 Zusatzpunkte geben. Die Zulassungsgrenzen sehen wie folgt aus: 97 Punkte für den 4 ECTS Kurs, 123 Punkte für den 5 ECTS Kurs und 201 für den 8 ECTS Kurs.