Martin Schmidt
Nicolas A. Hasse
Valeriia Shidkova

17. März 2023

Dynamische Systeme

6. Übung

15. Diverse Differentialgleichungen.

Finden Sie die (allgemeinen bzw. ggf. eindeutigen) Lösungen der folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme:

(a) $y'(x) = (x + y(x))^2$ *(5 Punkte)*

(b) $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x} - \dfrac{x^2}{y(x)^2}$ mit $y(1) = 1$ *(5 Punkte)*

16. Exakte Differentialgleichungen.

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$3x^2 + 4y(x) + 4(x - 2y(x)) \cdot y'(x) = 0$$

exakt ist und bestimmen Sie eine Lösung y der Differentialgleichung zum Anfangswert $y(2) = 3$. Ist diese Lösung eindeutig auf einer Umgebung von $x_0 := 2$? *(6+1 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$(x^2 \, e^{y(x)} + 1) \cdot y'(x) + 2x \, e^{y(x)} - 1 = 0$$

exakt ist und finden Sie eine Stammfunktion. Die Lösungsfunktion $x \mapsto y(x)$ mit $y(1) = 0$ ist nicht explizit angebbar. Bestimmen Sie jedoch ihre Umkehrfunktion $y \mapsto x(y)$.

(6 Punkte)

17. Eulersche Multiplikatoren.

(a) Es seien $g, h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen in den Variablen t und u. Zeigen Sie: Hängt $\alpha := (\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial h}{\partial t})/h$ allein von t ab (nicht aber von u), so ist $M(t) := \exp(\int_{t_0}^{t} \alpha(s) ds)$ (mit geeignetem $t_0 \in \mathbb{R}$) ein Eulerscher Multiplikator für die Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) \cdot h(t, u(t)) + g(t, u(t)) = 0.$$

(3 Punkte)

[Es darf ignoriert werden, dass α an eventuellen Nullstellen von h nicht definiert ist.]

(b) Finden Sie für die Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) \cdot 2t \, u(t) + 4t^2 + 2u^2(t) + 3t = 0$$

einen Eulerschen Multiplikator sowie eine Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die die Lösungen $u(t)$ der Differentialgleichung implizit durch $F(t, u(t)) \equiv const.$ charakterisiert. *(5 Punkte)*

Abgabe bis spätestens Freitag, den 24.03.2023, in den beschrifteten Briefkästen