

Dynamische Systeme

3. Übung

6. Lipschitz-Stetigkeit.

Es sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(t, y) \mapsto f(t, y)$ eine stetige und bezüglich y stetig differenzierbare Abbildung derart, dass $(t, y) \mapsto \frac{\partial f(t, y)}{\partial y}$ stetig ist. Zeigen Sie:

- (a) Die Funktion f ist lokal Lipschitz-stetig auf D bzgl. y , d.h. in jedem Punkt $(t_0, y_0) \in D$ gibt es eine Umgebung $U \subseteq D$ von (t_0, y_0) und eine Konstante $L = L(t_0, y_0) > 0$ mit

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\| \quad \text{für alle } (t, y_1), (t, y_2) \in U.$$

(3 Punkte)

- (b) Auf jeder kompakten Menge $K \subseteq D$ ist f global Lipschitz-stetig bzgl. y , d.h. es existiert eine Konstante $L > 0$ (unabhängig von speziellen Punkten $(t, y) \in K$) mit

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\| \quad \text{für alle } (t, y_1), (t, y_2) \in K.$$

(3 Punkte)

7. Die Fredholmsche Integralgleichung.

Sei $X := C([a, b])$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, der mittels Norm

$$\|f\|_\infty := \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$$

bekanntlich zu einem Banach-Raum wird. Seien $u \in C([a, b])$ und $k \in C([a, b] \times [a, b])$ gegebene stetige Funktionen und

$$M := \max_{t, s \in [a, b]} |k(t, s)|.$$

Zeigen Sie, dass die sog. *Fredholmsche Integralgleichung*

$$x(t) = \mu \int_a^b k(t, s)x(s)ds + u(t), \quad t \in [a, b]$$

dann für jeden Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ mit

$$|\mu| < \frac{1}{M(b-a)}$$

genau eine Lösung $x \in C([a, b])$ besitzt.

[Tipp: Banachscher Fixpunktsatz mit $F(x) := u + \mu \int_a^b k(\cdot, s)x(s)ds$, $x \in X$.]

(7 Punkte)

Bitte wenden.

8. Ein Anfangswertproblem.

- (a) Geben Sie eine Abbildung $F : C(I, \mathbb{R}) \rightarrow C(I, \mathbb{R})$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall) an, deren Fixpunkt Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = u(t) + t, \quad u(0) = 0 \quad (\star)$$

ist und bestimmen Sie das Intervall $I \subset \mathbb{R}$ so, dass die Abbildung $F : C(I, \mathbb{R}) \rightarrow C(I, \mathbb{R})$ nach dem Banachschen Fixpunktsatz genau einen Fixpunkt hat. [Tipp: Für das Finden von F wende man den Tipp von Aufgabe 7 auf die hiesige Situation an.] *(4 Punkte)*

- (b) Geben Sie explizit eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(I, \mathbb{R})$ an, die gegen den Fixpunkt von F konvergiert, ohne die explizite Lösung von (\star) zu kennen.

[Tipp: Iteration aus Banachschem Fixpunktsatz. Man wähle einen geeigneten Startwert.]

(4 Punkte)

- (c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge aus Aufgabenteil (b) und untersuchen Sie, für welche Teilmenge von \mathbb{R} die Folge konvergiert. Löst der Grenzwert dieser Folge tatsächlich das Anfangswertproblem (\star) ? *(5 Punkte)*

Abgabe bis spätestens Freitag, den 03. März. 2023, 10:00h, in den beschrifteten Briefkästen.