

Dynamische Systeme

2. Übung

3. Periodische Orbits.

Sei $\Phi : \mathbf{Z} \times S^1 \rightarrow S^1$ das zeitdiskrete dynamische System, das durch

$$(n, z) \mapsto \Phi(n, z) := e^{2\pi i \alpha n} z, \quad \text{mit } \alpha \in [0, 1)$$

gegeben ist. Hierbei wird der Phasenraum $M := S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ mit den komplexen Zahlen vom Betrag 1 identifiziert. Zeigen Sie: Jeder Orbit ist genau dann periodisch, wenn $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, wenn also $\alpha = \frac{p}{q}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}_0$, $p < q$, q und p teilerfremd. (2 Punkte)

4. Systeme von Differentialgleichungen.

- (a) Schreiben Sie das folgende System von Differentialgleichungen dritter Ordnung in die Form $x'(t) = A \cdot x(t)$ eines Differentialgleichungssystems erster Ordnung. Geben Sie die Matrix A hierbei explizit an.

$$\begin{aligned} y''' + 2y' + y - 3z' + z &= 0 \\ 2z''' + z'' - 4y'' + 2z + 6y &= 0. \end{aligned} \quad (5 \text{ Punkte})$$

- (b) Bringen Sie die skalare inhomogene lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$y^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)}(t) = f(t) \quad \text{mit } a_k, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

in die Form $u'(t) = A(t)u(t) + b(t)$ eines Differentialgleichungssystems erster Ordnung. Geben Sie die von t abhängige Matrix $A(t)$ sowie den Vektor $b(t)$ auch hier explizit an.

(5 Punkte)

5. Lineare Unabhängigkeit von Funktionen.

- (a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $y_1, \dots, y_m : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ Funktionen. Geben Sie eine Definition für die lineare Unabhängigkeit dieser Funktionen. Zeigen Sie: Existiert ein $t_0 \in I$ derart, dass die Vektoren $y_1(t_0), \dots, y_m(t_0) \in \mathbb{C}^n$ linear unabhängig sind, so sind auch die Funktionen y_1, \dots, y_m linear unabhängig. (5 Punkte)
- (b) Gilt in Teil a) auch die Umkehrung? (Beweis bzw. Gegenbeispiel!) (3 Punkte)
- (c) Entscheiden Sie im Folgenden jeweils, ob die angegebenen Funktionen auf \mathbb{R} linear unabhängig sind.

(i) $y_1(t) = (\sin(t), \cos(t)), \quad y_2(t) = (e^t, t)$ (2 Punkte)

(ii) $f_1(t) = (\sin(t), \cos(t)), \quad f_2(t) = (e^t, t), \quad f_3(t) = (\cos(t), \sin(t))$ (4 Punkte)

[Tipp: Es mag hilfreich sein, verschiedene Werte für t einzusetzen.]

Bitte wenden.

Hinweise: Die Lösungen sind bis spätestens **Freitag, den 24. Februar 2023, 10:00h, in den beschrifteten Briefkästen** (Eingang C-Teil, A5-Gebäude) abzugeben. Wir möchten Sie bitten, Ihre Lösungen partnerweise (d.h. **zwei Namen pro Blatt**) abzugeben. Abgaben mit drei oder mehr Namen pro Blatt sind bis auf Weiteres jedoch nicht zulässig.