Martin Schmidt
Nicolas A. Hasse
Valeriia Zhidkova

14. Februar 2023

Dynamische Systeme

1. Übung

1. Zeitdiskrete dynamische Systeme

Ein *zeitdiskretes dynamisches System* ist eine stetige Abbildung

$$\Phi : \mathbb{N}_0 \times M \to M,$$

wobei M ein metrischer Raum ist (hier typischerweise der $\mathbb{R}^n$), und für deren Familie von Abbildungen

$$\Phi_t : M \to M,\ \Phi_t(m) := \Phi(t, m) \ \ (t \in \mathbb{N}_0)$$

gilt, dass

$$\Phi_0 = \mathbb{1} \text{ und } \Phi_{t_2} \circ \Phi_{t_1} = \Phi_{t_1+t_2} \ \ (t_1, t_2 \in \mathbb{N}_0).$$

(a) Sei $G : M \to M$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass die induktiv definierte Abbildung $\Phi : \mathbb{N}_0 \times M \to M$

$$\Phi(0, m) := m,\ \Phi(1, m) := G(m) \text{ und } \Phi(n + 1, m) := G(\Phi(n, m))$$

für $n \in \mathbb{N}_0, m \in M$ ein zeitdiskretes dynamisches System definiert. *(3 Punkte)*

(b) Sei $l \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^{l+1} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine rekursiv definierte Folge, für die gilt:

$$a_0, \ldots, a_l \text{ sind vorgegeben und } a_{n+1} := f(a_n, \ldots, a_{n-l}) \text{ für } n \geq l.$$

Zeigen Sie unter Verwendung von (a), dass sich obige Rekursion als ein zeitdiskretes dynamisches System darstellen lässt.
(Tipp: Man konstruiere eine stetige Abbildung $G : \mathbb{R}^{l+1} \to \mathbb{R}^{l+1}$.) *(3 Punkte)*

(c) Gegeben sei die Fibonacci-Folge, definiert durch

$$a_0 := 0,\ a_1 := 1 \text{ und } a_{n+1} := a_n + a_{n-1},\ n \geq 1.$$

Bestimmen Sie das zugehörige zeitdiskrete dynamische System und geben Sie eine *explizite* Formel für den Zustand des Systems zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ an, indem Sie Aufgabenteil (b) verwenden und die hier auftretende lineare Abbildung $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diagonalisieren.

(7 Punkte)

Bitte wenden.

2. Lösungen von Differentialgleichungen.

(a) Seien $t_0, m, g, A, B \in \mathbb{R}$ mit $m > 0$. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung $m\,u'' = -gm$ genau eine Lösung u mit $u(t_0) = A$ und $u'(t_0) = B$ besitzt *(3 Punkte)*

(b) Zeigen Sie: Für $\alpha, A, B \in \mathbb{R}$ beliebig ist $y(t) := A\,\cos(\alpha t) + B\,\sin(\alpha t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $y'' + \alpha^2 y = 0$. *(2 Punkte)*

(c) Finden Sie eine Differentialgleichung, für die die Funktion $y(t) = A\,e^{2t} + B\,e^{t} + C$ für alle $A, B, C \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist. *(5 Punkte)*

[Tipp: Man überlege zunächst, welche Ordnung die Differentialgleichung haben sollte. Dann berechne man $y', y'', \ldots$ und überlege, wie man die Parameter A, B, C los wird.]

(d) Sei $f(t, u, u') := 2t - 3 + 3u' - 2u$. Zeigen Sie, dass $u(t) = A\,e^{t} + B\,e^{2t} + t$ mit $A, B \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $u'' = f(t, u, u')$ ist. Bestimmen Sie A und B, so dass $u(0) = u(1) = 0$ gilt. *(5 Punkte)*

Hinweise: Die Lösungen sind bis spätestens **Freitag, den 17. Februar 2023, 10:00h, in den beschrifteten Briefkästen** (Eingang C-Teil, A5-Gebäude) abzugeben. Wir möchten Sie bitten, Ihre Lösungen partnerweise (d.h. **zwei Namen pro Blatt**) abzugeben. Abgaben mit drei oder mehr Namen pro Blatt sind bis auf Weiteres jedoch nicht zulässig. Die regulären Tutorien beginnen ab nächster Woche.

Für weitere Fragen zu den Übungen können Sie sich an Nicolas Hasse, Raum C410, wenden (E-Mail: nicolas.hasse@uni-mannheim.de).