Seminararbeit

Sven Thomes

April 2023

1 Einführung

Sei im Folgenden X ein (nichtleerer,) kompakter, metrischer Raum und $f\colon X \to X$ ein Homöomorphismus (das heißt f ist bijektiv, f ist stetig und f^{-1} ist stetig). Sei für $n \in \mathbb{N}: f^n = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n-mal}$, $f^0 = id$ und $f^{-n} = (f^n)^{-1}$.

Definition 1.1. *Für ein beliebiges $n \in \mathbb{Z}$ wird f^n Iteration von f genannt.*

Lemma 1.2. *Jede Iteration eines Homöomorphismus ist selbst ein Homöomorphismus.*

Proof. Sei f ein Homöomorphismus.

Für $n = 0$ ist $f^n = f^0 = id$ bijektiv, stetig und die Umkehrabbildung $(f^0)^{-1} = id^{-1} = id$ stetig.

Per Vollständige Induktion wird gezeigt, dass f^n für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Homöomorphismus ist: Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $f^n = f^1 = f$ ein Homöomorphismus. Induktionsschritt: Sei jetzt n ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$, so dass f^n ein Homöomorphismus ist. $f^{n+1} = f \circ f^n$ ist als Komposition zweier bijektiver und stetiger Funktionen selbst bijektiv und stetig und die Umkehrfunktion $(f^{n+1})^{-1} = (f \circ f^n)^{-1} = (f^n)^{-1} \circ f^{-1}$ ist als eine Komposition der beiden stetigen Umkehrfunktionen von f und f^n stetig. Also ist f^{n+1} ein Homöomorphismus. Also ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Iteration f^n ein Homöomorphismus.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Da f^n ein Homöomorphismus ist, ist f^{-n} als Umkehrfunktion einer bijektiven Funktion selbst bijektiv. Da f^n und $(f^n)^{-1}$ stetig sind, sind auch $(f^n)^{-1}$ und $((f^n)^{-1})^{-1} = f^n$ stetig. Also ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Iteration f^{-n} ein Homöomorphismus. Insgesamt ist deshalb f^z für alle $z \in \mathbb{Z}$ ein Homöomorphismus. □

Definition 1.3. *Die Familie $\{f^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ der Iterationen von f wird Dynamisches System genannt.*

Manchmal wird dann auch f als Dynamisches System bezeichnet.

Definition 1.4. *Sei $x \in X$ ein beliebiges Element aus X, dann wird die Menge $\{f^n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ Orbit von x unter f genannt. Man schreibt auch $Orb(x, f)$ oder $Orb(x)$.*

Lemma 1.5. *Seien $x, y \in X$ und $y \in Orb(x)$, dann gilt $Orb(x) \subset Orb(y)$*

Proof. Da $y \in \mathrm{Orb}(x)$ gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$, so dass $f^n(x) = y$. Es folgt $x = f^{-n}(y)$. Sei $z \in \mathrm{Orb}(x)$ ein beliebiges Element aus dem Orbit von x. Dann existiert ein $m \in \mathbb{Z}$, so dass $z = f^m(x)$. Dann gilt

$$z = f^m(x) = f^m(f^{-n}(y)) = f^{m-n}(y)$$

Da $m - n \in \mathbb{Z}$ ist, ist $z \in \mathrm{Orb}(y)$. Also gilt $\mathrm{Orb}(x) \subset \mathrm{Orb}(y)$. □

Korollar 1.6. *Seien $x, y \in X$ und $y \in Orb(x)$, dann gilt $Orb(x) = Orb(y)$*

Proof. Nach 1.5 gilt $\mathrm{Orb}(x) \subset \mathrm{Orb}(y)$. Aus $x \in \mathrm{Orb}(x) \subset \mathrm{Orb}(y)$ folgt dann auch $\mathrm{Orb}(y) \subset \mathrm{Orb}(x)$. Also ist $\mathrm{Orb}(x) = \mathrm{Orb}(y)$. □

Satz 1.7. *Für beliebige $x, y \in X$ sind die Orbits $Orb(x)$ und $Orb(y)$ entweder identisch oder disjunkt.*

Proof. Angenommen $\mathrm{Orb}(x)$ und $\mathrm{Orb}(y)$ sind nicht disjunkt. Dann existiert ein $z \in \mathrm{Orb}(x) \cap \mathrm{Orb}(y)$. Aus $z \in \mathrm{Orb}(x)$ folgt nach 1.6 $\mathrm{Orb}(z) = \mathrm{Orb}(x)$. Aus $z \in \mathrm{Orb}(y)$ folgt nach 1.6 $\mathrm{Orb}(z) = \mathrm{Orb}(y)$. Also gilt $\mathrm{Orb}(y) = \mathrm{Orb}(z) = \mathrm{Orb}(x)$.

Angenommen $\mathrm{Orb}(x)$ und $\mathrm{Orb}(y)$ sind disjunkt. Da $x \in \mathrm{Orb}(x)$ aber wegen der Disjunktheit $x \notin \mathrm{Orb}(y)$, sind $\mathrm{Orb}(x)$ und $\mathrm{Orb}(y)$ nicht identisch. □

Definition 1.8. *Die Menge $\{x, f(x), f^2(x), ...\}$ wird positiver Orbit und die Menge $\{x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), ...\}$ negativer Orbit genannt. Der positive Orbit wird auch mit $Orb^+(x)$ bezeichnet und der negative mit $Orb^-(x)$.*

Definition 1.9. *Ein Punkt $x \in X$ wird periodisch genannt, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $f^n(x) = x$. Die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$, die diese Gleichung erfüllt wird Periode von x genannt. Die Menge der periodischen Punkte von f wird mit $P(f)$ bezeichnet. Der Orbit eines periodischen Punktes wird periodischer Orbit genannt.*

Lemma 1.10. *Für $x \in P(f)$ mit Periode n gilt $x = f^{k \cdot n}(x)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.*

Proof. Sei $x \in \mathrm{P}(f)$ mit Periode n. Für $k = 0$ gilt $f^{k \cdot n}(x) = f^0(x) = id(x) = x$. Per Vollständige Induktion wird für alle $k \in \mathbb{N}$ gezeigt, dass $f^{k \cdot n}(x) = x$ gilt: Induktionsanfang: Für $k = 1$ gilt $f^{k \cdot n}(x) = f^{1 \cdot n}(x) = x$ per Definition. Induktionsschritt: Sei jetzt k ein festes aber beliebiges $k \in \mathbb{N}$, so dass $f^{k \cdot n}(x) = x$ gilt. Dann ist $f^{(k+1) \cdot n}(x) = f^{k \cdot n}(f^n(x)) = f^{k \cdot n}(x) = x$. Also gilt $f^{k \cdot n}(x) = x$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $f^{(-k) \cdot n}(x) = f^{(-k) \cdot n}(f^{k \cdot n}(x)) = f^{(k-k) \cdot n}(x) = f^0(x) = x$ für alle $k \in \mathbb{N}$. □

Lemma 1.11. *Sei $x \in X$ ein periodischer Punkt mit Periode n. Dann ist jeder Punkt in $Orb(x)$ ein periodischer Punkt mit Periode n.*

Proof. Sei $x \in X$ ein periodischer Punkt. Sei n die Periode von x. Also ist $f^n(x) = x$. Sei $y \in \mathrm{Orb}(x)$ ein beliebiges Element aus dem Orbit von x. Es existiert ein $m \in \mathbb{Z}$, so dass $f^m(x) = y$. Dann ist $f^n(y) = f^n(f^m(x)) = f^m(f^n(x)) = f^m(x) = y$. Also ist y ein periodischer Punkt mit einer Periode $k \leq n$. Angenommen y hat eine Periode $k < n$. Dann ist $f^k(x) = f^k(f^{-m}(y)) = f^{-m}(f^k(y)) = f^{-m}(y) = x$. Das steht im Widerspruch dazu, dass n die Periode von x ist. Also gilt $k = n$ und y hat die selbe Periode wie x. □

Lemma 1.12. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann periodisch mit Periode n, wenn $Orb(x) = \{f^r(x) : r \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ und $f^{k+1}(x) \notin \{f^r(x) : r \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$ für alle $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.*

Proof. Sei $x \in X$ ein periodischer Punkt mit Periode n. Sei $y \in \mathrm{Orb}(x)$ ein beliebiges Element aus dem Orbit von x. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $f^m(x) = y$. Durch Division mit Rest können zwei Zahlen k, r mit $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ und $k \in \mathbb{Z}$ berechnet werden, so dass $m = k \cdot n + r$. Dann ist $f^m(x) = f^{k \cdot n + r}(x) = f^r(f^{k \cdot n}(x)) = f^r(x)$. Also ist $\mathrm{Orb}(x) \subset \{f^r(x) : r \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$.

Sei nun $z \in \{f^r(x) : r \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ beliebig. Dann existiert ein $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$, so dass $z = f^s(x)$. Dann ist ist $z \in \mathrm{Orb}(x)$. Also ist $\{f^r(x) : r \in \{1, 2, \ldots, n\}\} \subset \mathrm{Orb}(x)$ und insgesamt $\mathrm{Orb}(x) = \{f^r(x) : r \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$.

Angenommen es existiert ein $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, so dass $f^{k+1}(x) \in \{f^r(x) : r \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$. Dann existiert ein $s \in \{1, 2, \ldots, k\}$, so dass $f^{k+1}(x) = f^s(x)$. Dann ist $f^{k+1-s}(f^s(x)) = f^{k+1}(x) = f^s(x)$ und $0 < k + 1 - s \leq n - 1 < n$. Also hat $f^s(x) \in \mathrm{Orb}(x)$ nicht die Periode n, was im Widerspruch zu 1.11 steht.

Sei nun $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$, so dass $\mathrm{Orb}(x) = \{f^r(x) : r \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ und $f^{k+1}(x) \notin \{f^r(x) : r \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$ für alle $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Da $x \in \mathrm{Orb}(x) = \{f^r(x) : r \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$, existiert ein $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, so dass $f^m(x) = x$. Also ist x periodisch mit einer Periode $m \leq n$.

Angenommen $m < n$. Nach 1.11 haben dann auch alle Elemente in $\mathrm{Orb}(x) = \{f^r(x) : r \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ die Periode m. Dann ist $f^m(f^1(x)) = f^1(x)$. Also existiert ein $m \in \{1, \ldots, n-1\}$, so dass $f^{m+1}(x) = f^m(f^1(x)) = f^1(x) \in \{f^r(x) : r \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$. Das steht im Widerspruch zu $f^{k+1}(x) \notin \{f^r(x) : r \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$ für alle $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Also ist x periodisch mit Periode $m = n$. □

Satz 1.13. *Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann periodisch, wenn der Orbit $Orb(x)$ des Punktes eine endliche Menge ist.*

Proof. periodisch $\Rightarrow$ endlich: Sei $x \in X$ ein periodischer Punkt. Sei $n \in \mathbb{N}$ die Periode von x. Nach 1.12 ist dann $\mathrm{Orb}(x) = \{f^r(x) : r \in \{1, 2, ..., n\}\}$ also ist $|\mathrm{Orb}(x)| \leq n - 1$

nicht periodisch $\Rightarrow$ nicht endlich: Sei nun $x \in X$ ein beliebiger, nicht periodischer Punkt. Es existiert also kein $n \geq 1$, so dass $f^n(x) = x$. Angenommen es liegt ein periodischer Punkt in $\mathrm{Orb}(x)$. Sei y dieser periodische Punkt, $m \in \mathbb{N}$ die Periode von y und $k \in \mathbb{Z}$, so dass $y = f^k(x)$. Nach 1.11 ist dann jeder Punkt in $\mathrm{Orb}(y)$ periodisch mit Periode m. Da nach 1.6 $\mathrm{Orb}(x) = \mathrm{Orb}(y)$, ist dann auch jeder Punkt im Orbit $\mathrm{Orb}(x)$ von x periodisch. Das steht im Widerspruch dazu, dass x nicht periodisch ist. Also ist kein Punkt in $\mathrm{Orb}(x)$ periodisch. Daraus folgt, dass $f^{n+1}(x) \notin \{x, f(x), f^2(x), ..., f^n(x)\}$ für alle $n \geq 1$. Also gibt es kein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n \geq |\mathrm{Orb}^+(x)|$ und wegen $\mathrm{Orb}^+(x) \subset \mathrm{Orb}(x)$ ist auch der Orbit von x nicht endlich. □

Definition 1.14. *Periodische Punkte mit Periode 1 werden Fixpunkte genannt. Die Menge der Fixpunkte von f wird mit Fix(f) bezeichnet.*

Definition 1.15. *Eine Teilmenge $\Lambda \subset X$ wird invariant unter f genannt, wenn $f(\Lambda) = \Lambda$ ist.*

Satz 1.16. *Jeder Orbit ist invariant.*

Proof. Sei $y \in f(\mathrm{Orb}(x))$ ein beliebiges Element aus dem Bild des Orbits von x unter f. Dann gilt $f^{-1}(y) \in \mathrm{Orb}(x)$. Also gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass $f^k(x) = f^{-1}(y)$. Da $k + 1 \in \mathbb{Z}$ ist, ist auch $y = f(f^{-1}(y)) = f(f^k(x)) = f^{k+1}(x) \in \mathrm{Orb}(x)$. Es folgt $f(\mathrm{Orb}(x)) \subset \mathrm{Orb}(x)$.

Sei nun $y \in \mathrm{Orb}(x)$ ein beliebig Element aus dem Orbit von x. Nach 1.6 ist $\mathrm{Orb}(y) = \mathrm{Orb}(x)$ und es gilt $f^{-1}(y) \in \mathrm{Orb}(y) = \mathrm{Orb}(x)$. Also ist $f(f^{-1}(y)) = y \in f(\mathrm{Orb}(x))$. Es folgt $\mathrm{Orb}(x) \subset f(\mathrm{Orb}(x))$ und insgesamt ist $f(\mathrm{Orb}(x)) = \mathrm{Orb}(x)$ □

Satz 1.17. *Die Menge Fix(f) ist invariant und kompakt. Die Menge $P(f)$ ist invariant.*

Proof. $\mathrm{Fix}(f)$ ist invariant: Sei $x \in \mathrm{Fix}(f)$. Dann ist $f^{-1}(x) = x = f(x) \in \mathrm{Fix}(f)$. Also ist $\mathrm{Fix}(f) = f(\mathrm{Fix}(f))$

$\mathrm{Fix}(f)$ ist kompakt: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathrm{Fix}(f)$. Es gilt $x_n = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da f stetig ist, gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$. Also ist $\lim_{n\to\infty} x_n$ auch ein Fixpunkt. Dann ist $\mathrm{Fix}(f)$ abgeschlossen und weil X kompakt ist auch kompakt.

$\mathrm{P}(f)$ ist invariant: Sei $x \in \mathrm{P}(f)$. Nach 1.11 ist jeder Punkt im Orbit von x auch periodisch. Dann sind $f^{-1}(x), x, f(x) \in \mathrm{P}(f)$. Also gilt $\mathrm{P}(f) = f(\mathrm{P}(f))$ und $\mathrm{P}(f)$ ist invariant. □

Satz 1.18. *$\Lambda \subset X$ ist genau dann invariant, wenn Λ eine Vereinigung von Orbits ist.*

Proof. Sei Λ eine Vereinigung von beliebigen Orbits. Sei $\lambda \in \Lambda$ ein beliebiges Element aus Λ. Es existiert ein Orbit O aus der Vereinigung von Orbits, der λ enthält. Nach 1.6 ist dieser Orbit genau $\mathrm{Orb}(\lambda) = O$. Da nach 1.16 jeder Orbit invariant ist, gilt $\mathrm{Orb}(\lambda) = f(\mathrm{Orb}(\lambda))$ und wegen $\mathrm{Orb}(\lambda) \subset \Lambda$ folgt $\lambda \in \mathrm{Orb}(\lambda) = f(\mathrm{Orb}(\lambda)) \subset f(\Lambda)$. Also ist $\lambda \in f(\Lambda)$ und es folgt $\Lambda \subset f(\Lambda)$. Sei nun $z \in f(\Lambda)$ beliebig. Dann existiert ein $f^{-1}(z) \in \Lambda$. Da Λ eine Vereinigung von Orbits ist, gibt es einen Orbit aus dieser Vereinigung, der $f^{-1}(z)$ enthält. Da jeder Orbit invariant ist, enthält dieser Orbit auch $f(f^{-1}(z)) = z$. Also ist z ein Element in einem Orbit, der Teilmenge von Λ ist und somit auch ein Element aus Λ. Also ist $f(\Lambda) \subset \Lambda$. Insgesamt ist also $\Lambda = f(\Lambda)$ und Λ ist invariant.

Sei Λ eine invariante Menge. Sei $\lambda \in \Lambda$ beliebig. Angenommen es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $f^n(\lambda) \in \Lambda$ und $f^{n+1}(\lambda) \notin \Lambda$. Dann ist $f(\Lambda) \not\subset \Lambda$, was im Widerspruch dazu steht, dass Λ invariant ist. Also ist für alle $n \in \mathbb{N}$, für die $f^n(\lambda) \in \Lambda$ liegt, auch $f^{n+1}(\lambda) \in \Lambda$. Dann ist $\mathrm{Orb}^+(\lambda) \subset \Lambda$. Angenommen es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $f^{-n}(\lambda) \in \Lambda$ und $f^{-(n+1)}(\lambda) \notin \Lambda$. Also existiert eine Element $f^{-n}(\lambda) \in \Lambda$, so dass kein Element $f^{-1}(f^{-n}(\lambda))$ in Λ existiert, dass auf $f^{-n}(\lambda)$ abbildet. Also ist $f^{-n}(\lambda) \notin f(\Lambda)$ Dann ist $\Lambda \not\subset f(\Lambda)$, was im Widerspruch dazu steht, dass Λ invariant ist. Also ist für alle $n \in \mathbb{N}$, für die $f^{-n}(\lambda) \in \Lambda$ liegt, auch $f^{-(n+1)}(\lambda) \in \Lambda$. Dann ist $\mathrm{Orb}^-(\lambda) \subset \Lambda$. Insgesamt ist also $\mathrm{Orb}(\lambda) \subset \Lambda$. Da λ beliebig ist, enthält Λ die Orbits von allen Punkten in Λ. Also ist Λ eine Vereinigung von den Orbits von allen seinen Elementen. $\square$

Theorem 1.19 (Theorem 1.1. im Buch)**.** *Falls Λ invariant ist (also $f(\Lambda) = \Lambda$ gilt), sind auch der Abschluss $\overline{\Lambda}$, der Rand $\partial(\Lambda)$ und das Innere $int(\Lambda)$ von Λ invariant.*

Proof. Sei $\Lambda \subset X$ eine beliebige invariante Teilmenge von X. $f(\overline{\Lambda}) \subset \overline{\Lambda}$: Sei $x \in f(\overline{\Lambda})$. Dann ist $f^{-1}(x) \in \overline{\Lambda}$. Also existiert es eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Λ, die gegen $f^{-1}(x)$ konvergiert. Da Λ invariant ist, wird λ_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf ein $f(\lambda_n) \in \Lambda$ abgebildet. Da f stetig ist, ist auch die Folge $(f(\lambda_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty}(f(\lambda_n)) = f(\lim_{n\to\infty}(\lambda_n)) = f(f^{-1}(x)) = x$. Also existiert eine Folge $f(\lambda_n) \in \Lambda$, die gegen x konvergiert. Dann ist $x \in \overline{\Lambda}$ und es folgt $f(\overline{\Lambda}) \subset \overline{\Lambda}$.

$\overline{\Lambda} \subset f(\overline{\Lambda})$: Sei $x \in \overline{\Lambda}$. Dann existiert es eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Λ, die gegen x konvergiert. Da Λ invariant ist, gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $f^{-1}(\lambda_n) \in \Lambda$. Da f^{-1} stetig ist, ist auch die Folge $(f^{-1}(\lambda_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty}(f^{-1}(\lambda_n)) = f^{-1}(\lim_{n\to\infty}(\lambda_n)) = f^{-1}(x) \in \overline{\Lambda}$. Daraus folgt $x \in f(\overline{\Lambda})$. Also ist $\overline{\Lambda} \subset f(\overline{\Lambda})$ und insgesamt ist $f(\overline{\Lambda}) = \overline{\Lambda}$ Also ist der Abschluss einer beliebigen invarianten Menge selbst invariant.

Sei $\Lambda \subset X$ eine beliebige invariante Teilmenge von X. Für den Rand gilt $\partial(\Lambda) = \overline{\Lambda} \cap \overline{(X \setminus \Lambda)}$. Es wurde bereits gezeigt, dass $\overline{\Lambda}$ invariant ist. Da f bijektiv ist, gilt $X = f(X) = f(\Lambda \cup X \setminus \Lambda) = f(\Lambda) \cup f(X \setminus \Lambda) = \Lambda \cup f(X \setminus \Lambda)$. Also ist $f(X \setminus \Lambda) = f(X) \setminus f(\Lambda) = X \setminus \Lambda$. Also ist $(X \setminus \Lambda)$ invariant. Dann ist auch der Abschluss $\overline{(X \setminus \Lambda)}$ invariant. Weil f bijektiv ist, gilt $f(\partial(\Lambda)) = f(\overline{\Lambda} \cap \overline{(X \setminus \Lambda)}) = f(\overline{\Lambda}) \cap f(\overline{(X \setminus \Lambda)}) = \overline{\Lambda} \cap \overline{(X \setminus \Lambda)} = \partial(\Lambda)$.

Also ist der Rand einer beliebigen invarianten Menge selbst invariant.

Sei $\Lambda \subset X$ eine beliebige invariante Teilmenge von X. Für das Innere gilt $\partial(\Lambda) = \overline{\Lambda} \setminus \mathrm{int}(\Lambda)$ und $\mathrm{int}(\Lambda) = \overline{\Lambda} \setminus \partial(\Lambda)$. Es wurde bereits gezeigt, dass der Abschluss $\overline{\Lambda}$ und der Rand $\partial(\Lambda)$ invariant sind. Da f bijektiv ist, gilt $f(\mathrm{int}(\Lambda)) = f(\overline{\Lambda} \setminus \partial(\Lambda)) = f(\overline{\Lambda}) \setminus f(\partial(\Lambda)) = \overline{\Lambda} \setminus \partial(\Lambda) = \mathrm{int}(\Lambda)$. Also ist das Innere einer beliebigen invarianten Menge selbst invariant. $\square$

2 Limit

Satz 2.1. *Sei $x \in X$ ein beliebiger Punkt in X. Für $n \to +\infty$ konvergiert die Folge $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht immer.*

Proof. Beweis durch Gegenbeispiel. Sei $X = [-1, 1]$ und $f(x) = -x$ und $x = 1 \in X$. Die Folge $x_n := f^n(x)$ entspricht $(-1)^n$ und konvergiert nicht. □

Satz 2.2. *Falls die Folge $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to +\infty$ konvergiert, ist der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f^n(x)$ ein Fixpunkt.*

Proof. Sei $x \in X$ ein Punkt in X, so dass $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to +\infty$ eine konvergente Folge ist. Sei $y := lim_{n\to\infty} f^n(x)$ der Grenzwert dieser Folge. Wegen der Stetigkeit von f gilt $y = lim_{n\to\infty} f^n(x) = lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = lim_{n\to\infty} f(f^n(x)) = f(lim_{n\to\infty} f^n(x)) = f(y)$. Also ist y ein Fixpunkt. □

Definition 2.3. *Ein Punkt $y \in X$ heißt ω-Limit Punkt von $x \in X$, falls eine Teilfolge $n_i \to +\infty$ von natürlichen Zahlen existiert, so dass $f^{n_i}(x) \to y$. Die Menge der ω-Limit Punkte von x heißt ω-Limit Menge von x und wird mit $\omega(x)$ oder $\omega(x, f)$ bezeichnet.*

Umgekehrt wird die *α-Limit Menge* von x definiert:

Definition 2.4. *Ein Punkt $y \in X$ heißt α-Limit Punkt von $x \in X$, falls eine Teilfolge $n_i \to +\infty$ von natürlichen Zahlen existiert, so dass $f^{-n_i}(x) \to y$. Die Menge der α-Limit Punkte von x heißt α-Limit Menge von x und wird mit $\alpha(x)$ oder $\alpha(x, f)$ bezeichnet.*

Satz 2.5. *Für jedes $x \in X$ ist $\omega(x, f) = \alpha(x, f^{-1})$.*

Proof. Sei X ein kompakter metrischer Raum und $x \in X$ ein beliebiger Punkt aus X. Sei $y \in \omega(x, f)$. Dann existiert eine Folge $n_i \to +\infty$ von natürlichen Zahlen, so dass $f^{n_i}(x) \to y$. Da $f^{n_i}(x) = (f^{-1})^{-n_i}(x)$, gilt auch $(f^{-1})^{-n_i}(x) \to y$ für $n_i \to +\infty$. Also ist $y \in \alpha(x, f^{-1})$.

Sei nun $z \in \alpha(x, f)$. Dann existiert eine Folge $n_i \to +\infty$ von natürlichen Zahlen, so dass $f^{-n_i}(x) \to z$. Da $f^{-n_i}(x) = (f^{-1})^{n_i}(x)$, gilt auch $(f^{-1})^{n_i}(x) \to z$ für $n_i \to \infty$. Also ist $z \in \omega(x, f^{-1})$. □

Satz 2.6. *Für periodische Punkte $x \in P(f)$, gilt $\omega(x) = \alpha(x) = Orb(x)$.*

Proof. $\omega(x) \subset \mathrm{Orb}(x)$: Sei $x \in \mathrm{P}(f)$ ein beliebiger periodischer Punkt mit Periode n. Sei $y \in \omega(x)$. Es existiert eine Folge von natürlichen Zahlen $n_i \to +\infty$, so dass $f^{n_i}(x) \to y$. Da x ein periodischer Punkt ist, ist nach 1.13 der Orbit von x eine endliche Menge. Angenommen y ist kein Element aus dem Orbit von x. Dann gilt $d(y, z) > 0$ für alle $z \in \mathrm{Orb}(x)$. Da der Orbit von x eine endliche Menge ist, gilt $\min_{z\in\mathrm{Orb}(x)} d(y, z) > 0$. Also existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $d(y, f^n(x)) > \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das steht im Widerspruch dazu, dass eine Folge von natürlichen Zahlen $n_i \to +\infty$ existiert, so dass $f^{n_i}(x) \to y$. Also ist $y \in \mathrm{Orb}(x)$ und es gilt $\omega(x) \subset \mathrm{Orb}(x)$.

$\alpha(x) \subset \mathrm{Orb}(x)$: Sei $y \in \alpha(x)$. Es existiert eine Folge von natürlichen Zahlen $n_i \to +\infty$, so dass $f^{-n_i}(x) \to y$. Da x ein periodischer Punkt ist, ist nach 1.13 der Orbit von x eine endliche Menge. Angenommen y ist kein Element aus dem Orbit von x. Dann gilt $d(y,z) > 0$ für alle $z \in \mathrm{Orb}(x)$. Da der Orbit von x eine endliche Menge ist, gilt $\min_{z \in \mathrm{Orb}(x)} d(y,z) > 0$. Also existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $d(y, f^{-n}(x)) > \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das steht im Widerspruch dazu, dass eine Folge von natürlichen Zahlen $n_i \to +\infty$ existiert, so dass $f^{-n_i}(x) \to y$. Also ist $y \in \mathrm{Orb}(x)$ und es gilt $\alpha(x) \subset \mathrm{Orb}(x)$.

$\mathrm{Orb}(x) \subset \omega(x)$ und $\mathrm{Orb}(x) \subset \alpha(x)$: Sei $y \in \mathrm{Orb}(x)$. Dann ist nach 1.11 auch y periodisch mit Periode n. Also ist nach 1.10 $f^{zn}(x) = x$ für alle $z \in \mathbb{Z}$. Also ist $(m_k) \coloneqq n \cdot k$ eine Folge von natürlichen Zahlen mit $m_k \to +\infty$, so dass $f^{m_k}(y) = f^{kn}(y) = y \to y$. Dann ist $y \in \omega(x)$ und es gilt $\mathrm{Orb}(x) \subset \omega(x)$. Außerdem ist $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von natürlichen Zahlen mit $m_k \to +\infty$, so dass $f^{-m_k}(y) = f^{-kn}(y) = y \to y$. Dann ist $y \in \alpha(x)$ und es gilt $\mathrm{Orb}(x) \subset \alpha(x)$.

Insgesamt gilt also $\mathrm{Orb}(x) = \omega(x)$ und $\mathrm{Orb}(x) = \alpha(x)$. □

Theorem 2.7 (Theorem 1.2. im Buch)**.** *Für ein beliebiges $x \in X$ ist $\omega(x)$ nichtleer, kompakt und invariant. Außerdem gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), \omega(x)) = 0$$

Proof. nichtleer: Sei $x \in X$. Sei $x_n \coloneqq f^n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in X. Da X kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Also gibt es eine Folge von natürlichen Zahlen $n_i \to +\infty$, so dass $f^{n_i}(x) \to \lim_{i\to\infty} x_{n_i}$. Dann ist $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} \in \omega(x)$. Also ist $\omega(x)$ nichtleer.

kompakt: Sei $x \in X$. Sei $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge, so dass $y_k \in \omega(x)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $z \coloneqq \lim_{k\to\infty} y_k$ der Grenzwert der Folge.

Sei $j = 1$. Da $y_k \to z$, gibt es ein $K_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq K_1 : d(y_k, z) < \frac{1}{2j} = \frac{1}{2}$. Da $y_{K_1} \in \omega(x)$ liegt, gibt es eine Folge von natürlichen Zahlen $n_i^{K_1} \to +\infty$, so dass $f^{n_i^{K_1}}(x) \to y_{K_1}$. Dann gibt es ein $I \in \mathbb{N}$, so dass für alle $i \geq I : d(f^{n_i^{K_1}}(x), y_{K_1}) < \frac{1}{2j} = \frac{1}{2}$. Wähle $m_j = m_1 \coloneqq n_I^{K_1}$. Dann ist $d(f^{m_1}(x), z) = d(f^{n_I^{K_1}}(x), z) \leq d(f^{n_I^{K_1}}(x), y_{K_1}) + d(y_{K_1}, z) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Sei nun $j \in \mathbb{N}$ ein festes aber beliebiges j, für das m_{j-1} schon gewählt wurde. Da $y_k \to z$, gibt es ein $K_j \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq K_j : d(y_k, z) < \frac{1}{2j}$. Da $y_{K_j} \in \omega(x)$ liegt, gibt es eine Folge von natürlichen Zahlen $n_i^{K_j} \to +\infty$, so dass $f^{n_i^{K_j}}(x) \to y_{K_j}$. Dann gibt es ein $I \in \mathbb{N}$, so dass für alle $i \geq I : d(f^{n_i^{K_j}}(x), y_{K_j}) < \frac{1}{2j}$. Da $n_i^{K_j} \to +\infty$ für $i \to \infty$, gibt es ein $I_j \geq I$, so dass $n_{I_j}^{K_j} \geq m_{j-1}$. Wähle $m_j \coloneqq n_{I_j}^{K_j}$. Dann ist $d(f^{m_j}(x), z) = d(f^{(n_{I_j}^{K_j})}(x), z) \leq d(f^{(n_{I_j}^{K_j})}(x), y_{K_j}) + d(y_{K_j}, z) < \frac{1}{2j} + \frac{1}{2j} = \frac{1}{j}$.

Dann kann für alle $j \in \mathbb{N}$ ein m_j gewählt werden, so dass $d(f^{m_j}(x), z) < \frac{1}{j}$. Also konvergiert $(f^{m_j}(x))_{j\in\mathbb{N}}$ gegen z. Da für alle $j \in \mathbb{N} : m_j > m_{j-1}$ existiert mit $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von natürlichen Zahlen $m_j \to +\infty$, so dass $f^{m_j}(x) \to z$. Also ist $z \in \omega(x)$.

Dann ist $\omega(x)$ abgeschlossen und wegen der Kompaktheit von X auch kompakt.

invariant: Sei $y \in \omega(x)$ ein beliebiges Element aus $\omega(x)$. Dann gibt es eine Folge von natürlichen Zahlen $n_i \to +\infty$, so dass $f^{n_i}(x) \to y$. Da f stetig ist, ist $(n_i+1) \to +\infty$ eine Folge von natürlichen Zahlen, so dass $\lim_{i\to\infty} f^{(n_i+1)}(x) = f(\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x)) = f(y)$. Also ist $f(y) \in \omega(x)$. Dann gilt $f(\omega(x)) \subset \omega(x)$ Da auch f^{-1} stetig ist, gilt $\lim_{i\to\infty} f^{(n_i-1)}(x) = \lim_{i\to\infty} f^{-1}(f^{n_i}(x)) = f^{-1}(\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x))$. Dann ist $(n_i-1) \to +\infty$ eine Folge von natürlichen Zahlen, so dass $\lim_{i\to\infty} f^{n_i-1}(x) = f^{-1}(y)$. Also ist auch $f^{-1}(y) \in \omega(x)$. Dann gilt $\omega(x) \subset f(\omega(x))$ und insgesamt $\omega(x)$ ist invariant: $\omega(x) = f(\omega(x))$.

Abstand: Angenommen $\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), \omega(x)) = 0$ gilt nicht. Dann gibt es ein $\epsilon_0 > 0$ und eine Teilfolge $n_i \to +\infty$, so dass $d(f^{n_i}(x), \omega(x)) \geq \epsilon_0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Die Folge $(f^{n_i}(x))_{i\in\mathbb{N}}$ besitzt wegen der Kompaktheit von X eine konvergente Teilfolge. Sei $(n_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von natürlichen Zahlen, so dass $f^{n_{i_k}}(x)$ dieser konvergenten Teilfolge entspricht. Dann gibt es einen Grenzwert $z \in X$, so dass $f^{n_{i_k}}(x) \to z$ für $k \to +\infty$. Also existiert eine Folge von natürlichen Zahlen $(n_{i_k}) \to +\infty$, so dass $f^{n_{i_k}}(x) \to z$. Dann folgt $z \in \omega(x)$. Weil $f^{n_{i_k}}(x) \to z$ existiert ein $K \in \mathbb{N}$, so dass $d(f^{n_{i_k}}(x), z) < \epsilon_0$ für alle $k \geq K$. Dann existiert ein $I := i_K$, so dass $d(f^{n_I}, z) < \epsilon_0$. Das steht im Widerspruch zu $d(f^{n_i}(x), \omega(x)) \geq \epsilon_0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Also muss $\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), \omega(x)) = 0$ gelten. $\square$

Definition 2.8. *$L(f) = \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x) \cup \alpha(x)}$ ist die Limit Menge (limit set) von f.*

Satz 2.9. *Die Limit-Menge $L(f)$ ist nichtleer, kompakt und invariant.*

Proof. Die Limit-Menge ist nichtleer: Sei $x \in X$ ein beliebiger Punkt in X. Dann ist $\omega(x)$ nach 2.7 nichtleer. Da $\omega(x) \subset \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x) \cup \alpha(x)}$, ist $\mathrm{L}(f)$ auch nichtleer.

Die Limit-Menge ist kompakt: Die Limit-Menge $\mathrm{L}(f)$ ist per Definition abgeschlossen und wegen der Kompaktheit von X auch kompakt.

Die Limit-Menge invariant: Für alle $x \in X$ sind $\omega(x)$ und $\alpha(x, f) = \omega(x, f^{-1})$ invariant. Da invariante Mengen nach 1.18 eine Vereinigung von Orbits sind, ist die Vereinigung von invarianten Mengen wieder eine Vereinigung von Orbits und somit ist $\bigcup_{x\in X} \omega(x) \cup \alpha(x)$ eine invariante Menge. Nach 1.19 ist dann auch $\overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x) \cup \alpha(x)}$ invariant. $\square$

3 Wiederkehr (recurrence)

Definition 3.1. *Ein Punkt $x \in X$ heißt positiv wiederkehrend (positively recurrent), wenn $x \in \omega(x)$ und negativ wiederkehrend (negatively recurrent), wenn $x \in \alpha(x)$. Wiederkehrende Punkte sind Punkte die positiv oder negativ wiederkehrend sind. $R(f)$ bezeichnet die Menge aller wiederkehrenden Punkte.*

Satz 3.2. *$R(f)$ ist invariant.*

Proof. $\mathrm{R}(f) \subset f(\mathrm{R}(f)$: Sei $x \in \mathrm{R}(f)$ ein beliebiger wiederkehrender Punkt. Falls x positiv wiederkehrend ist, gilt $x \in \omega(x)$. Dann existiert eine Folge von natürlichen Zahlen $n_i \to +\infty$, so dass $f^{n_i}(x) \to x$. Wegen der Stetigkeit von f^{-1}, ist $\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(f^{-1}(x)) = f^{-1}(\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x)) = f^{-1}(x)$. Also ist $n_i \to +\infty$ eine Folge von natürlichen Zahlen, so dass $f^{n_i}(f^{-1}(x)) \to f^{-1}(x)$ und es gilt $f^{-1}(x) \in \omega(f^{-1}(x))$. Falls x negativ wiederkehrend ist, gilt $x \in \alpha(x)$. Dann existiert eine Folge von natürlichen Zahlen $n_i \to +\infty$, so dass $f^{-n_i}(x) \to x$. Wegen der Stetigkeit von f^{-1}, ist $\lim_{i\to\infty} f^{-n_i}(f^{-1}(x)) = f^{-1}(\lim_{i\to\infty} f^{-n_i}(x)) = f^{-1}(x)$. Also ist $n_i \to +\infty$ eine Folge von natürlichen Zahlen, so dass $f^{-n_i}(f^{-1}(x)) \to f^{-1}(x)$ und es gilt $f^{-1}(x) \in \alpha(f^{-1}(x))$. Also ist $f^{-1}(x)$ wiederkehrend und es gilt $\mathrm{R}(f) \subset f(\mathrm{R}(f))$. $f(\mathrm{R}(f)) \subset \mathrm{R}(f)$: Sei $x \in \mathrm{R}(f)$ ein beliebiger wiederkehrender Punkt. Falls x positiv wiederkehrend ist, gilt $x \in \omega(x)$. Dann existiert eine Folge von natürlichen Zahlen $n_i \to +\infty$, so dass $f^{n_i}(x) \to x$. Wegen der Stetigkeit von f, ist $\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(f(x)) = f(\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x)) = f(x)$. Also ist $n_i \to +\infty$ eine Folge von natürlichen Zahlen, so dass $f^{n_i}(f(x)) \to f(x)$ und es gilt $f(x) \in \omega(f(x))$. Falls x negativ wiederkehrend ist, gilt $x \in \alpha(x)$. Dann existiert eine Folge von natürlichen Zahlen $n_i \to +\infty$, so dass $f^{-n_i}(x) \to x$. Wegen der Stetigkeit von f, ist $\lim_{i\to\infty} f^{-n_i}(f(x)) = f(\lim_{i\to\infty} f^{-n_i}(x)) = f(x)$. Also ist $n_i \to +\infty$ eine Folge von natürlichen Zahlen, so dass $f^{-n_i}(f(x)) \to f(x)$ und es gilt $f(x) \in \alpha(f(x))$. Also ist $f(x)$ wiederkehrend und es gilt $f(\mathrm{R}(f)) \subset \mathrm{R}(f)$ und insgesamt $f(\mathrm{R}(f)) = \mathrm{R}(f)$. □

Später wird gezeigt, dass $\mathrm{R}(f)$ nichtleer ist.

Definition 3.3. *Ein Punkt $x \in X$ heißt nicht-wandernd unter f, falls für jede Umgebung V von x ein $n \geq 1$ existiert, so dass $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$. Die Menge der nicht-wandernden Punkte von f heißt nicht-wandernde Menge von f und wird mit $\Omega(f)$ bezeichnet.*

Satz 3.4. *$\Omega(f)$ ist kompakt, invariant und es gilt $R(f) \subset \Omega(f)$.*

Später wird gezeigt, dass $\mathrm{R}(f)$ nichtleer ist. Daraus folgt dann, dass $\Omega(f)$ wegen $\mathrm{R}(f) \subset \Omega(f)$ auch nichtleer ist.

Proof. kompakt: Sei x_n eine konvergente Folge in $\Omega(f)$. Sei $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ der Grenzwert der Folge. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Sei $\epsilon_0 := \epsilon/2 > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, x) < \epsilon_0$ für alle $n \geq N$. Da x_N nicht-wandernd und $\mathrm{B}(x_N, \epsilon_0)$ eine Umgebung von x_N ist, existiert ein $m \geq 1$, so dass $f^m(\mathrm{B}(x_N, \epsilon_0)) \cap \mathrm{B}(x_N, \epsilon_0) \neq \emptyset$. Sei $y \in f^m(\mathrm{B}(x_N, \epsilon_0)) \cap \mathrm{B}(x_N, \epsilon_0)$. Dann ist $d(y, x) \leq d(y, x_N) + d(x_N, x) < \epsilon_0 + \epsilon_0 = \epsilon$. Also gilt für jede Umgebung V, die die ϵ-Umgebung enthält, dass ein $m \geq 1$ existiert, so dass $f^m(V) \cap V \neq \emptyset$. Da ϵ beliebig gewählt wurde, ist der Grenzwert x nicht-wandernd. Also ist $\Omega(f)$ abgeschlossen und wegen der Kompaktheit von X auch kompakt.

invariant: $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$: Sei $x \in \Omega(f)$ ein beliebiger nicht-wandernder Punkt. Sei U eine beliebige Umgebung von $f(x)$. Da f stetig ist, existiert eine Umgebung V von x, so dass $f(V) = U$. Da x nicht-wandernd ist, gibt es ein $n \geq 1$, so dass $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$. Sei $y \in f^n(V) \cap V$. Dann ist $f(y) \in f^{n+1}(V) = f^n(f(V)) = f^n(U)$ und

$f(y) \in f(V) = U$. Also ist $f(y) \in f^n(U) \cap U$ und $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Dann ist $f(x) \in \Omega(f)$. Somit gilt $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$.

$\Omega(f) \subset f(\Omega(f))$: Sei $x \in \Omega(f)$. Sei V eine beliebige Umgebung von $f^{-1}(x)$. Da f^{-1} stetig ist, existiert eine Umgebung U von x, so dass $f(V) = U$. Da x nicht-wandernd ist, gibt es ein $n \geq 1$, so dass $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Sei $y \in f^n(U) \cap U$. Es gilt $f^{-1}(y) \in f^{-1}(U) = V$ und $f^{-1}(y) \in f^{-1}(f^n(U)) = f^n(V)$. Also ist $f^{-1}(y) \in f^n(V) \cap V$. Also ist $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$. Dann ist $f^{-1}(x) \in \Omega(f)$. Somit ist $x \in f(\Omega(f))$. Insgesamt gilt also $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$ und $\Omega(f)$ ist invariant.

$\mathrm{R}(f) \subset \Omega(f)$: Sei $x \in \mathrm{R}(f)$ ein beliebiger wiederkehrender Punkt. Sei V eine beliebige Umgebung von x. Falls x positiv wiederkehrend ist, ist $x \in \omega(x)$ und es gibt eine Folge von natürlichen Zahlen $n_i \to +\infty$, so dass $f^{n_i}(x) \to x$. Also gibt es für V ein $n_i \in \mathbb{N}$, so dass $f^{n_i}(x) \in V$. Dann ist $n_i \geq 1$ und $f^{n_i}(x) \in f^{n_i}(V) \cap V$. Dann ist $f^{n_i}(V) \cap V \neq \emptyset$ und $x \in \Omega(f)$. Falls x negativ wiederkehrend ist, ist $x \in \alpha(x)$ und es gibt eine Folge von natürlichen Zahlen $n_i \to +\infty$, so dass $f^{-n_i}(x) \to x$. Also gibt es für V ein $n_i \in \mathbb{N}$, so dass $f^{-n_i}(x) \in V$. Dann ist $n_i \geq 1$ und wegen $f^{n_i}(f^{-n_i}(x)) = x$ ist $f^{-n_i}(x) \in f^{n_i}(V) \cap V$. Dann ist $f^{n_i}(V) \cap V \neq \emptyset$ und $x \in \Omega(f)$. Also gilt in beiden Fällen $x \in \Omega(f)$ und somit $\mathrm{R}(f) \subset \Omega(f)$. □

Definition 3.5. *Eine ϵ-Kette von x zu y ist eine endliche Folge $x_0, x_1, ..., x_k$ mit $x_0 = x$ und $x_k = y$, so dass $d(f(x_n), x_{n+1}) < \epsilon$ für $n = 0, 1, ..., k-1$. Eine ϵ-Kette heißt periodisch, wenn $x = y$ gilt. Ein Punkt heißt ketten-wiederkehrend (chain recurrent) von f, falls für jedes $\epsilon > 0$ eine ϵ-Kette von x zu x existiert. Die Menge der ketten-wiederkehrenden Punkte von f heißt ketten-wiederkehrende Menge (chain recurrent set) von f und wird mit $CR(f)$ bezeichnet.*

Satz 3.6. *Ein Punkt ist genau dann ketten-wiederkehrend, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine periodische ϵ-Kette durch x geht.*

Proof. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Sei $x \in X$ ein beliebiger Punkt in X, so dass eine periodische ϵ-Kette durch x geht. Sei $(y_n)_{n=0}^k$ die ϵ-Kette durch x. Es gibt also ein $j \in \{0, 1, \dots, k\}$, so dass $y_j = x$. Sei dann $x_n := y_{j+n}$ für alle $n \in \{0, 1, \dots, k-j\}$ und $x_n := y_{j+n-k}$ für alle $n \in \{k-j, k-j+1, \dots, k\}$. Also gilt $x_0 = y_{j+0} = x = y_{j+k-k} = x_k$. Da $(y_n)_{n=0}^k$ eine ϵ-Kette ist gilt $d(f(y_n), y_{n+1}) < \epsilon$ für alle $n = 0, 1, \dots, k-1$. Dann gilt $d(f(x_n), x_{n+1}) = d(f(y_{j+n}), x_{j+n+1}) < \epsilon$ für alle $n \in \{0, 1, \dots, k-j-1\}$. Für $n = k-j$ gilt $d(f(x_n), x_{n+1}) = d(f(x_{k-j}), x_{k-j+1}) = d(f(y_{j+k-j}), y_{j+(k-j+1)-k}) = d(f(y_k), y_1) = d(f(y_0), y_1) < \epsilon$. Und es gilt $d(f(x_n), x_{n+1}) = d(f(y_{j+n}), x_{j+n+1}) < \epsilon$ für alle $n \in \{0, 1, \dots, k-j-1\}$. Also ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine periodische ϵ-Kette von x zu x und x ist ketten-wiederkehrend.

Sei x ein beliebiger ketten-wiederkehrender Punkt. Dann existiert per Definition für jedes ϵ eine ϵ-Kette die mit $x_0 = x$ durch x geht. □

Satz 3.7 (erster Teil von Exercise 1.9. im Buch)**.** *Für jedes $\delta > 0$ existiert ein $\eta > 0$, so dass für jede η-Kette $(x_n)_{n=0}^k$, alle Folgen $(y_n)_{n=0}^k$, die $d(x_n, y_n) < \eta, \forall n \in \{0, \dots, k\}$ erfüllen, selbst δ-Ketten sind.*

Proof. Sei $\delta > 0$ beliebig. Da f auf X stetig und X kompakt ist, ist f gleichmäßig stetig auf X. Also existiert ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $a, b \in X$ mit $d(a, b) < \epsilon$ gilt, dass $d(f(a), f(b)) < \frac{\delta}{3}$. Sei dann $\eta := \min\{\epsilon, \frac{\delta}{3}\}$ und $(x_n)_{n=0}^k$ eine η-Kette. Sei $(y_n)_{n=0}^k$ eine beliebige Folge, die $d(x_n, y_n) < \eta$ für alle $n \in \{0, \dots, k\}$ erfüllt. Dann gilt $d(f(y_n), y_{n+1}) \leq d(f(y_n), f(x_n)) + d(f(x_n), x_{n+1}) + d(x_{n+1}, y_{n+1}) < \frac{\delta}{3} + \eta + \eta \leq \frac{3\delta}{3} = \delta$ für alle $n \in \{0, \dots, k\}$. Also ist $(y_n)_{n=0}^k$ eine δ-Kette. □

Satz 3.8. *Ein Punkt ist ketten-wiederkehrend, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine periodische ϵ-Kette durch die ϵ-Umgebung von x geht.*

Proof. Sei $x \in X$ ein beliebiger Punkt, so dass für jedes $\epsilon > 0$ eine periodische ϵ-Kette durch die ϵ-Umgebung von x geht. Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig. Nach 3.7 existiert für ϵ ein $\eta > 0$, so dass für jede η-Kette $(y_n)_{n=0}^k$, alle Folgen $(x_n)_{n=0}^k$, die $d(x_n, y_n) < \eta$ für alle $n \in \{0, \dots, k\}$ erfüllen, selbst ϵ-Ketten sind. Es geht eine periodische η-Kette durch die η-Umgebung von x. Dann existiert ein Punkt $y \in \mathrm{B}(x, \eta)$ in der η-Umgebung von x, der ein Folgenglied aus einer periodischen η-Kette durch die η-Umgebung von x ist. Dann existiert eine periodische η-Kette von y nach y.[1] Sei $(y_n)_{n=0}^k$ eine periodische η-Kette von y nach y. Sei $x_0 := x$, $x_k := x$ und $x_i := y_i$ für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Dann ist $d(x_0, y_0) = d(x, y) < \eta$, $d(x_k, y_k) = d(x, y) < \eta$ und $d(x_i, y_i) = d(y_i, y_i) = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Also ist $(x_n)_{n=0}^k$ selbst eine ϵ-Kette. Da $(x_n)_{n=0}^k$ von $x_0 = x$ nach $x_k = x$ geht, ist $(x_n)_{n=0}^k$ eine periodische ϵ-Kette. Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt wurde, ist x ketten-wiederkehrend. □

Satz 3.9. *$CR(f)$ ist kompakt und invariant.*

Proof. $\mathrm{CR}(f)$ ist kompakt: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathrm{CR}(f)$ und $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ der Grenzwert der Folge. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass x_n für alle $n \geq N$ in der ϵ-Umgebung von x liegt. Da $x_n \in \mathrm{CR}(f)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ketten-wiederkehrende Punkte sind, geht dann auch eine ϵ-Kette durch die ϵ-Umgebung von x. Nach 3.8 ist x dann auch ketten-wiederkehrend und $x \in \mathrm{CR}(f)$. Also ist $\mathrm{CR}(f)$ abgeschlossen und somit kompakt.

$\mathrm{CR}(f)$ ist invariant: Zeige zuerst $f(\mathrm{CR}(f)) \subset \mathrm{CR}(f)$: Sei $x \in \mathrm{CR}(f)$ ein beliebiger ketten-wiederkehrender Punkt. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Da x ketten-wiederkehrend ist, existiert eine periodische ϵ-Kette von x zu x mit $x_0 = x$. Für das zweite Folgenglied x_1 gilt dann $d(f(x), x_1) = d(f(x_0), x_1) < \epsilon$. Also geht eine periodische ϵ-Kette durch die ϵ-Umgebung von $f(x)$ und $f(x) \in \mathrm{CR}(f)$ ist nach 3.8 auch ketten-wiederkehrend. Also gilt $f(\mathrm{CR}(f)) \subset \mathrm{CR}(f)$.

Zeige nun $\mathrm{CR}(f) \subset f(\mathrm{CR}(f))$: Sei $x \in \mathrm{CR}(f)$ ein beliebiger ketten-wiederkehrender Punkt. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Da f^{-1} eine stetige Funktion und X kompakt ist, ist f^{-1} auf X gleichmäßig stetig. Also existiert ein $\delta_0 > 0$, so dass für alle $a, b \in X$ mit $d(a, b) < \delta_0$ gilt, dass $d(f^{-1}(a), f^{-1}(b)) < \epsilon$. Sei $\delta := \min\{\epsilon, \delta_0\} > 0$. Da x ketten-wiederkehrend ist, existiert eine periodische δ-Kette von x zu x. Sei $(x_n)_{n=0}^k$ diese δ-Kette mit $x_0 = x_k = x$.

[1] Das folgt aus dem ersten Teil des Beweises von 3.6.

Dann ist $d(f(x_{n-1}), x_n) < \delta$. Also ist $d(x_{n-1}, f^{-1}(x)) = d(x_{n-1}, f^{-1}(x_n)) < \epsilon$. Also geht eine periodische δ-Kette durch die ϵ-Umgebung von $f^{-1}(x)$. Diese δ-Kette ist wegen $\delta \leq \epsilon$ auch eine ϵ-Kette und $f^{-1}(x) \in \mathrm{CR}(f)$ ist nach 3.8 ketten-wiederkehrend. Also gilt $\mathrm{CR}(f) \subset f(\mathrm{CR}(f))$. Insgesamt gilt also $\mathrm{CR}(f) = f(\mathrm{CR}(f))$ und $\mathrm{CR}(f)$ ist invariant. $\square$

Satz 3.10. *Es gilt* $\overline{P(f)} \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset CR(f)$.

Proof. $\overline{\mathrm{P}(f)} \subset \mathrm{L}(f)$: Sei $x \in \mathrm{P}(f)$. Nach 2.6 gilt dann $\mathrm{Orb}(x) = \omega(x)$ und da $x \in \mathrm{Orb}(x)$, folgt wegen $\mathrm{Orb}(x) = \omega(x) \subset \bigcup_{x\in X} \omega(x) \cup \alpha(x) \subset \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x) \cup \alpha(x)} = \mathrm{L}(f)$ auch $x \in \mathrm{L}(f)$. Also ist $\mathrm{P}(f) \subset \mathrm{L}(f)$. Da $\mathrm{L}(f)$ abgeschlossen ist, ist auch der Abschluss $\overline{\mathrm{P}(f)} \subset \mathrm{L}(f)$ eine Teilmenge der Limit-Menge.

$\mathrm{L}(f) \subset \Omega(f)$: Sei $y \in \bigcup_{x\in X} \omega(x) \cup \alpha(x)$ beliebig. Dann existiert ein $x \in X$, so dass $y \in (\omega(x) \cup \alpha(x))$. Also existiert eine Folge von natürlichen Zahlen $n_i \to +\infty$, so dass $f^{n_i}(x) \to y$ oder $f^{-n_i}(x) \to y$. Sei V eine Umgebung von y. Falls $y \in \omega(x)$ liegt, also $f^{n_i}(x) \to y$, gibt es ein $I \in \mathbb{N}$, so dass $f^{n_i}(x) \in V$ für alle $i \geq I$. Da $n_i \to +\infty$, gibt es ein $j > I$, so dass $n_j - n_I \geq 1$. Also existiert ein $m := n_j - n_I \geq 1$, so dass $f^{n_I}(x) \in V$ und $f^m(f^{n_I}(x)) = f^{n_j - n_I}(f^{n_I}(x)) = f^{n_j}(x) \in V$. Dann ist $f^{n_I}(x) \in V \cap f^m(V)$. Falls $y \in \alpha(x)$ liegt, also $f^{-n_i}(x) \to y$, gibt es ein $I \in \mathbb{N}$, so dass $f^{-n_i}(x) \in V$ für alle $i \geq I$. Da $n_i \to +\infty$, gibt es ein $j > I$, so dass $n_j - n_I \geq 1$. Also existiert ein $m := n_j - n_I \geq 1$, so dass $f^{-n_j}(x) \in V$ und $f^m(f^{-n_j}(x)) = f^{n_j - n_I}(f^{-n_j}(x)) = f^{-n_I}(x) \in V$. Also ist in allen Fällen $y \in \Omega(f)$ nicht-wandernd und es gilt $\bigcup_{x\in X} \omega(x) \cup \alpha(x) \subset \Omega(f)$. Da $\Omega(f)$ abgeschlossen ist gilt dann auch $\mathrm{L}(f) = \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x) \cup \alpha(x)} \subset \Omega(f)$.

$\Omega(f) \subset \mathrm{CR}(f)$: Sei $x \in \Omega(f)$ ein beliebiger nicht-wandernder Punkt. Dann existiert für jede Umgebung U von x ein $n \geq 1$, so dass $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Da f eine stetige Funktion und X kompakt ist, ist f auf X gleichmäßig stetig. Also existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $a, b \in X$ mit $d(a, b) < \delta$ gilt, dass $d(f(a), f(b)) < \epsilon$. Sei V die $(\min\{\delta, \epsilon\})$-Umgebung um x. Da x nicht-wandernd ist, existiert ein $n \geq 1$, so dass $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$. Also existiert ein $y \in f^n(V) \cap V$. Sei also $x_0 := x$ und $x_n := x$. Sei dann $x_i := f^i(y)$ für alle $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Dann ist $d(f(x_0), x_1) = d(f(x), f(y)) < \epsilon$, da $d(x, y) < \delta$. Es ist $d(f(x_i), x_{i+1}) = d(f(f^i(y)), f^{i+1}(y)) = 0 < \epsilon$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Und $d(f(x_{n-1}), x_n) = d(f(f^{n-1}(y)), x) = d(f^n(y), x) < \epsilon$, da $d(f^n(y), x) < \delta$, weil $f^n(y) \in V$. Also existiert eine ϵ-Kette von x zu x und $x \in \mathrm{CR}(f)$ ist ketten-wiederkehrend. Dann gilt $\Omega(f) \subset \mathrm{CR}(f)$. $\square$

4 Zerlegung

Satz 4.1. *Sei $\Lambda \subset X$ eine nichtleere, kompakte und invariante Teilmenge von X. Dann ist die Familie $\{(f|_\Lambda)^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ der Iterationen von $f|_\Lambda$ (f eingeschränkt auf Λ) ein Dynamisches System auf Λ.*

Proof. Λ ist kompakt und nichtleer. Da Λ invariant unter f ist, ist $f|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$ bijektiv. Da Einschränkungen von stetigen Funktionen stetig sind, ist $f|_\Lambda$ ein Homöomorphismus. $\square$

Definition 4.2. *Eine Teilmenge $\Lambda \subset X$ von X heißt minimale Menge, wenn Λ nichtleer, kompakt und invariant ist aber keine echte Teilmenge von Λ nichtleer, kompakt und invariant ist.*

Satz 4.3. *Ein periodischer Orbit ist eine minimale Menge.*

Proof. Sei $x \in \mathrm{P}(f)$ ein beliebiger periodischer Punkt in X und $\mathrm{Orb}(x)$ der dazugehörige periodische Orbit. Da $x \in \mathrm{Orb}(x)$, ist der Orbit nichtleer. Da x periodisch ist, gilt nach 2.6 $\omega(x) = \mathrm{Orb}(x)$. Nach 2.7 ist $\omega(x)$ kompakt. Also ist $\mathrm{Orb}(x)$ kompakt. $\mathrm{Orb}(x)$ ist nach 1.16 invariant.

Sei $\Lambda \subset \mathrm{Orb}(x)$ eine beliebige nichtleere, kompakte und invariante Teilmenge von Λ. Dann existiert ein Element $y \in \Lambda$. Nach 1.18 ist Λ als invariante Menge eine Vereinigung von Orbits. Da $y \in \Lambda$ liegt, existiert ein Orbit $O \subset \Lambda$, der y enthält. Dann ist nach 1.6 dieser Orbit O genau der Orbit $\mathrm{Orb}(y)$ von y. Da $\Lambda \subset \mathrm{Orb}(x)$, ist $y \in \mathrm{Orb}(x)$. Also ist nach 1.6 auch $\mathrm{Orb}(y) = \mathrm{Orb}(x)$. Dann ist $\mathrm{Orb}(x) \subset \Lambda$ und es folgt $\mathrm{Orb}(x) = \Lambda$. Also ist $\mathrm{Orb}(x)$ die einzige nichtleere, kompakte und invariante Teilmenge von $\mathrm{Orb}(x)$. Dann ist keine echte Teilmenge von $\mathrm{Orb}(x)$ nichtleer, kompakt und invariant. Also ist $\mathrm{Orb}(x)$ minimal. $\square$

Im Folgenden werden wichtige Begriffe für das *Lemma von Zorn* (4.4) eingeführt. Sei dazu S eine Menge. Sei $\prec$ eine zweistellige Relation, die für manche Paare von Elementen aus S definiert ist. Eine zweistellige Relation $\prec$ ist *partiell geordnet*, falls (1) $x \prec x$ für alle $x \in S$; (2) aus $x \prec y$ und $y \prec x$ folgt $x = y$; und (3) aus $x \prec y$ und $y \prec z$ folgt $x \prec z$. Da $\prec$ nicht unbedingt für alle Paare von Elementen aus s definiert ist, sind manche Paare (x, y) unvergleichbar und es gilt weder $x \prec y$ noch $y \prec x$. Eine typische partielle Ordnung ist die Teilmengenrelation $\subset$. Eine Teilmenge $A \subset S$ ist *total geordnet* (bezüglich $\prec$), falls für jedes Paar (x, y) aus Elementen aus A entweder $x \prec y$ oder $y \prec x$ gilt. Sei $z \in S$. z ist ein *minimales Element* von S, falls das Paar (x, z) für jedes $x \in S$ entweder nicht vergleichbar ist oder $z \prec x$ gilt.

Lemma 4.4 (Lemma von Zorn)**.** *Wenn jede total geordnete Teilmenge A von S eine untere Schranke besitzt, hat S ein minimales Element.*

Proof. Das Lemma von Zorn ist äquivalent zum Auswahlaxiom.[2] $\square$

Theorem 4.5 (Theorem 1.3. im Buch)**.** *Jede nichtleere, kompakte und invariante Menge enthält eine minimale Menge.*

Proof. Sei Γ eine beliebige, nichtleere, kompakte und invariante Menge unter f. Sei $\mathcal{C}$ die Menge der nichtleeren, kompakten und invarianten Teilmengen von Γ unter f. Die Teilmengenrelation $\leq$ ist auf $\mathcal{C}$ eine partielle Ordnung, da (1) $A \subset A$ für alle Mengen $A \in \mathcal{C}$ gilt; (2) für alle Mengen $A, B \in \mathcal{C}$ aus $A \subset B$ und $B \subset A$ folgt, dass $A = B$; und (3) für alle Mengen $A, B, C \in \mathcal{C}$ aus $A \subset B$ und $B \subset C$ auch $A \subset C$ folgt. Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige total geordnete Teilmenge von $\mathcal{C}$. Falls $\mathcal{A} = \emptyset$, dann ist Γ eine minimale

[2]Diese Äquivalenz wird hier nicht bewiesen aber eine Beweisskizze befindet sich auf der Wikipedia.

Menge. Falls $\mathcal{A} \neq \emptyset$, sei $A = \bigcap_{B \in \mathcal{A}} B$ die Schnittmenge aller Elemente aus $\mathcal{A}$. Dann ist A als Schnitt von nichtleeren, invarianten und kompakten Mengen selbst nichtleer, invariant und kompakt. Da A eine Teilmenge von allen Mengen $B \in \mathcal{A}$ ist, gilt $A \subset B$ für alle $B \in \mathcal{A}$ und A ist eine untere Schranke der total geordneten Menge $\mathcal{A}$. Da $\mathcal{A}$ eine beliebige, total geordnete Teilmenge von $\mathcal{C}$ ist, besitzt jede total geordnete Teilmenge von $\mathcal{C}$ ein minimales Element.

Dann besitzt $\mathcal{C}$ nach dem Lemma von Zorn 4.4 ein minimales Element, also eine Menge $C \in \mathcal{C}$, so dass für alle Mengen $B \in \mathcal{C}$ gilt $C \subset B$. C ist wie alle Mengen in $\mathcal{C}$ nichtleer, invariant und kompakt. Angenommen C besitzt eine echte Teilmenge $D \subset C$, die nichtleer, invariant und kompakt ist. Dann ist $D \in \mathcal{C}$. Aber da D eine echte Teilmenge von C ist, gilt $C \not\subset D$. Das steht im Widerspruch dazu, dass C das minimale Element aus $\mathcal{C}$ ist. Also besitzt C keine echte Teilmenge, die nichtleer, invariant und kompakt ist und ist somit eine minimale Menge. □

Satz 4.6. *Die Menge aller wiederkehrenden Punkte $R(f)$ ist nichtleer.*

Proof. X ist nichtleer, kompakt und invariant und enthält deshalb nach 4.5 eine minimale Menge Λ. Sei $x \in \Lambda$ beliebig. Nach 2.7 ist $\omega(x)$ nichtleer, kompakt und invariant. Da Λ eine minimale Menge ist, muss $\Lambda = \omega(x)$ gelten. Dann ist $x \in \omega(x)$. Also ist $x \in \mathrm{R}(f)$. Da $x \in \Lambda$ beliebig gewählt wurde, ist $\Lambda \subset \mathrm{R}(f)$. Also enthält $\mathrm{R}(f)$ die nichtleer Teilmenge Λ und ist deshalb selbst nichtleer. □

Da $\mathrm{R}(f)$ nichtleer ist, folgt nach 3.4 wegen $\mathrm{R}(f) \subset \Omega(f)$, dass die Menge der nichtwandernden Punkte $\Omega(f)$ nichtleer ist.

Theorem 4.7 (Theorem 1.4. im Buch)**.** *Eine kompakte, invariante und nichtleere Menge Λ ist genau dann minimal, wenn der Orbit von jedem $x \in \Lambda$ dicht in Λ liegt.*

Proof. Sei Λ eine minimale Menge. Sei $x \in \Lambda$ beliebig. Nach 1.18 ist Λ als invariante Menge eine Vereinigung von Orbits. Da $x \in \Lambda$ liegt, existiert ein Orbit $O \subset \Lambda$, der x enthält. Dann ist nach 1.6 dieser Orbit O dann genau der Orbit $\mathrm{Orb}(x)$ von x. Also ist $\mathrm{Orb}(x) \subset \Lambda$ und da Λ kompakt ist, gilt auch $\overline{\mathrm{Orb}(x)} \subset \Lambda$. Da $x \in \overline{\mathrm{Orb}(x)}$ liegt, ist $\overline{\mathrm{Orb}(x)}$ nichtleer. Da $\overline{\mathrm{Orb}(x)}$ abgeschlossen und X kompakt ist, ist $\overline{\mathrm{Orb}(x)}$ kompakt. Nach 1.16 ist $\mathrm{Orb}(x)$ invariant und nach 1.19 ist dann auch $\overline{\mathrm{Orb}(x)}$ invariant. Da Λ minimal ist, muss $\Lambda = \overline{\mathrm{Orb}(x)}$ gelten, da sonst $\overline{\mathrm{Orb}(x)}$ eine echte Teilmenge von Λ ist, die nichtleer, kompakt und invariant ist. Also ist der Abschluss $\overline{\mathrm{Orb}(x)}$ des Orbits von x gleich Λ. Deshalb liegt der Orbit $\mathrm{Orb}(x)$, dicht in Λ. Da $x \in \Lambda$ beliebig gewählt wurde, liegt also der Orbit von jedem $x \in \Lambda$ dicht.

Sei nun Λ eine kompakte, invariante und nichtleere Menge, die nicht minimal ist. Da Λ kompakt, invariant und nichtleer aber nicht minimal ist, muss Λ eine echte Teilmenge enthalten, die kompakt, invariant und nichtleer ist. Sei $\Lambda_1 \subset \Lambda$ diese kompakte, invariante und nichtleere echte Teilmenge von Λ. Sei $x \in \Lambda_1$ beliebig. Da $x \in \Lambda_1$ liegt und Λ_1 invariant ist, existiert nach 1.18 ein Orbit $O \subset \Lambda_1$, der x enthält. Dann ist nach 1.6 dieser Orbit O genau der Orbit $\mathrm{Orb}(x)$ von x. Also ist $\mathrm{Orb}(x) \subset \Lambda_1$ und da Λ_1 kompakt ist, gilt auch $\overline{\mathrm{Orb}(x)} \subset \Lambda_1$. Da Λ_1 eine echte Teilmenge ist, gilt $\Lambda_1 \neq \Lambda$. Also ist $\overline{\mathrm{Orb}(x)} \neq \Lambda$ und der Orbit von x liegt nicht dicht in Λ. □

Definition 4.8. *Eine Teilmenge $\Lambda \subset X$ heißt nirgends dicht in X, wenn der Abschluss $\overline{\Lambda}$ kein Inneres in X hat, also int($\overline{\Lambda}$) $= \emptyset$.*

Theorem 4.9 (Theorem 1.5. im Buch)**.** *Angenommen X ist zusammenhängend. (X und $\emptyset$ sind die einzigen offenen und abgeschlossenen Teilmengen von X.) Dann ist jede minimale Menge unter f entweder ganz X oder nirgends dicht in X.*

Proof. Sei Λ eine minimale Menge. Λ ist nichtleer, kompakt und invariant. $\partial(\Lambda)$ ist abgeschlossen und deshalb kompakt und nach 1.19 invariant. Falls $\partial(\Lambda) = \emptyset$, gilt $\Lambda = \partial(\Lambda) \cup \text{int}(\Lambda) = \text{int}(\Lambda)$, weil Λ abgeschlossen ist. Also ist Λ offen. Dann ist Λ offen, abgeschlossen und nichtleer. Weil X zusammenhängend ist, gilt dann $X = \Lambda$. Falls $\partial(\Lambda) \neq \emptyset$, ist $\partial(\Lambda)$ kompakt, weil $\partial(\Lambda)$ abgeschlossen ist, invariant nach 1.19, und nichtleer. Weil Λ minimal ist, kann $\partial(\Lambda) \subset \Lambda$ keine echte Teilmenge sein und es gilt $\partial(\Lambda) = \Lambda$ Dann hat $\Lambda = \overline{\Lambda}$ kein Inneres in X und ist deshalb nirgends dicht in X. □

Definition 4.10. *Eine kompakte, invariante Menge Λ wird unzerlegbar (indecomposable) genannt, wenn Λ nicht in eine disjunkte Vereinigung von zwei kompakten, invarianten, nichtleeren Mengen zerlegt werden kann.*

Satz 4.11. *Eine minimale Menge ist unzerlegbar.*

Proof. Sei $\Lambda \subset X$ eine beliebige minimale Menge. Angenommen Λ ist nicht unzerlegbar. Dann existiert zwei disjunkte, kompakte, invariante und nichtleere Mengen A, B, so dass $A \cup B = \Lambda$ Da A und B jeweils nichtleer sind, sind A und B echte Teilmengen von Λ. Dann hat Λ zwei echte Teilmengen $A \subset \Lambda$ und $B \subset \Lambda$, die kompakt, invariant und nichtleer sind. Das ist ein Widerspruch dazu, dass Λ minimal ist. □

Eine generellere Eigenschaft, aus der die Unzerlegbarkeit folgt, ist die topologische Transitivität:

Definition 4.12. *Eine kompakte invariante Menge $\Lambda \subset X$ von f heißt (topologisch) transitiv, wenn ein $x \in \Lambda$ existiert, so dass $\omega(x) = \Lambda$.*

Satz 4.13. *Jede topologisch transitive Menge ist unzerlegbar.*

Proof. Sei $\Lambda \subset X$ eine topologisch transitive Menge. Sei $x \in \Lambda$, so dass $\omega(x) = \Lambda$. Angenommen Λ ist nicht unzerlegbar. Dann kann Λ in eine disjunkte Vereinigung von zwei kompakten, invarianten und nichtleeren Mengen zerlegt werden. Da die Mengen eine disjunkte Vereinigung von Λ bilden, muss x in genau einer der beiden Mengen liegen. Sei A die kompakte, invariante und nichtleere Menge, die x enthält und B die andere kompakte, invariante und nichtleere Menge, so dass A und B disjunkt sind und$\Lambda = A \cup B$ gilt. Sei $y \in B$ ein beliebiges Element aus B. Weil B eine Teilmenge von Λ ist, ist $y \in \Lambda = \omega(x)$. Also existiert eine Folge von natürlichen Zahlen $n_i \to +\infty$, so dass $f^{n_i}(x) \to y$. Da A invariant ist, existiert nach 1.18 ein Orbit $O \subset A$, so dass $x \in O$. Dann ist nach 1.6 $O = \text{Orb}(x)$. Also ist $\text{Orb}(x) \subset A$. Dann ist $f^{n_i}(x) \in A$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Es existiert mit $f^{n_i}(x) \to y$ eine Folge in A, die gegen y konvergiert. Da A kompakt ist, ist $y \in \overline{A} = A$. Dann ist $y \in A \cap B$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass A und B disjunkt sind. Also ist Λ unzerlegbar. □

Theorem 4.14 (Birkhoff, Theorem 1.6. im Buch)**.** *Sei Λ eine kompakte, invariante Menge. Folgende drei Eigenschaften sind äquivalent:*

1. *Λ ist transitiv*

2. *Für zwei beliebige offene (nichtleere) Teilmengen $U, V \subset \Lambda$, gibt es ein $n \geq 1$, so dass $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$*

3. *Es gibt ein $x \in \Lambda$, dessen (entweder negativer oder) positiver Orbit dicht in Λ liegt.*

Proof. 1. $\Rightarrow$ 2.: Sei Λ topologisch transitiv und $x \in \Lambda$, so dass $\omega(x) = \Lambda$. Seien $U, V \subset \Lambda$ zwei beliebige offene Teilmengen von Λ. Sei $u \in U$ ein beliebiges Element aus U. Weil U offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$, so dass die ϵ-Umgebung von u in U liegt. Es existiert auch eine Folge von natürlichen Zahlen $n_i \to +\infty$, so dass $f^{n_i}(x) \to u$, weil $U \subset \Lambda = \omega(x)$. Dann existiert für ϵ auch ein $I \geq 1$, so dass $f^{n_i}(x)$ für alle $i \geq I$ in der ϵ-Umgebung von u liegt. Sei $v \in V$ ein beliebiges Element aus V. Weil auch V offen ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass die δ-Umgebung von v in V liegt. Außerdem existiert eine Folge von natürlichen Zahlen $n_j \to +\infty$, so dass $f^{n_j}(x) \to v$, weil $V \subset \Lambda = \omega(x)$. Dann existiert für δ auch ein $J \geq 1$, so dass $f^{n_j}(x)$ für alle $j \geq J$ in der δ-Umgebung von v liegt. Weil $n_j \to +\infty$ geht, existiert ein $j_0 \geq J$, so dass $n_{j_0} > n_I$. Dann ist $f^{n_I}(x)$ in der ϵ-Umgebung von u und somit in U. Außerdem ist $f^{n_{j_0} - n_I}(f^{n_I}(x)) = f^{n_{j_0}}(x)$ in der δ-Umgebung von v und somit in V. Also existiert ein $(n_{j_0} - n_I) \geq 1$, so dass $f^{n_I}(x) \in f^{(n_{j_0} - n_I)}(U) \cap V$. Dann ist $f^{(n_{j_0} - n_I)}(U) \cap V \neq \emptyset$.

2. $\Rightarrow$ 3.: Jeder kompakte, metrische Raum ist separabel. Das heißt, dass es eine höchstens abzählbare Teilmenge S gibt, die in diesem Raum dicht liegt. Mit Hilfe der höchstens abzählbaren Menge S kann eine abzählbare Basis[3] konstruiert werden. Also besitzt jeder kompakte, metrische Raum eine abzählbare Basis. Da $\Lambda \subset X$ kompakt ist, besitzt Λ eine abzählbare Basis. Sei $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \dots\}$ eine abzählbare Basis von Λ. Das heißt, dass $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \dots\}$ eine höchstens abzählbare Menge von offenen Mengen $V_i \subset \Lambda$ ist, so dass jede offene Menge in X als Vereinigung von diesen offenen Mengen V_i geschrieben werden kann. Weil f^n für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig ist und beliebige Vereinigungen von offenen Mengen offen sind, ist die Menge $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(V_i)$ für alle $i \geq 1$ offen in Λ. Sei U eine beliebige offene Menge in Λ. Da U und V_i offen sind, gibt es wegen 2. ein $n \geq 1$, so dass $f^n(U) \cap V_i \neq \emptyset$. Dann ist auch $U \cap f^{-n}(V_i) \neq \emptyset$. Also gibt es für jede offene Menge U ein $n \geq 1$, so dass $U \cap f^{-n}(V_i) \neq \emptyset$. Also liegt $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(V_i)$ dicht in Λ. Nach dem Satz von Baire ist in einem vollständigen metrischen Raum jeder abzählbare Durchschnitt von offenen, dichten Teilmengen selbst dicht. X ist als kompakter, metrischer Raum vollständig und auch Λ ist als kompakte Teilmenge von X vollständig. $\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(V_i)$ ist ein abzählbarer Durchschnitt von offenen, dichten

[3] Eine abzählbare Basis $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ einer Menge $A \subset X$ ist eine Menge von offenen Teilmengen $B_i \subset A$, so dass jede offene Menge $O \subset A$ als Vereinigung von Elementen $B_i \in \mathcal{B}$ aus der abzählbaren Basis geschrieben werden kann.

Teilmengen $(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(V_i))_{i\in\mathbb{N}}$ von Λ. Also ist $\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(V_i)$ dicht in Λ und somit auch nichtleer. Sei $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(V_i)$ beliebig. Dann gibt es für jedes $i \geq 1$ ein $n \geq 1$, so dass $x \in f^{-n}(V_i)$. Dann ist $f^n(x) \in V_i$. Also ist für jedes $i \geq 1$ ein Element von $\mathrm{Orb}^+(x)$ in V_i und es gilt $\mathrm{Orb}^+(x) \cap V_i \neq \emptyset$. Da jede offene Menge in Λ als Vereinigung von V_i aus der abzählbaren Basis $\{V_1, V_2, \dots\}$ von Λ dargestellt werden kann, liegt $\mathrm{Orb}^+(x)$ dicht in Λ. Also existiert ein $x \in \Lambda$, dessen positiver Orbit dicht in Λ liegt.

3. $\Rightarrow$ 1.: Sei $x \in \Lambda$, so dass der positive Orbit von x dicht in Λ liegt, also $\Lambda = \overline{\mathrm{Orb}^+(x)}$ gilt. Da Λ invariant ist, liegt auch $f^{-1}(x) \in \Lambda = \overline{\mathrm{Orb}^+(x)}$.

Falls $f^{-1}(x) \in \mathrm{Orb}^+(x)$ liegt, gibt es ein $n \geq 1$, so dass $f^{-1}(x) = f^n(x)$ und x ist periodisch. Also ist nach 2.6 $\mathrm{Orb}(x) = \omega(x)$ und nach 2.7 gilt $\mathrm{Orb}(x) = \overline{\mathrm{Orb}(x)}$. Für periodische x gilt nach 1.12 $\mathrm{Orb}^+(x) = \mathrm{Orb}(x)$. Also ist $\Lambda = \overline{\mathrm{Orb}^+(x)} = \overline{\mathrm{Orb}(x)} = \mathrm{Orb}(x) = \omega(x)$ und Λ ist topologisch transitiv.

Falls $f^{-1}(x) \notin \mathrm{Orb}^+(x)$, gilt $f^{-1}(x) \in \overline{\mathrm{Orb}^+(x)} \setminus \mathrm{Orb}^+(x)$. Also muss eine Folge in $\mathrm{Orb}^+(x)$ existieren die gegen $f^{-1}(x)$ konvergiert. Dann existiert auch eine Folge von natürlichen Zahlen $n_i \to +\infty$, so dass $f^{n_i}(x) \to f^{-1}(x)$. Dann ist $f^{-1}(x) \in \omega(x)$. Da $\omega(x)$ nach 2.7 invariant ist, gilt dann $\omega(x) \supset \mathrm{Orb}(f^{-1}(x)) = \mathrm{Orb}(x)$. Dann ist $\Lambda = \overline{\mathrm{Orb}^+(x)} \subset \overline{\mathrm{Orb}(x)} \subset \overline{\omega(x)} = \omega(x)$, weil $\omega(x)$ nach 2.7 abgeschlossen ist. Λ enthält x und weil Λ kompakt und invariant ist, gilt dann auch $\overline{\mathrm{Orb}(x)} \subset \Lambda$. Weil alle Elemente in $\omega(x)$ Grenzwerte von Folgen aus $\mathrm{Orb}(x)$ sind, gilt $\omega(x) \subset \overline{\mathrm{Orb}(x)}$. Dann ist $\omega(x) \subset \overline{\mathrm{Orb}(x)} \subset \Lambda$. Also ist $\Lambda = \omega(x)$ und Λ ist in beiden Fällen topologisch transitiv. $\square$

Definition 4.15. *Zwei Punkte heißen ketten-äquivalent (chain equivalent), wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine ϵ-Kette von x zu y und eine ϵ-Kette von y zu x existiert.*

Satz 4.16. *Ketten-Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf $CR(f)$, die im Folgenden mit $x \sim y$ bezeichnet wird.*

Proof. Reflexivität: Sei $x \in \mathrm{CR}(f)$ ein beliebiger ketten-wiederkehrender Punkt. Dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ eine ϵ-Kette von x zu x. Also ist $x \sim x$.

Symmetrie: Seien $x, y \in \mathrm{CR}(f)$ zwei ketten-wiederkehrende Punkte, so dass $x \sim y$. Dann existieren für jedes $\epsilon > 0$ eine ϵ-Kette von x zu y und eine ϵ-Kette von y zu x. Dann ist auch $y \sim x$.

Transitivität: Seien $x, y, z \in \mathrm{CR}(f)$ drei ketten-wiederkehrende Punkte, so dass $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann existieren wegen $x \sim y$ für jedes $\epsilon > 0$ eine ϵ-Kette von x zu y und eine ϵ-Kette von y zu x. Außerdem existieren wegen $y \sim z$ für jedes $\epsilon > 0$ eine ϵ-Kette von y zu z und eine ϵ-Kette von z zu y. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Sei $(x_n)_{n=0}^{k}$ die ϵ-Kette von x zu y. Sei $(y_n)_{n=0}^{j}$ die ϵ-Kette von y zu z. Sei $a_n := x_n$ für alle $n \in \{0, \dots, k\}$ und $a_n := y_{n+k}$ für alle $n \in \{k+0, \dots, k+j\}$. Dann ist $(a_n)_{n=0}^{k+j}$ eine ϵ-Kette von x zu z. Sei $(z_n)_{n=0}^{i}$ die ϵ-Kette von z zu y. Sei $(u_n)_{n=0}^{l}$ die ϵ-Kette von y zu x. Sei $b_n := z_n$ für alle $n \in \{0, \dots, i\}$ und $b_n := y_{n+i}$ für alle $n \in \{i+0, \dots, l+i\}$. Dann ist $(a_n)_{n=0}^{l+i}$ eine ϵ-Kette von x zu z. Also ist $x \sim z$. $\square$

Definition 4.17. *Die Äquivalenzklassen der Ketten-Äquivalenz werden ketten-transitive Klassen (chain transitive class) oder einfach Ketten-Klassen (chain class) von f genannt.*

Satz 4.18. *Jede Ketten-klasse ist kompakt und invariant unter f.*

Proof. kompakt: Sei A eine beliebige Ketten-Klasse und $a \in A$ ein beliebiges Element aus der Ketten-Klasse A. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in A. Sei $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ der Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann sei $\epsilon_0 := \frac{\epsilon}{2} > 0$. Da f eine stetige Funktion und X kompakt ist, ist f auf X gleichmäßig stetig. Also existiert für $\epsilon_0 > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $a, b \in X$ mit $d(a, b) < \delta$ gilt, dass $d(f(a), f(b)) < \epsilon_0$. Sei $\delta_0 := \min\{\delta, \epsilon_0\} > 0$. Für δ_0 existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, x) < \delta_0$ für alle $n \geq N$ gilt. Da $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt $x_N \sim a$. Also existiert eine δ_0-Kette von a zu x_N und eine δ_0-Kette von x_N zu a. Sei $(x_n)_{n=0}^k$ eine δ_0-Kette von a zu x_N und $(y_n)_{n=0}^j$ eine δ_0-Kette von x_N zu a. Sei $a_k := x$ und $a_i := x_i$ für $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Dann ist $d(f(a_{k-1}), a_k) = d(f(x_{k-1}), x) \leq d(f(x_{k-1}), x_k) + d(x_N, x) < \delta_0 + \delta_0 \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Für $n \in \{0, 1, \ldots, k-2\}$ gilt $d(f(a_n), a_{n+1}) = d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta_0 \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$, weil $(x_n)_{n=0}^k$ eine δ_0-Kette ist. Dann ist $(a_n)_{n=0}^k$ eine ϵ-Kette von a zu x.

Sei $b_0 := x$ und $b_i := y_i$ für $i \in \{1, \ldots, j\}$. Dann ist $d(f(b_0), b_1) = d(f(x), y_1) \leq d(f(x), f(y_0)) + d(f(y_0), y_1)) \leq d(f(x), f(x_N)) + d(f(y_0), y_1)) < \epsilon_0 + \delta_0 \leq \epsilon_0 + \epsilon_0 = \epsilon$, weil $d(x, x_N) < \delta_0$. Für $n \in \{1, 2, \ldots, j-1\}$ gilt $d(f(y_n), y_{n+1}) < \delta_0 \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$, weil $(y_n)_{n=0}^j$ eine δ_0-Kette ist. Also ist $(b_n)_{n=0}^j$ eine ϵ-Kette von x zu a. Also ist $x \in [a] = A$ und A ist abgeschlossen und somit kompakt.

invariant: Sei A eine beliebige Ketten-Klasse und $a \in A$ ein beliebiges Element aus der Ketten-Klasse A. Zeige zuerst $f(A) \subset A$: Sei $x \in A$ ein beliebiges Element aus der Ketten-Klasse A. Sei $\epsilon > 0$ beliebig Sei $x_0 := x$ und $x_1 := f(x)$. Dann ist $d(f(x0), x_1) = d(f(x), f(x)) = 0 < \epsilon$. Also ist $(x_n)_{n=0}^1$ eine ϵ-Kette von x zu $f(x)$. Sei $\epsilon_0 := \frac{\epsilon}{2}$. Da f^{-1} eine stetige Funktion und X kompakt ist, ist f^{-1} auf X gleichmäßig stetig. Also existiert für $\epsilon_0 > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $a, b \in X$ mit $d(a, b) < \delta$ gilt, dass $d(f^{-1}(a), f^{-1}(b)) < \epsilon_0$. Sei $\delta_0 := \min\{\delta, \epsilon_0\} > 0$. $x \in A \subset \mathrm{CR}(f)$ ist ein ketten-wiederkehrender Punkt. Da $\mathrm{CR}(f)$ invariant ist, ist $f(x)$ auch ein ketten-wiederkehrender Punkt. Also existiert für δ_0 eine periodische δ_0-Kette von $f(x)$ nach $f(x)$. Sei $(y_n)_{n=0}^k$ eine periodische δ_0-Kette von $f(x)$ nach $f(x)$. Sei $a_{k-1} := x$ und $a_i := y_i$ für $i \in \{0, 1, \ldots, k-2\}$. Wegen $d(f(y_{k-1}), f(x)) = d(f(y_{k-1}), y_k) < \delta_0$ ist $d(y_{k-1}, x) < \epsilon_0$. Deshalb ist $d(f(a_{k-2}), a_{k-1}) = d(f(y_{k-2}), x) \leq d(f(y_{k-2}), y_{k-1}) + d(y_{k-1}, x) < \delta_0 + \epsilon_0 \leq \epsilon$. Also ist $(a_n)_{n=0}^{k-1}$ eine ϵ-Kette von $f(x)$ zu x. Dann ist $x \sim f(x)$ und es gilt $f(x) \in A$. Also gilt $f(A) \subset A$.

Zeige nun $A \subset f(A)$: Sei $x \in A$ ein beliebiges Element aus der Ketten-Klasse A. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Sei $x_0 := f^{-1}(x)$ und $x_1 := x$. Dann ist $d(f(f^{-1}(x)), x_1) = d(x, x) = 0 < \epsilon$. Also ist $(x_n)_{n=0}^1$ eine ϵ-Kette von $f^{-1}(x)$ zu x.

Sei $\epsilon_0 := \frac{\epsilon}{2}$. Da f^{-1} eine stetige Funktion und X kompakt ist, ist f^{-1} auf X gleichmäßig stetig. Also existiert für $\epsilon_0 > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $a, b \in X$ mit $d(a, b) < \delta$ gilt, dass $d(f^{-1}(a), f^{-1}(b)) < \epsilon_0$. Sei $\delta_0 := \min\{\delta, \epsilon_0\} > 0$. $x \in A \subset \mathrm{CR}(f)$

ist ein ketten-wiederkehrender Punkt. Also existiert für δ_0 eine periodische δ_0-Kette von x nach x. Sei $(y_n)_{n=0}^{k}$ eine periodische δ_0-Kette von x nach x. Da $\mathrm{CR}(f)$ invariant ist, ist $f^{-1}(x)$ auch ein ketten-wiederkehrender Punkt. Sei $a_{k-1} := f^{-1}(x)$ und $a_i := y_i$ für $i \in \{0, 1, \ldots, k-2\}$. Wegen $d(f(y_{k-1}), x) = d(f(y_{k-1}), y_k) < \delta_0$ ist $d(y_{k-1}, f^{-1}(x)) < \epsilon_0$. Deshalb ist $d(f(a_{k-2}), a_{k-1}) = d(f(y_{k-2}), f^{-1}(x)) \leq d(f(y_{k-2}), y_{k-1}) + d(y_{k-1}, f^{-1}(x)) < \delta_0 + \epsilon_0 \leq \epsilon$. Für $i \in \{0, 1, \ldots, k-2\}$ ist $d(f(a_i), a_{i+1}) < \delta_0 < \epsilon$. Also ist $(a_n)_{n=0}^{k-1}$ eine ϵ-Kette von x zu $f^{-1}(x)$. Dann ist $x \sim f^{-1}(x)$ und es gilt $f^{-1}(x) \in A$. Insgesamt ist $f(A) = A$ und jede Ketten-Klasse ist invariant. □

Theorem 4.19 (Theorem 1.7. im Buch)**.** *Sei C eine Ketten-Klasse von f. Dann gilt:*

1. *für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für jedes $x \in C$ jede periodische δ-Kette durch x in der ϵ-Umgebung $B(C, \epsilon)$ von C liegt.*

2. *C ist unzerlegbar.*

Proof. 1.: Sei C eine Ketten-Klasse von f. Angenommen es gibt ein $\epsilon_0 > 0$ für das kein $\delta > 0$ existiert, so dass für jedes $x \in C$ jede periodische δ-Kette durch x in der ϵ-Umgebung $\mathrm{B}(C, \epsilon)$ von C liegt.[4] Dann gilt, dass für jedes $\delta > 0$ ein $x \in C$ existiert, so dass eine periodische δ-Kette durch x nicht in der ϵ-Umgebung $\mathrm{B}(C, \epsilon)$ von C liegt. Wähle nun $\delta = \frac{1}{n}$ für jedes $n \geq 1$.[5] Dann existiert für jedes $n \geq 1$ ein Punkt $x_0^n \in C$ und eine periodische $(1/n)$-Kette $(x_k^n)_{k=0}^{j_n}$ durch $x_0^n \in C$ mit Folgengliedern $x_{k_n}^n \notin \mathrm{B}(C, \epsilon_0)$, die nicht in der ϵ-Umgebung von C liegen.[6] (Die periodisch $(1/n)$-Kette ist eine periodische δ-Kette durch x_0^n mit $\delta = \frac{1}{n}$.) Da X kompakt ist, konvergieren für $n \to \infty$ Teilfolgen von $(x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_{k_n}^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Seien $(x_0^{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ und $(x_{k_{n_i}}^{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ die konvergenten Teilfolgen und $x := \lim_{i\to\infty} x_0^{n_i}$ und $y := \lim_{i\to\infty} x_{k_{n_i}}^{n_i}$ die entsprechenden Grenzwerte.

Es wird gezeigt, dass x und y ketten-äquivalent sind: Sei $\epsilon_1 > 0$ beliebig. Sei $\epsilon_2 := \frac{\epsilon_1}{2} > 0$. Da f eine stetige Funktion und X kompakt ist, ist f auf X gleichmäßig stetig. Also existiert für $\epsilon_2 > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $a, b \in X$ mit $d(a, b) < \delta$ gilt, dass $d(f(a), f(b)) < \epsilon_2$. Es existiert ein $I_1 \in \mathbb{N}$, so dass $d(x, x_0^{n_i}) < \min\{\delta, \epsilon_2\}$ für alle $i \geq I_1$. Außerdem existiert ein $I_2 \in \mathbb{N}$, so dass $d(y, x_{k_{n_i}}^{n_i}) < \min\{\delta, \epsilon_2\}$ für alle $i \geq I_2$. Und es existiert ein $I_3 \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{n_i} \leq \epsilon_2$ für alle $i \geq I_3$. Sei $I = \max\{I_1, I_2, I_3\}$ und $N := n_I$. Sei $a_0 := x$, $a_{k_N} := y$ und $a_i := x_i^N$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k_N - 1\}$. Dann ist $d(f(a_0), a_1) = d(f(x), x_1^N) \leq d(f(x), f(x_0^N)) + d(f(x_0^N), x_1^N) < \epsilon_2 + \frac{1}{N} \leq \epsilon_1$, weil $f(x, x_0^N) < \delta$. Weil $(x_k^N)_{k=0}^{k=j_N}$ eine periodische $\frac{1}{N}$-Kette ist, gilt $d(f(a_i), a_{i+1}) = d(f(x_i), x_{i+1}) < \frac{1}{N} \leq \epsilon_1$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k_N - 2\}$. Zuletzt

[4] Es könnte auch die Annahme, dass es ein $\epsilon_0 > 0$ mit $0 < \delta \leq \epsilon$ existiert, so dass für jedes $x \in C$ jede periodische δ-Kette durch x in der ϵ-Umgebung $\mathrm{B}(C, \epsilon)$ von C liegt, widerlegt werden.

[5] Um auch die zusätzliche Bedingung $\delta \leq \epsilon_0$ zu zeigen, könnte man ein $\delta = \frac{1}{n}$ für jedes $n \geq \frac{1}{\epsilon_0}$ wählen.

[6] Um die Aussage mit der zusätzlichen Bedingung $\delta \leq \epsilon$ zu zeigen, würde man hier die ersten Folgenglieder mit $k \leq \frac{1}{\epsilon_0}$ weglassen. Das hat später keine Auswirkung auf die Konvergenz der Teilfolgen und die Existenz von ϵ-Ketten.

ist $d(f(a_{k_N-1}), a_{k_N}) = d(f(a_{k_N-1}), y) \leq d(f(x^N_{k_N-1}), x^N_{k_N}) + d(x^N_{k_N}, y) < \frac{1}{N} + \epsilon_2 \leq \epsilon_1$. Also existiert eine ϵ_1-Kette von x zu y. Sei $b_0 := y$, $b_{j_N-k_N} := x$ und $b_i := x^N_{k_N+i}$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, j_N - k_N\}$. Dann ist $d(f(b_0), b_1) = d(f(y), x^N_{k_N+1}) \leq d(f(y), f(x^N_{k_N})) + d(f(x^N_{k_N}), x^N_{k_N+1}) < \epsilon_2 + \frac{1}{N} \leq \epsilon_1$, weil $d(y, x^N_{k_N}) < \delta$. $d(f(b_i), b_{i+1}) = d(f(x^N_{k_N+i}), x^N_{k_N+1}) < \frac{1}{N} \leq \epsilon_1$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, j_N - k_N - 2\}$, weil $(x^N_k)^{k=j_N}_{k=0}$ eine periodische $\frac{1}{N}$-Kette ist. Zuletzt ist $d(f(b_{j_N-k_N-1}), b_{j_N-k_N}) = d(f(x^N_{k_N+j_N-k_N-1}), x) = d(f(x^N_{j_N-1}), x) \leq d(f(x^N_{j_N-1}), x^N_{j_N}) + d(x^N_{j_N}, x) < \frac{1}{N} + \epsilon_2 \leq \epsilon_1$. Also existiert eine ϵ_1-Kette von y zu x. Dann ist $x \sim y$ ketten-äquivalent. Allerdings ist x als Grenzwert einer Folge in C im Abschluss von C. Da C kompakt ist, gilt $c \in \overline{C} = C$. Es gilt $(x^{n_i}_{k_{n_i}}) \notin \mathrm{B}(C, \epsilon_0)$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Da die Folge im abgeschlossenen Komplement der offenen ϵ_0-Umgebung von C liegt, liegt auch der Grenzwert $y = \lim_{i\to\infty} x^{n_i}_{k_{n_i}}$ nicht in C. Dann ist $x \in C$ und $y \notin C$ aber $x \sim y$. Das Widerspricht der Aussage, dass C eine Ketten-Klasse ist. Also kann kein solches ϵ_0 existieren.

2.: Angenommen C ist nicht unzerlegbar. Dann existiert eine disjunkte Vereinigung von zwei kompakten, invarianten, nichtleeren Mengen C_1 und C_2, in die C zerlegt werden kann. Sei $d := \inf\{|a - b| : a \in C_1, b \in C_2\}$. Da f eine stetige Funktion und X kompakt ist, ist f auf X gleichmäßig stetig. Also existiert für $d/3 > 0$ ein $\delta_0 > 0$, so dass für alle $a, b \in X$ mit $d(a, b) < \delta_0$ gilt, dass $d(f(a), f(b)) < d/3$. Sei $\epsilon := \min\{d/3, \delta_0\}$. Dann ist $f(\mathrm{B}(C_1, \epsilon)) \subset \mathrm{B}(f(C_1), d/3) = \mathrm{B}(C_1, d/3)$. Also gilt auch $f(\mathrm{B}(C_1, \epsilon)) \cap \mathrm{B}(\mathrm{B}(C_2, \epsilon), \epsilon) = \emptyset$. Sei $c_1 \in C_1$. Aussage 1. auch mit der zusätzlichen Bedingung $\delta \leq \epsilon$ bewiesen werden. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $\delta \leq \epsilon$, so dass jede periodische δ-Kette durch c_1 in der ϵ-Umgebung $\mathrm{B}(C, \epsilon)$ von C liegt. Es gilt auch $\mathrm{B}(C, \epsilon) = \mathrm{B}(C_1 \cup C_2, \epsilon) = \mathrm{B}(C_1, \epsilon) \cup \mathrm{B}(C_2, \epsilon)$. C_1 und C_2 sind Teilmengen von der selben Ketten-Klasse C. Also gilt $c_1 \sim c_2$ für alle $c_2 \in C_2$. Dann existiert eine δ-Kette von c_2 zu c_1 und von c_1 zu c_2. Die Aneinanderreihung der beiden δ-Ketten ergibt eine periodische δ-Kette durch c_1, die mindestens ein Folgenglied $c_2 \in \mathrm{B}(C_2, \epsilon)$ besitzt. Dann muss es einen Punkt $z \in \mathrm{B}(C_1, \epsilon)$, so dass $f(z) \in \mathrm{B}(\mathrm{B}(C_2, \epsilon), \delta) \subset (\mathrm{B}(C_2, \epsilon), \epsilon)$ geben. Das steht im Widerspruch dazu, dass $f(\mathrm{B}(C_1, \epsilon)) \cap \mathrm{B}(\mathrm{B}(C_2, \epsilon), \epsilon) = \emptyset$. Also ist C unzerlegbar. □

Satz 4.20. *Ein System kann unendlich viele Ketten-Klassen haben.*

Proof. Sei $X = [0, 1]$. Sei f ein Homöomorphismus, der unendlich viele Fixpunkte p_n besitzt, so dass diese Fixpunkte abwechselnd *sinks* und *sources* sind. Dann ist $\{p_n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Ketten-Klasse. □