

Complex Analysis II

Universität Mannheim

Spring Semester 2023

Ross Ogilvie

Contents

1	Riemannsche Flächen	1
1.1	Riemannschen Flächen und holomorphe Abbildungen	1
1.2	Quotientenräume und Möbius-Transformationen	6
1.3	Differentialformen	11
1.4	Integration und Residuum	15
1.5	Algebraische Kurven	21
2	Überlagerungen	25
2.1	Überlagerungen	25
2.2	Die universelle Überlagerung	29
2.3	Verzweigte Überlagerungen und Hyperelliptische Riemannsche Flächen	32
3	Uniformisierung	39
3.1	Harmonische Funktionen	39
3.2	Das Dirichlet-Problem für Kreisscheiben	41
3.3	Subharmonische Funktionen	45
3.4	Die Methode von Perron	48
3.5	Riemannsche Flächen mit Rand	49
3.6	Das allgemeine Dirichlet-Problem	50
3.7	Der Anulus-Satz	53
3.8	Der große Riemannsche Abbildungssatz	57
3.9	Der Uniformisierungssatz	61

4	Garben	63
4.1	Prägarben und Garben	63
4.2	Homomorphismen von Garben	66
4.3	Garbenkohomologie	69
4.4	Der Satz von Leray	74
4.5	Linienbündel auf Riemannschen Flächen	76
5	Kohomologie von Riemannschen Flächen	81
5.1	Das Lemma von Dolbeault	81
5.2	L^2 -Integration auf Riemannschen Flächen	85
5.3	Das Geschlecht Riemannscher Flächen	88
5.4	Von der Existenz meromorpher Funktionen	92
5.5	Die exakte Kohomologiesequenz	93
5.6	Das Divisorenkalkül	98
5.7	Der Satz von Riemann-Roch	100
5.8	Die Serre-Dualität	103
5.9	Konsequenzen	106
6	Singuläre komplexe Kurven	111
6.1	Komplexe Modellräume	111
6.2	Komplexe Kurven	113
6.3	Alles weitere	115
A	Literatur	117
B	Der kleine Riemannsche Abbildungssatz	119

Chapter 1

Riemannsche Flächen

1.1 Riemannschen Flächen und holomorphe Abbildungen

Gegenstand der Vorlesung sind Riemannsche Flächen, also 1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten. Wir beginnen daher, indem wir die (vielleicht aus der Analysis-Vorlesung bekannte) Definition der (reellen) Mannigfaltigkeit auf 1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten übertragen.

1.1 Definition. Sei X ein topologischer Raum.

- (a) Eine (1-dimensionale) *komplexe Karte* [complex (coordinate) chart] von X ist ein Paar (U, φ) aus einer offenen Teilmenge $U \subset X$ und einem Homöomorphismus φ von U auf eine offene Teilmenge $U' = \varphi[U] \subset \mathbb{C}$.
- (b) Zwei Karten (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) von X heißen *holomorph verträglich* [holomorphically compatible], wenn $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ist, oder wenn im Fall $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ der *Koordinatenwechsel* [transition function]

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}|_{\varphi_1[U_1 \cap U_2]} : \varphi_1[U_1 \cap U_2] \rightarrow \varphi_2[U_1 \cap U_2]$$

biholomorph ist, d.h. der Koordinatenwechsel ist bijektiv und eine holomorphe Abbildung von offenen Teilmengen von \mathbb{C} , und die Umkehrabbildung

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}|_{\varphi_2[U_1 \cap U_2]} : \varphi_2[U_1 \cap U_2] \rightarrow \varphi_1[U_1 \cap U_2]$$

ist ebenfalls holomorph.

- (c) Ein *holomorpher Atlas* [holomorphic atlas] für X ist eine Familie $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ von paarweise holomorph verträglichen Karten auf X , so dass $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X ist, d.h. $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.
- (d) Ein holomorpher Atlas \mathfrak{A} heißt *maximal* [maximal], wenn für jede komplexe Karte (U, φ) von X , die mit allen Karten aus \mathfrak{A} verträglich ist, schon $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$ gilt.

Holomorphe Verträglichkeit ist offenbar eine Äquivalenzrelation auf der Menge der komplexen Karten eines topologischen Raums X . Deshalb kann jeder holomorphe Atlas \mathfrak{A} von X zu einem maximalen Atlas $\tilde{\mathfrak{A}}$ erweitert werden, indem man alle zu den Karten in \mathfrak{A} verträglichen Karten von X zu \mathfrak{A} hinzunimmt.

1.2 Definition. Ein topologischer Raum X hat eine *abzählbare Basis der Topologie* [countable basis of the topology], wenn es eine höchstens abzählbare Familie $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von in X offenen Mengen gibt, so dass für jede weitere offene Menge U von X und jedes $x \in U$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x \in U_k \subset U$ gibt. Eine jede derartige Familie (U_k) heißt *Basis der Topologie* [basis of the topology] von X .

1.3 Definition. Eine *Riemannsche Fläche* [Riemann surface] ist ein wegzusammenhängender, metrisierbarer, hausdorffscher topologischer Raum mit abzählbarer Basis der Topologie, zusammen mit einem maximalen holomorphen Atlas.

Wenn von einer Karte einer Riemannschen Fläche die Rede ist, ist immer eine Karte aus ihrem maximalen Atlas gemeint.

1.4 Bemerkungen. (a) Weil jeder komplexe Atlas zu einem maximalen komplexen Atlas erweitert werden kann, kann man einen wegzusammenhängenden, metrisierbaren, hausdorffschen topologischen Raum X mit abzählbarer Topologie auch zu einer Riemannschen Fläche machen, indem man einen nicht-maximalen komplexen Atlas für X festlegt.

(b) Unsere Bedingung, dass Riemannsche Flächen abzählbare Basis der Topologie haben sollen, kann zu "separabel" oder auch zu "parakompakt" abgeschwächt werden, ohne den Begriff der Riemannschen Fläche zu verändern, d.h. für einen wegzusammenhängenden, metrisierbaren, hausdorffschen topologischen Raum X , für den ein holomorpher Atlas existiert, gilt:

$$X \text{ hat abzählbare Basis der Topologie} \iff X \text{ ist separabel} \iff X \text{ ist parakompakt.}$$

Außerdem folgt die Metrisierbarkeit von X aus den anderen Eigenschaften.

Wir fordern diese "starken" topologischen Eigenschaften für Riemannsche Flächen hier, um auf möglichst wenig Resultate aus der mengentheoretischen Topologie zurückgreifen zu müssen.

1.5 Beispiele. (a) Jedes Gebiet (zusammenhängende, offene Teilmenge) $G \subset \mathbb{C}$ ist offenbar eine Riemannsche Fläche, denn $\{(G, \text{id}_G)\}$ ist ein komplexer Atlas für G .

(b) Die Menge $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ wird als *Riemannsche Zahlenkugel* [Riemann sphere] bezeichnet, wenn sie auf die im Folgenden beschriebene Weise als Riemannsche Fläche aufgefasst wird. Die folgende Aufgabe (a) zeigt, dass sie zur 2-dimensionalen Einheitssphäre homöomorph ist, wodurch die Bezeichnung als "Sphäre" gerechtfertigt wird. Sie ist kompakt, und daher zu keinem Gebiet in \mathbb{C} biholomorph äquivalent. Wegen der folgenden Aufgabe (b) wird sie auch mit $\mathbb{C}P^1$ bezeichnet. Für alle künftigen Rechnungen definieren wir für jedes $z \in \mathbb{C}$:

$$\infty \pm z = z \pm \infty = \infty, \quad \text{und für } z \neq 0: \infty \cdot z = z \cdot \infty = \frac{z}{0} = \infty.$$

Die Ausdrücke $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$ und $\frac{\infty}{\infty}$ bleiben undefiniert.

Wir erklären zunächst eine Topologie auf $\widehat{\mathbb{C}}$ dadurch, dass wir eine Teilmenge U von $\widehat{\mathbb{C}}$ genau dann offen nennen, wenn $U \cap \mathbb{C}$ im üblichen Sinne offen in \mathbb{C} ist und außerdem im Fall $\infty \in U$ es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{\varepsilon}\} \subset U$$

gilt. Offenbar wird $\widehat{\mathbb{C}}$ hierdurch zu einem Hausdorffraum. Wegen der folgenden Aufgabe (a) ist er ebenso wie \mathbb{S}^2 wegzusammenhängend und metrisierbar und hat eine abzählbare Basis der Topologie.

Nun definieren wir:

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{C}, & \varphi_1 : U_1 &\rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z, \\ U_2 &= \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}, & \varphi_2 : U_2 &\rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

(wobei wir für die letzte Definition an unsere Setzung $\frac{1}{\infty} = 0$ erinnern). U_1 und U_2 sind offene Teilmengen von $\widehat{\mathbb{C}}$, es gilt $U_1 \cup U_2 = \widehat{\mathbb{C}}$, und die Abbildungen φ_1 und φ_2 sind Homöomorphismen. Der Koordinatenwechsel von φ_1 nach φ_2 wird durch $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^*$,

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}|_{\mathbb{C}^*} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto \frac{1}{z}$$

gegeben, was offenbar eine biholomorphe Abbildung ist. Deshalb ist $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ ein holomorpher Atlas für $\widehat{\mathbb{C}}$, durch den $\widehat{\mathbb{C}}$ zu einer Riemannschen Fläche wird.

1.6 Aufgabe. $\widehat{\mathbb{C}}$ is homeomorphic to \mathbb{S}^2 via stereographic projection.

Zu einem "Raum" gehören immer auch "Morphismen", also Abbildungen, die mit der Struktur dieses Raums verträglich sind.

1.7 Definition. Seien X, Y zwei Riemannsche Flächen und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

- (a) f heißt *holomorph* [*holomorphic*] bzw. *glatt* [*smooth*], wenn f stetig ist und für jede Karte (U, φ) von X und jede Karte (V, ψ) von Y die Funktion

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi[U \cap f^{-1}[V]]} : \varphi[U \cap f^{-1}[V]] \rightarrow \psi[V]$$

holomorph im Sinne der Funktionentheorie I bzw. glatt im Sinne der Analysis II (also als Funktion nach $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ beliebig oft reell differenzierbar) ist.

Im Fall $V = \mathbb{C}$ spricht man auch von einer *holomorphen Funktion* [*holomorphic function*].

- (b) f heißt *biholomorph* [*biholomorphic*] oder *konform* [*conformal*], wenn f ein Homöomorphismus ist, und sowohl f als auch f^{-1} holomorph sind.
- (c) X und Y heißen *biholomorph äquivalent* [*biholomorphically equivalent*], wenn es eine biholomorphe Abbildung $f : X \rightarrow Y$ gibt.

Die Menge der holomorphen Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ wird mit $\mathcal{O}(X)$ bezeichnet. Offenbar liegen die konstanten Funktionen in $\mathcal{O}(X)$, und mit $f, g \in \mathcal{O}(X)$ gilt auch $f \pm g, f \cdot g \in \mathcal{O}(X)$. In diesem Sinn ist $\mathcal{O}(X)$ eine \mathbb{C} -Algebra, insbesondere ein kommutativer Ring mit Eins.

Die biholomorphen Abbildungen sind die Isomorphismen in der Kategorie der Riemannschen Flächen; zwei Riemannsche Flächen sind isomorph, wenn sie biholomorph äquivalent sind. Die folgende Aussage erleichtert den Nachweis, dass eine Abbildung biholomorph ist:

1.8 Aussage. (Satz von Osgood für Riemannsche Flächen.) Seien X, Y Riemannsche Flächen und $f : X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung. Wenn f injektiv ist, so ist $f[X]$ offen in Y , und f eine biholomorphe Abbildung auf das Bild $f[X]$.

Beweis. f ist nicht konstant, aus dem Offenheitssatz der Funktionentheorie I ergibt sich daher, dass $f[X]$ offen in Y ist. Sei nun $x \in X$ und (U, ϕ) bzw. (V, ψ) Karten von X bzw. Y um x bzw. $f(x)$. Dann ist $\tilde{f} := \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ (auf geeignetem Definitionsgebiet in \mathbb{C}) holomorph und injektiv. Deshalb hat \tilde{f}' keine Nullstellen: Hätte \tilde{f}' nämlich in einem $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle, etwa von Ordnung k , so wäre \tilde{f}' auf einer Umgebung von z_0 eine verzweigte $(k+1)$ -blättrige Überlagerung, also sicher nicht injektiv. Der Satz von der Umkehrfunktion zeigt daher, dass \tilde{f}^{-1} in $\tilde{f}(\phi(x_0))$ holomorph ist. Daraus folgt, dass f^{-1} in $f(x_0)$ holomorph ist. \square

Viele "lokale" Aussagen der Funktionentheorie I lassen sich leicht auf holomorphe Funktionen im neuen Sinn übertragen. Die folgende Aufgabe gibt einige Beispiele. Wir werden derartige Aussagen im Folgenden oft ohne ausdrücklichen Beweis verwenden.

1.9 Aufgabe. Let X, Y be Riemann surfaces. Show:

- (a) **Identity Theorem.** Let $f, g : X \rightarrow Y$ be two holomorphic maps, and suppose that the set $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ has an accumulation point in X . Then $f = g$ holds.

[*Hint.* Use the identity theorem from *Funktionentheorie I* to show that the set of accumulation points of A is contained in A° .]

- (b) Suppose that $f : X \rightarrow Y$ is a non-constant, holomorphic map and $y \in Y$. Then $f^{-1}[\{y\}]$ is a discrete subset of X .

- (c) **Maximum and Minimum Principle for holomorphic functions.** Let $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ be a holomorphic function. Then $|f|$ does not attain a strict local maximum, and if it attains a strict local minimum at some $x_0 \in X$, then $f(x_0) = 0$ holds.

[*Hint.* Use the analogous statement from *Funktionentheorie I*.]

- (d) Suppose that X is *compact*. Then any holomorphic map $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ is constant.

- (e) Suppose that X, Y are both *compact*. Either prove or give a counterexample for the following statement: Any holomorphic map $f : X \rightarrow Y$ is constant.

- (f) **Riemann's theorem on removable singularities.** Let $x_0 \in X$ and $f : X \setminus \{x_0\} \rightarrow Y$ be a holomorphic map. Suppose that one of the following two statements holds:

(i) f can be extended to a continuous function $f : X \rightarrow Y$.

(ii) $Y = \mathbb{C}$ and there exists a neighbourhood U of x_0 in X so that the function $|f|_{U \setminus \{x_0\}}$ is bounded.

Then f can be extended at x_0 to a holomorphic map $f : X \rightarrow Y$.

Die folgende Aussage zeigt, dass holomorphe Abbildungen nach $\widehat{\mathbb{C}}$ den meromorphen Funktionen der Funktionentheorie I entsprechen.

1.10 Aussage. Sei X eine Riemannsche Fläche, $x_0 \in X$ und $f : X \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) f lässt sich in x_0 holomorph (oder stetig) zu einer Abbildung $\widehat{f} : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ fortsetzen.

(b) Es gibt eine Karte (U, φ) von X mit $x_0 \in U$, so dass $(f|_{U \setminus \{x_0\}}) \circ \varphi^{-1} : \varphi[U \setminus \{x_0\}] \rightarrow \mathbb{C}$ in x_0 meromorph im Sinne der Funktionentheorie I ist.

(c) Es existiert eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$, und eine Karte (U, φ) von X mit $x_0 \in U$, so dass die Funktion

$$(z - z_0)^{-n} \cdot ((f|_{U \setminus \{x_0\}}) \circ \varphi^{-1}) : \varphi[U \setminus \{x_0\}] \rightarrow \mathbb{C}$$

in $z = z_0 := \varphi(x_0)$ durch einen Wert in \mathbb{C}^* holomorph (oder stetig) fortgesetzt werden kann.

Gelten diese Aussagen, so wird die Funktion f mit ihrer Fortsetzung \hat{f} aus (a) identifiziert. In diesem Fall ist die Zahl $n \in \mathbb{Z}$ aus (c) eindeutig bestimmt. Sie heißt die *Ordnung [order]* von f in x_0 und wird mit $\text{ord}_{x_0}(f)$ bezeichnet. Ist $n = \text{ord}_{x_0}(f) > 0$, so gilt $f(x_0) = 0$ und man sagt, dass f in x_0 eine *Nullstelle n -ter Ordnung [zero, root of n -th order]* besitzt. Ist $n = \text{ord}_{x_0}(f) < 0$, so gilt $f(x_0) = \infty$ und man sagt, dass f in x_0 eine *Polstelle $(-n)$ -ter Ordnung [pole of $(-n)$ -th order]* besitzt. Ist $\text{ord}_{x_0}(f) = 0$, so gilt $f(x_0) \in \mathbb{C}^*$.

Wegen der vorangehenden Aussage nennen wir holomorphe Abbildungen $f : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ einer Riemannschen Fläche X auch *meromorphe Funktionen* auf X . Den Raum der meromorphen Funktionen auf X bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(X)$. Für $f, g \in \mathcal{M}(X)$ gilt $f \pm g, f \cdot g \in \mathcal{M}(X)$ sowie für $g \neq 0$ auch $\frac{f}{g} \in \mathcal{M}(X)$. Deshalb ist $\mathcal{M}(X)$ ein Körper, und zwar der Quotientenkörper des Integritätsrings $\mathcal{O}(X)$. Außerdem gilt für $x_0 \in X$

$$\text{ord}_{x_0}(f \cdot g) = \text{ord}_{x_0}(f) + \text{ord}_{x_0}(g) \quad \text{und} \quad \text{ord}_{x_0}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{ord}_{x_0}(f) - \text{ord}_{x_0}(g).$$

Beweis von Aussage 1.10. Die Äquivalenz der Holomorphie und Stetigkeit ergibt sich in (a) aus der Version des Riemannschen Hebbarkeitssatzes aus Aufgabe 1.9, in (c) aus dem klassischen Riemannschen Hebbarkeitssatz. Wir wählen nun eine Karte (U, φ) von X mit $x_0 \in U$, und betrachten die Funktion $\tilde{f} := (f|_{U \setminus \{x_0\}}) \circ \varphi^{-1} : \varphi[U \setminus \{x_0\}] \rightarrow \mathbb{C}$, die im Sinne der Funktionentheorie I holomorph ist. Diese Funktion ist genau dann in $\varphi(x_0)$ holomorph fortsetzbar, wenn f in x_0 holomorph fortsetzbar ist. Die Äquivalenz der Aussagen (a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c), und auch die weiteren Aussagen ergeben sich deshalb aus den entsprechenden Ergebnissen der Funktionentheorie I. □

1.11 Beispiel. A rational function is a meromorphic function on $\hat{\mathbb{C}}$. This is because if $f(z)$ is a rational function in z , so is $f((z^{-1})^{-1})$ in z^{-1} , and z and z^{-1} are charts that cover $\hat{\mathbb{C}}$.

Conversely, these are the only meromorphic functions on $\hat{\mathbb{C}}$. Suppose that f is a meromorphic function, with poles at $z_i \in \mathbb{C}$ of order n_i . Then $\tilde{f}(z) := f(z) \prod_i (z - z_i)^{n_i}$ is holomorphic on \mathbb{C} , though it may have a pole at $z = \infty$. Because it is holomorphic in the plane, it has a Taylor series expansion

$$\tilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

However this gives use the Laurent series expansion at the point $z = \infty$

$$\tilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z^{-1})^{-k}.$$

By the definition of a pole, this cannot be an infinite series, it must have a lowest term. In other words \hat{f} is a polynomial. But then f is a rational function as claimed.

1.12 Beispiel. Let us introduce *projective space*. Consider a field \mathbb{K} . We introduce an equivalent relation on $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$, namely $v \sim w$ if there is a non-zero scalar $\lambda \in \mathbb{K}$ with $v = \lambda w$. If $v = (v_0, \dots, v_n)$, it is traditional to use the notation $[v_0 : \dots : v_n]$ for the equivalence class of v ; the $:$ reminds us that it is the ratio of the components. For example, $[1 : 2] = [2 : 4]$ and $[1 : 0] = [-1 : 0]$. Projective space is the collection of equivalence classes is denoted $\mathbb{K}P^n = (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$. Other notations are also common, such as $P^n\mathbb{K}$.

Real projective space $\mathbb{R}P^n$ is an n -dimensional smooth manifold. $\mathbb{C}P^n$ is a $2n$ -dimensional smooth manifold and an n -complex-dimensional complex manifold. In particular $\mathbb{C}P^1$ is a Riemann surface, as we will now show. Let $U_i = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{C}P^1 \mid z_i \neq 0\}$ be two open sets and the chart $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ be defined by $\varphi_i([z_0 : z_1]) = z_{1-i}/z_i$. This constitutes an atlas for $\mathbb{C}P^1$.

All real and complex projective spaces are compact: they are the union of the closed unit balls of $U_i \cong \mathbb{K}^n$. This follows since for $[v_0 : \dots : v_n]$ let i be the index of the largest $|v_i|$, then this point lies in the closed unit ball of U_i .

1.13 Aufgabe. Show that φ_0 extends to a meromorphic function f on $\mathbb{C}P^1$. Prove that this is a biholomorphism between $\mathbb{C}P^1$ and $\hat{\mathbb{C}}$.

1.2 Quotientenräume und Möbius-Transformationen

As we saw in Example 1.12, quotient spaces are a common way to construct new spaces. But not all quotient spaces are well behaved: if one is not careful, the result is not even Hausdorff, let alone a manifold. In this section we provide a class of quotients that produce Riemann surfaces as the quotient of Riemann surfaces with a group of transformations.

The homeomorphism of a topological space are a group under the operation of composition. Composition is associative. The identity element of this group is the identity map, and since the inverse of a homeomorphism is by definition a homeomorphism we always have $\gamma \circ \gamma^{-1} = \text{id}$. In the same way, the set $\text{Aut}(X)$ of biholomorphic maps from a Riemann surface X to itself is also a group.

1.14 Definition. Sei X ein topologischer Raum, und Γ eine Untergruppe der Homöomorphismengruppe von X . Man sagt, dass Γ *frei operiert* [acts freely], wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(F) Ist $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}_X\}$, so besitzt γ keine Fixpunkte.

(H) Zu je zwei Punkten $x_1, x_2 \in X$ existieren Umgebungen $U(x_1), U(x_2)$ von x_1 bzw. x_2 in X mit folgender Eigenschaft: Für jedes $\gamma \in \Gamma$ gilt

$$\gamma[U(x_1)] \cap U(x_2) \neq \emptyset \implies \gamma(x_1) = x_2.$$

1.15 Bemerkungen. (a) The reader should be aware that the terminology for group actions is inconsistent between authors.

- (b) This forces the subgroup Γ to be (in some sense) discrete. There is a general topology that one can give the set of homeomorphisms, but this is not something that we will need and so we do not give a formal proof. But many of the examples of groups we will see have an obvious topology, so it is worth remarking upon.

Suppose there was a point $x \in X$ and distinct group elements $\gamma_k, \gamma \in \Gamma$ such that $\gamma_k(x) \rightarrow \gamma(x)$. Since γ is a homeomorphism, we have $\gamma^{-1}\gamma_k(x) \rightarrow x$. So we assume without loss of generality that $\gamma = \text{id}_X$. Let $x_k := \gamma_k(x)$. These are distinct points because if $x_j = x_k$ then x is a fix-point of $\gamma_j^{-1}\gamma_k$. But the only group element with fix-points is id_X , which means $\gamma_j = \gamma_k$, violating the assumption that the elements are distinct.

Choose any neighbourhoods $U(x), U(x_1)$. Since the sequence is converging to x , there is some $x_N \in U(x)$ (in fact, all but finitely many elements of the sequence lie in it, but we only need one). From the observation $\gamma_N\gamma_1^{-1}(x_1) = \gamma_N(x) = x_N$, we see that we have a contradiction to Property (H):

$$\gamma_N\gamma_1^{-1}[U(x_1)] \cap U(x) \ni x_N, \quad \text{but} \quad \gamma_N\gamma_1^{-1}(x_1) = x_N \notin U(x).$$

Thus we have shown that a group acting freely cannot have a non-trivial sequence of group elements that converge pointwise at even a single point.

1.16 Satz. Sei Γ eine frei operierende Untergruppe der Homöomorphismengruppe von X . Durch

$$x_1 \sim x_2 \iff \text{es gibt ein } \gamma \in \Gamma \text{ mit } \gamma(x_1) = x_2$$

wird eine Äquivalenzrelation auf X definiert. Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen mit X/Γ und die kanonische Projektion mit $p : X \rightarrow X/\Gamma$, $x \mapsto [x] = \{\gamma x \mid \gamma \in \Gamma\}$. Dann existiert auf X/Γ genau eine Struktur eines wegzusammenhängenden topologischen Hausdorffraums.

Zusatz. Ist X eine Riemannsche Fläche, und ist Γ in der Gruppe der biholomorphen Abbildungen $X \rightarrow X$ enthalten, so existiert auf X/Γ genau eine Struktur einer Riemannschen Fläche, so dass p eine holomorphe Überlagerung wird.

Beweis. Wir versehen X/Γ mit der Quotiententopologie bezüglich p , d.h. wir nennen eine Teilmenge $V \subset X/\Gamma$ offen, wenn $p^{-1}[V]$ offen in X ist. Dadurch wird p zu einer stetigen und offenen Abbildung. Wir zeigen, dass X/Γ ein Hausdorffraum ist: Seien $[x_1], [x_2] \in X/\Gamma$ gegeben mit $[x_1] \neq [x_2]$. Dann seien Umgebungen $U(x_1)$ und $U(x_2)$ in X gemäß der Eigenschaft (H) für Γ gewählt, und $V(x_k) = p[U(x_k)]$. Würde es ein $\tilde{y} \in V(x_1) \cap V(x_2)$ geben, so gäbe es $\tilde{x}_k \in U(x_k)$ mit $p(\tilde{x}_1) = \tilde{y} = p(\tilde{x}_2)$, also existiert $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ und somit $\gamma[U(x_1)] \cap U(x_2) \neq \emptyset$. Nach der Eigenschaft (H) folgt $\gamma(x_1) = x_2$ und somit $[x_1] = [x_2]$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit ist $V(x_1) \cap V(x_2) = \emptyset$.

Für den Beweis des Zusatzes genügt es, im vorigen Argument $U(x_0)$ als Kartenumgebung von X zu wählen. Ist z die zugehörige Kartenabbildung, so erhält man durch $z \circ (p|_{U(x_0)} : U(x_0) \rightarrow V(y))^{-1}$ eine Karte auf X/Γ . Zwei derartige Karten sind miteinander verträglich, also erhält man auf diese Weise einen komplexen Atlas für X/Γ , und bezüglich diesem ist p offenbar holomorph. \square

This motivates us to understand $\text{Aut}(X)$ for some common Riemann surfaces, and to find their discrete subgroups.

1.17 Aussage. (a) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0$. Dann wird durch

$$f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

eine biholomorphe Abbildung definiert, und es gibt keine weiteren biholomorphen Abbildungen $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Diese Abbildungen heißen *Möbius-Transformationen* [Möbius transformations], ihre Gruppe wird mit $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ bezeichnet.

(b) Sei $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Dann wird durch

$$g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto az + b$$

eine biholomorphe Abbildung definiert, und es gibt keine weiteren biholomorphen Abbildungen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Beweis. Offensichtlich ist $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ eine meromorphe Funktion, deren Umkehrung durch die ebenfalls meromorphe Funktion $z \mapsto \frac{dz-b}{-cz+a}$ gegeben wird. Daher ist f als Abbildung $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ biholomorph. Ebenso ist $g : z \mapsto az + b$ offenbar eine biholomorphe Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Sei nun $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ irgendeine biholomorphe Abbildung. Für $z_0 = f^{-1}(\infty)$ betrachten wir die Möbiustransformation $h(z) = \frac{z_0 \cdot z + 1}{z}$. Damit ist $g = f \circ h : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ eine weitere biholomorphe Abbildung, und es gilt $g(\infty) = \infty$. Deshalb bildet g die Zahlenebene \mathbb{C} auf sich ab, also ist g eine ganze Funktion, die in $z = \infty$ einen Pol erster Ordnung besitzt. Nach Funktionentheorie I ist g ein Polynom 1. Grades, also von der Form $g(z) = az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Es ist $h^{-1}(z) = \frac{1}{z - z_0}$ und daher

$$f(z) = g(h^{-1}(z)) = a \cdot \frac{1}{z - z_0} + b = \frac{bz + (a - bz_0)}{z - z_0},$$

wobei $\det \begin{pmatrix} b & a - bz_0 \\ 1 & -z_0 \end{pmatrix} = -a \neq 0$ ist. Somit ist f eine Möbius-Transformation. \square

1.18 Bemerkung. Let us explain a little further why g the pole at ∞ must be first order (it must be a pole, because g is by assumption a holomorphic map to $\widehat{\mathbb{C}}$). Since $g(\infty) = \infty$, we know in local coordinates that $\tilde{g}(w) = \phi_2 \circ g \circ \phi_2^{-1}(w)$ has $\tilde{g}(0) = 0$. Since it is holomorphic, we could write its power series as $\tilde{g}(w) = 0 + \tilde{g}_1 w + \tilde{g}_2 w^2 + \dots$. If $\tilde{g}_1 = 0$ then we would see that \tilde{g} is not injective, which contradicts that g is bijective. Hence we see that $g \circ \phi_2^{-1}(w) = \tilde{g}(w)^{-1}$ has a first order pole at $w = 0$ (ie $z = \infty$). Generally, we will see there is a close connection between the order of the poles and the multiplicity of the map (whether is it 1-to-1, 2-to-1, etc).

Das Rechnen mit Möbius-Transformationen wird durch die folgende Beobachtung erleichtert: Die Abbildung

$$\Phi : \text{GL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right)$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit dem Kern $\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}$. Die Einschränkung $\Phi|_{\text{SL}(2, \mathbb{C})}$ ist immer noch surjektiv.

1.19 Aufgabe. Explain the above group homomorphism by considering how $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ acting on \mathbb{C}^2 induces an action on $\mathbb{C}P^1$.

1.20 Aussage. Es existiert keine auf $\widehat{\mathbb{C}}$ frei operierende Untergruppe $\Gamma \subset \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$, außer $\Gamma = \{\text{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}\}$.

Beweis von Aussage 1.20. Jedes $f \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ hat einen Fixpunkt in $\widehat{\mathbb{C}}$: Ein solches f ist nämlich nach Aussage 1.17(a) eine Möbius-Transformation, das heißt von der Form $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad-bc \neq 0$. Dieses f hat im Fall $c \neq 0$ Fixpunkt(e) in $z = \frac{d-a \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4b}}{2c}$, und im Fall $c = 0$ einen Fixpunkt in $z = \infty$. Deshalb kann keine Untergruppe $\Gamma \neq \{\text{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}\}$ von $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ Bedingung (F) aus Definition 1.14 erfüllen. \square

Unfortunately this means we do not get any new Riemann surfaces from quotients of the Riemann sphere. However, we get many new examples (very important examples) from quotients of the plane. These are the cylinder and complex tori.

1.21 Aussage. Wir betrachten den Gruppenhomomorphismus $\Phi : (\mathbb{C}, +) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C})$, $\omega \mapsto (f_\omega : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z + \omega)$. Die auf \mathbb{C} frei operierenden Untergruppen $\Gamma \subset \text{Aut}(\mathbb{C})$ sind genau die Folgenden:

(T) $\Gamma = \Phi[\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2]$ mit zwei über \mathbb{R} linear unabhängigen Zahlen $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$.

(Z) $\Gamma = \Phi[\mathbb{Z}\omega]$ mit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(E) $\Gamma = \{\text{id}_{\mathbb{C}}\}$.

Beweis von Aussage 1.21. Es ist offensichtlich, dass die in der Aussage beschriebenen Γ auf \mathbb{C} frei operierende Untergruppen von $\text{Aut}(\mathbb{C})$ sind. Sei umgekehrt eine auf \mathbb{C} frei operierende Untergruppe Γ von $\text{Aut}(\mathbb{C})$ gegeben. Jedes $f \in \Gamma$ hat nach Aussage 1.17(b) die Form $f(z) = az+b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Ist $f \neq \text{id}_{\mathbb{C}}$, so besitzt f wegen Eigenschaft (F) aus Definition 1.14 keine Fixpunkte. Weil für $a \neq 1$ die Funktion $f(z) = az+b$ in $z = \frac{b}{1-a} \in \mathbb{C}$ einen Fixpunkt besitzt, muss $a = 1$ sein. Ist $f = \text{id}_{\mathbb{C}}$, so ist natürlich auch $a = 1$. Deshalb existiert eine Untergruppe $\tilde{\Gamma}$ von der additiven Gruppe \mathbb{C} mit $\Gamma = \Phi[\tilde{\Gamma}]$. Wegen Eigenschaft (H) aus Definition 1.14 ist $\tilde{\Gamma}$ diskret in \mathbb{C} , also ein sogenanntes *Gitter*.

Wenn $\tilde{\Gamma} = \{0\}$ ist, so liegt Fall (E) vor. Andernfalls wählen wir $\omega_1 \in \tilde{\Gamma} \setminus \{0\}$ mit minimalem Betrag in $\tilde{\Gamma} \setminus \{0\}$. Offenbar ist $\mathbb{Z}\omega_1 \subset \tilde{\Gamma}$. Wenn sogar $\mathbb{Z}\omega_1 = \tilde{\Gamma}$ ist, so liegt Fall (Z) (mit $\omega = \omega_1$) vor. Andernfalls wählen wir $\omega_2 \in \tilde{\Gamma} \setminus (\mathbb{Z}\omega_1)$ mit minimalem Betrag in $\tilde{\Gamma} \setminus (\mathbb{Z}\omega_1)$. Dann sind ω_1 und ω_2 über \mathbb{R} linear unabhängig, und es gilt $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \subset \tilde{\Gamma}$. Tatsächlich behaupten wir, dass sogar $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 = \tilde{\Gamma}$ ist, und somit Fall (T) vorliegt. Sei $\omega \in \tilde{\Gamma}$ gegeben. Dann liegt ω jedenfalls in einem abgeschlossenen Parallelogramm in \mathbb{C} , dessen Ecken in $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ liegen und dessen Diagonalen die Längen $|\omega_1 \pm \omega_2|$ haben. Deshalb gibt es ein $\omega' \in \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$, nämlich eine der Ecken des besagten Parallelogramms, so dass für $\omega - \omega' \in \tilde{\Gamma}$ gilt:

$$|\omega - \omega'| \leq \frac{1}{2}|\omega_1 \pm \omega_2| < \frac{1}{2}|\omega_1| + \frac{1}{2}|\omega_2| \leq |\omega_2|.$$

Dabei ist die zweite Ungleichung strikt, weil ω_1, ω_2 über \mathbb{R} linear unabhängig sind. Weil ω_2 mit in $\tilde{\Gamma} \setminus (\mathbb{Z}\omega_1)$ minimalem Betrag gewählt war, muss $\omega - \omega' \in \mathbb{Z}\omega_1$ und somit $\omega = \omega' + k\omega_1 \in \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ (mit $k \in \mathbb{Z}$) sein. \square

1.22 Beispiele. (a) Clearly (E) does not give a new Riemann surface, the trivial quotient $\mathbb{C}/\{\text{id}\} \cong \mathbb{C}$.

- (b) In the case of (Z) we get the cylinder \mathbb{C}/Γ . We can see that it is a cylinder through the (well-defined!) diffeomorphism

$$S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma, (e^{2\pi it}, s) \mapsto (t + is)\omega.$$

This shows that it is not compact. Perhaps more surprising is that it is biholomorphic to \mathbb{C}^* through the map

$$\mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*, [z] = z + \Gamma \mapsto \exp\left(\frac{2\pi i}{\omega} z\right).$$

In particular, all complex cylinders are biholomorphically equivalent.

- (c) In contrast, case (T) leads to many non-biholomorphic Riemann surfaces. \mathbb{C}/Γ is called a complex torus and the subgroup $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ is called a (maximal) lattice. For odd historical reasons, these are sometimes called elliptic curves. Similar to above we have a diffeomorphism

$$S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma, (e^{2\pi it}, e^{2\pi is}) \mapsto t\omega_1 + s\omega_2.$$

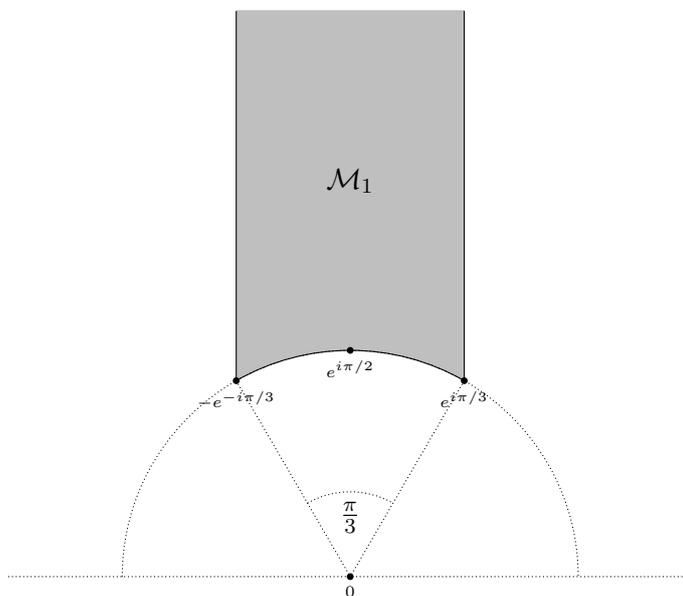
Hence complex tori are compact and not biholomorphic to a subset of \mathbb{C} .

The following proposition determines when two complex tori are biholomorphic.

1.23 Aussage. Jeder komplexe Torus $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2)$ ist biholomorph zu einem komplexen Torus $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\tau)$ mit $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. $\tau = \omega_2/\omega_1$ ist eine mögliche Wahl. Jedoch gibt es genau ein derartiges τ in

$$\mathcal{M}_1 := \{\tau \in \mathbb{C} \mid |\tau| \geq 1, \operatorname{Im}(\tau) > 0, -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(\tau) \leq \frac{1}{2}\} / \sim,$$

wobei die Äquivalenzrelation \sim die Punkte τ auf dem Rand des obigen Gebiets mit $-\bar{\tau}$ identifiziert. Deshalb ist \mathcal{M}_1 der *Modulraum* [moduli space] der komplexen Tori.



Beweis. Zwei komplexe Tori sind offenbar genau dann zueinander biholomorph, wenn die zugehörigen Gitter in \mathbb{C} durch eine biholomorphe Abbildung ineinander überführt werden. Mit $\tau = \omega_2/\omega_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ erfüllt die biholomorphe Abbildung $f(z) = \omega_1 z$ offenbar $f(1) = \omega_1$ und $f(\tau) = \omega_2$, und bildet somit das Gitter $\mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\tau$ auf das Gitter $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ ab. Ist nun ein $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gegeben, so wird das Gitter $\mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\tau$ durch eine geeignete Verkettung der folgenden drei bi-(anti)-holomorphen Abbildungen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ in ein Gitter $\mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\tilde{\tau}$ überführt, wobei $\tilde{\tau} \in \mathcal{M}_1$ ist:

- $f_1(z) = \tau^{-1} z$ (Skalierung um τ^{-1})
- $f_2(z) = -z$ (Spiegelung am Ursprung)
- $f_3(z) = z + k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ (Verschiebung um ganzzahlige Vielfache von 1).

Wir "drücken" uns für den Moment vor dem Beweis, dass für $\tau, \tilde{\tau} \in \mathcal{M}_1$ das Gitter $\Gamma = \mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\tau$ nur dann durch eine biholomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ auf das Gitter $\tilde{\Gamma} = \mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\tilde{\tau}$ abgebildet werden kann, wenn $\tau = \tilde{\tau}$ ist. \square

1.3 Differentialformen

In diesem Abschnitt betrachten wir Differentialformen auf Riemannschen Flächen, und zwar glatte oder holomorphe 1-Formen und 2-Formen. Wir verwenden Differentialformen einerseits, um die Ableitungen von holomorphen bzw. glatten Funktionen auf Riemannschen Flächen karteninvariant zu definieren, andererseits benötigen wir sie als Objekte für die Integration auf Riemannschen Flächen.

Von nun an bezeichnen wir Karten von Riemannschen Flächen X oft mit (U, z) (statt (U, φ)), um Anschluss an suggestivere Bezeichnungen zu haben.

Wir wollen für glatte (insbesondere für holomorphe) Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ eine Ableitung definieren. Zunächst arbeiten wir bezüglich einer Karte (U, z) von X . Wir schreiben $z = x + iy$ mit $x = \operatorname{Re}(z), y = \operatorname{Im}(z) : U \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion $(f \circ z^{-1}) : z(U) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ können wir dann im Sinne der Analysis bzw. der Funktionentheorie I differenzieren. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x} := \frac{\partial(f \circ z^{-1})}{\partial x} \circ z : U \rightarrow \mathbb{C}$ und $\frac{\partial f}{\partial y} := \frac{\partial(f \circ z^{-1})}{\partial y} \circ z : U \rightarrow \mathbb{C}$ definieren, und hierdurch die Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

(Warum diese Definition, insbesondere, warum steht das Minuszeichen an dieser Stelle? Eine Begründung ist, dass die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen besagen, dass $f|_U$ genau dann holomorph ist, wenn $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ ist, und ist dies der Fall, so stimmt $\frac{\partial f}{\partial z}$ mit der komplexen Ableitung von $f \circ z^{-1}$ im Sinne der Funktionentheorie I überein. *)

*Es gibt noch eine andere, formale Begründung: Ist X ein Gebiet in \mathbb{C} und $z = \operatorname{id}$ die kanonische globale Karte, so kann man dx und dy als 1-Formen (Projektionen in Richtung der Koordinatenachsen), und $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ als Vektorfelder (in Richtung der Koordinatenachsen) interpretieren. Dann gilt $dx(\frac{\partial}{\partial x}) = dy(\frac{\partial}{\partial y}) = 1$ und $dx(\frac{\partial}{\partial y}) = dy(\frac{\partial}{\partial x}) = 0$. Mit $dz = dx + idy$ und $d\bar{z} = dx - idy$, und den obigen Definitionen für $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ gilt daher $dz(\frac{\partial}{\partial z}) = d\bar{z}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) = 1$ und $dz(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) = d\bar{z}(\frac{\partial}{\partial z}) = 0$. Mit andern Worten, $(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}})$ ist eine duale Basis der Vektoren zur Basis $(dz, d\bar{z})$ der 1-Formen. Später werden wir sehen, dass sich diese Begründung auf Differentialformen auf allgemeinen Riemannschen Flächen überträgt.

Das Problem mit diesen partiellen Ableitungen ist, dass sie nicht "invariant" sind, das heißt, dass sie von der Wahl der Karte X abhängen. Ausführlicher gesagt: Wenn (z, U) und (\tilde{z}, \tilde{U}) zwei verschiedene Karten von X mit $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$, so stimmen $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \tilde{z}}$ auf $U \cap \tilde{U}$ im Allgemeinen nicht überein, dasselbe gilt für die \bar{z} -Ableitungen. Stattdessen haben sie das folgend beschriebene *Transformationsverhalten*: Die Kartenwechselabbildung $\tilde{z} \circ z^{-1} : z[U \cap \tilde{U}] \rightarrow \tilde{z}[U \cap \tilde{U}]$ ist biholomorph, deshalb gilt $\frac{d\tilde{z}}{dz} = 0$, die Ableitung $\frac{d\tilde{z}}{d\bar{z}}$ ist auf $U \cap \tilde{U}$ holomorph und nullstellenfrei, und wegen der Kettenregel gilt

$$\frac{df}{dz} = \frac{df}{d\tilde{z}} \cdot \frac{d\tilde{z}}{dz} \quad \text{und} \quad \frac{df}{d\bar{z}} = \frac{df}{d\bar{\tilde{z}}} \cdot \overline{\left(\frac{d\tilde{z}}{dz}\right)} \quad \text{auf } U \cap \tilde{U}. \quad (*)$$

Wir können als "invariante" Ableitung von f die Gesamtheit aller Paare von Ableitungen $\left(\frac{df}{dz}, \frac{df}{d\bar{z}}\right)$, d.h. die Familie

$$df = \left\{ \left(\frac{df}{dz}, \frac{df}{d\bar{z}} \right) \middle| (U, z) \in \mathfrak{A} \right\} \quad (\dagger)$$

zusammen mit den Transformationsformeln (*) auffassen. Wir verwenden diese Transformationsformeln nun als "Vorbild" zur Definition von Differentialformen, genauer: von 1-Formen.

1.24 Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche mit dem maximalen Atlas $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, z_\alpha) \mid \alpha \in A\}$.

- (a) Eine glatte bzw. holomorphe bzw. meromorphe *Differentialform vom Grad 0* oder kurz *0-Form* [differential form of degree 0, 0-form] ist eine Familie $f = (f_\alpha)_{\alpha \in A}$ von glatten bzw. holomorphen bzw. meromorphen Funktionen f_α auf U_α , so dass für jedes Paar $\alpha, \beta \in A$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ die *Transformationsformel*

$$f_\alpha = f_\beta \quad \text{auf } U_\alpha \cap U_\beta$$

gilt. Wir bezeichnen den Raum der glatten 0-Formen mit $C^\infty(X) = \mathcal{A}^{0,0}(X)$.

- (b) Eine glatte bzw. holomorphe bzw. meromorphe *Differentialform vom Grad 1* oder kurz *1-Form* [differential form of degree 1, 1-form] ist eine Familie $\omega = ((\omega_{\alpha,1}, \omega_{\alpha,2}))_{\alpha \in A}$ von Paaren $(\omega_{\alpha,1}, \omega_{\alpha,2})$ von glatten bzw. holomorphen bzw. meromorphen Funktionen auf U_α , so dass für jedes Paar $\alpha, \beta \in A$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ die *Transformationsformeln*

$$\omega_{\alpha,1} = \omega_{\beta,1} \cdot \frac{dz_\beta}{dz_\alpha} \quad \text{und} \quad \omega_{\alpha,2} = \omega_{\beta,2} \cdot \overline{\left(\frac{dz_\beta}{dz_\alpha}\right)} \quad \text{auf } U_\alpha \cap U_\beta$$

gelten. Wir bezeichnen den Raum der glatten 1-Formen mit $\Omega^1(X)$.

Merkregel für die Transformationsformeln. $\omega_{\alpha,1}(z_\alpha) dz_\alpha$ und $\omega_{\alpha,2}(z_\alpha) d\bar{z}_\alpha$ sind "invariant", d.h. von $\alpha \in A$ unabhängig.

Wir sagen, dass $\omega \in \Omega^1(X)$ vom Typ $(1,0)$ bzw. vom Typ $(0,1)$ ist [is of type $(1,0)$, $(0,1)$], wenn für alle $\alpha \in A$ gilt: $\omega_{\alpha,2} = 0$ bzw. $\omega_{\alpha,1} = 0$. Wir bezeichnen den Raum der glatten 1-Formen vom Typ $(1,0)$ bzw. $(0,1)$ mit $\mathcal{A}^{1,0}(X)$ bzw. mit $\mathcal{A}^{0,1}(X)$. Dadurch ergibt sich eine Zerlegung als direkte Summe $\Omega^1(X) = \mathcal{A}^{1,0}(X) \oplus \mathcal{A}^{0,1}(X)$.

- (c) Eine glatte bzw. holomorphe bzw. meromorphe *Differentialform vom Grad 2* oder kurz *2-Form* [differential form of degree 2, 2-form] ist eine Familie $\psi = (\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ von glatten

bzw. holomorphen bzw. meromorphen Funktionen ψ_α auf U_α , so dass für jedes Paar $\alpha, \beta \in A$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ die *Transformationsformel*

$$\psi_\alpha = \psi_\beta \cdot \frac{dz_\beta}{dz_\alpha} \cdot \overline{\left(\frac{dz_\beta}{dz_\alpha}\right)} \quad \text{auf } U_\alpha \cap U_\beta$$

gilt. Wir bezeichnen den Raum der glatten 2-Formen mit $\Omega^2(X) = \mathcal{A}^{1,1}(X)$.

Merkregel für die Transformationsformel. $\omega_\alpha(z_\alpha) dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha$ ist "invariant", d.h. von $\alpha \in A$ unabhängig.

Zur Definition einer Differentialform braucht man nicht den maximalen Atlas von X , es genügt, die Funktionen bzw. Paare von Funktionen für die Karten in irgendeinem verträglichen Atlas von X anzugeben. Differentialformen vom Grad 0 entsprechen offenbar globalen Funktionen auf X .

1.25 Beispiele. Sei X eine Riemannsche Fläche.

- (a) Sind φ_1, φ_2 Differentialformen vom selben Grad $k \in \{0, 1, 2\}$ und $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ eine glatte Funktion, so definieren wir $\varphi_1 + \varphi_2$ und $f \cdot \varphi_1$ "komponentenweise", d.h. durch Wirkung auf die einzelnen Funktionen bzw. Paare von Funktionen. Auf diese Weise ergeben sich wieder Differentialformen vom Grad k .

Ist außerdem $U \subset X$ eine offene Menge, so kann man aus einer Differentialform φ auf X durch Einschränkung aller Einzelfunktionen auf U eine Differentialform $\varphi|_U$ auf U erhalten.

- (b) Ist $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ eine glatte Funktion, so ist das durch (†) definierte df eine glatte Differentialform vom Grad 1 auf X . Ist f holomorph bzw. meromorph, so ist df eine holomorphe bzw. meromorphe Differentialform vom Grad 1 und Typ (1,0) auf X . Für zwei glatte Funktionen $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ gilt die Summen- und die Produktregel:

$$d(f + g) = df + dg \quad \text{und} \quad d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df.$$

- (c) Für Gebiete $G \subset \mathbb{C}$ und holomorphe Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ gilt $df = f'(z) dz$, wenn wir mit $z = \text{id}_G$ die kanonische globale Karte für G bezeichnen.
- (d) Ist $\omega = ((\omega_{\alpha,1}, \omega_{\alpha,2}))_{\alpha \in A} \in \Omega^1(X)$, so gilt für jedes $\alpha \in A$: $\omega|_{U_\alpha} = \omega_{\alpha,1} dz_\alpha + \omega_{\alpha,2} d\bar{z}_\alpha$. Dabei wird auf der linken Seite dieser Gleichung die Einschränkung auf natürliche Weise auf die einzelnen Funktionen $\omega_{\alpha,\nu}$ angewendet, und auf der rechten Seite stehen die Differentiale der Funktionen z_α und \bar{z}_α im Sinn der Definition (†). Wir werden künftig 1-Formen häufig in dieser Form angeben, wobei wir den Index α sowie die Beschränkung auf U_α weglassen, wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind.

Deshalb hat eine 1-Form ω genau dann den Typ (1,0) bzw. (0,1), wenn sie von der Gestalt $\omega = \omega_\alpha dz$ bzw. $\omega = \omega_\alpha d\bar{z}$ ist.

Insbesondere gilt für eine glatte Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ in diesem Sinne

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

Ist f holomorph oder meromorph, so vereinfacht sich diese Darstellung zu

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

1.26 Aufgabe. Prove the above rules, and all others that may be needed.

1.27 Aufgabe. The wedge product. Let X be a Riemann surface, with atlas $\{(U_\alpha, z_\alpha) \mid \alpha \in A\}$.

- (a) Let two differential 1-forms $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega^1(X)$ be given, say $\omega = ((\omega_{\alpha,1}, \omega_{\alpha,2}))_{\alpha \in A}$ and $\tilde{\omega} = ((\tilde{\omega}_{\alpha,1}, \tilde{\omega}_{\alpha,2}))_{\alpha \in A}$. For $\alpha \in A$ we define the functions

$$\psi_\alpha = \omega_{\alpha,1} \cdot \tilde{\omega}_{\alpha,2} - \tilde{\omega}_{\alpha,1} \cdot \omega_{\alpha,2} .$$

Show that $\psi := (\psi_\alpha)_{\alpha \in A} \in \Omega^2(X)$ holds. This 2-form ψ is called the *wedge product* [Dachprodukt] of ω and $\tilde{\omega}$, and is denoted by $\omega \wedge \tilde{\omega}$. Moreover, show that $\tilde{\omega} \wedge \omega = -\omega \wedge \tilde{\omega}$ holds.

- (b) Let a differential 2-form $\psi = (\psi_\alpha)_{\alpha \in A} \in \Omega^2(X)$ be given. Show that for every $\alpha \in A$ we have the local representation

$$\psi|_{U_\alpha} = \psi_\alpha \cdot (dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha) .$$

Wir definieren für glatte Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ darüber hinaus die Zerlegung von df im Sinne der direkten Summe $\Omega^1(X) = \mathcal{A}^{1,0}(X) \oplus \mathcal{A}^{0,1}(X)$, d.h. die "partiellen" Differentialoperatoren

$$d'f = \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad \text{und} \quad d''f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} .$$

Damit gilt also $d'f \in \mathcal{A}^{1,0}(X)$, $d''f \in \mathcal{A}^{0,1}(X)$ und $df = d'f + d''f$. Die Ableitung $d'f$ bzw. $d''f$ heißt die *holomorphe Ableitung* bzw. *anti-holomorphe Ableitung* von f . Diese Bezeichnungen werden durch den Sachverhalt der folgenden Aufgabe begründet:

1.28 Aufgabe. Let $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ be a smooth function on a Riemann surface X . Then f is holomorphic if and only if $d''f = 0$. If this is the case, then $d'f$ corresponds to the usual complex derivative of f , more precisely: For any chart (U, z) of X we have $d'f|_U = (f \circ z^{-1})' dz$, where on the right-hand side of the equation, $'$ denotes the usual complex derivative in the sense of Funktionentheorie I.

Wir erweitern die Differentialoperatoren d , d' , d'' für 1-Formen $\omega \in \Omega^1(X)$, und zwar indem wir für $\omega = \omega_1 dz + \omega_2 d\bar{z}$ mit glatten Funktionen ω_1, ω_2 definieren:

$$d'(\omega_1 dz + \omega_2 d\bar{z}) = \frac{\partial \omega_2}{\partial z} (dz \wedge d\bar{z}), \quad d''(\omega_1 dz + \omega_2 d\bar{z}) = -\frac{\partial \omega_1}{\partial \bar{z}} (dz \wedge d\bar{z}) \quad \text{und} \quad d\omega = d'\omega + d''\omega .$$

Aus formalen Gründen setzen wir außerdem für jedes $\psi \in \Omega^2(X)$: $d\psi = d'\psi = d''\psi = 0$.

Weil die reellen partiellen Ableitungen miteinander vertauschen, gilt auch $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}$, und deshalb für $f \in C^\infty(X)$:

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial z}\right) (dz \wedge d\bar{z}) = 0 .$$

Wir merken uns also:

$$\boxed{d \circ d = 0} \quad .$$

1.29 Aufgabe. Prove the following variant of the product rule: Let X be a Riemann surface, $f \in C^\infty(X)$ and $\omega \in \Omega^1(X)$. Then $d(f \cdot \omega) = df \wedge \omega + f \cdot d\omega$ holds.

Als vorerst letzte Operation für Differentialformen betrachten wir den sogenannten *Pullback*. Es sei Y eine weitere Riemannsche Fläche, und $\eta : Y \rightarrow X$ eine nicht-konstante, holomorphe Abbildung. Wir wollen mittels η Differentialformen auf X zu Differentialformen auf Y zurückziehen [pull back]. Für 0-Formen, also globale Funktionen $f \in C^\infty(X) = \Omega^0(X)$ geht das einfach durch Komposition: $\eta^* f := f \circ \eta \in \Omega^0(Y)$. Für 1-Formen $\omega \in \Omega^1(X)$, etwa lokal dargestellt als $\omega = f(z) dz + g(z) d\bar{z}$ bezüglich einer Karte (U, z) von X , definieren wir $\eta^* \omega \in \Omega^1(Y)$ durch

$$\eta^*(f(z) dz + g(z) d\bar{z}) = (f \circ \eta) \cdot d(z \circ \eta) + (g \circ \eta) \cdot d(\bar{z} \circ \eta).$$

Für je zwei Karten (U, z) und (\tilde{U}, \tilde{z}) von X gilt

$$\frac{d(z \circ \eta)}{d(\tilde{z} \circ \eta)} = \frac{dz}{d\tilde{z}} \circ \eta, \quad (\diamond)$$

und deshalb wird durch diese Definition tatsächlich eine globale Differentialform $\eta^* \omega \in \Omega^1(Y)$ definiert. Für 2-Formen gehen wir ganz genauso vor: Für $\psi \in \Omega^2(X)$ definieren wir $\eta^* \psi \in \Omega^2(Y)$ durch die lokale Festlegung

$$\eta^*(f(z) (dz \wedge d\bar{z})) = (f \circ \eta) \cdot (d(z \circ \eta) \wedge d(\bar{z} \circ \eta)),$$

die ebenfalls wegen (\diamond) eine globale 2-Form beschreibt.

1.30 Aussage. Es seien X, Y Riemannsche Flächen und $\eta : Y \rightarrow X$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung.

(a) Für $f \in C^\infty(X)$ gilt $d(\eta^* f) = \eta^* df$.

(b) Für $\omega \in \Omega^1(X)$ gilt $d(\eta^* \omega) = \eta^* d\omega$.

Beweis. Für (a): Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass η lokal biholomorph ist. Ist (U, z) eine Karte von X , so existiert eine offene Teilmenge $V \subset Y$ mit $\eta[V] \subset U$, so dass $(V, z \circ \eta|_V)$ eine Karte von Y ist. Dann gilt:

$$d(\eta^* f) = d(f \circ \eta) = \frac{\partial(f \circ \eta)}{\partial(z \circ \eta)} d(z \circ \eta) + \frac{\partial(f \circ \eta)}{\partial(\bar{z} \circ \eta)} d(\bar{z} \circ \eta) \stackrel{(\diamond)}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ \eta \right) d(z \circ \eta) + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \circ \eta \right) d(\bar{z} \circ \eta) = \eta^* df.$$

Der Beweis von (b) läuft entsprechend. □

1.4 Integration und Residuum

Bei der Definition von Differentialformen sind wir von dem Bestreben geleitet worden, die Ableitung einer glatten Funktion auf einer Riemannschen Fläche durch ein globales Objekt zu beschreiben. Auch für die entgegengesetzte Operation, die Integration, sind Differentialformen die geeigneten Objekte, und zwar werden 1-Formen längs Kurven, und 2-Formen auf Flächen (offene oder kompakte Teilmengen einer Riemannschen Fläche) integriert.

Wir definieren derartige Integrale zunächst für Differentialformen, deren Träger in einer Kartenumgebung U der Riemannschen Fläche X enthalten sind. In diesem Fall genügt es, den Fall zu betrachten, dass der Integrationsweg bzw. das Integrationsgebiet ebenfalls in U enthalten ist. Sei also (U, z) eine Karte von X , $\omega \in \Omega^1(X)$ mit $\text{Tr}(\omega) \subset U$ und $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ eine glatte Kurve in U . In diesem Fall ist $\omega|_U = f(z) dz + g(z) d\bar{z}$ und wir definieren, fast wie in Funktionentheorie I,

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b (f(\gamma(t)) \cdot (z \circ \gamma)'(t) + g(\gamma(t)) \cdot \overline{(z \circ \gamma)'(t)}) dt.$$

Das schöne an dieser Festlegung ist, dass sie unabhängig von der Wahl der Karte ist. Ist nämlich (\tilde{U}, \tilde{z}) eine weitere Karte mit $\text{Tr}(\omega) \subset \tilde{U}$ und $\gamma[[a, b]] \subset \tilde{U}$, etwa $\omega|_{\tilde{U}} = \tilde{f}(\tilde{z}) d\tilde{z} + \tilde{g}(\tilde{z}) d\tilde{z}$, so gilt wegen der Transformationsregel für 1-Formen für alle $t \in [a, b]$

$$\tilde{f}(\gamma(t)) = f(\gamma(t)) \frac{dz}{d\tilde{z}}(\gamma(t)) \quad \text{und} \quad \tilde{g}(\gamma(t)) = g(\gamma(t)) \overline{\left(\frac{dz}{d\tilde{z}}(\gamma(t))\right)}$$

und wegen der Kettenregel

$$(\tilde{z} \circ \gamma)'(t) = ((\tilde{z} \circ z^{-1}) \circ (z \circ \gamma))'(t) = (\tilde{z} \circ z^{-1})'(z(\gamma(t))) \cdot (z \circ \gamma)'(t) = \frac{d\tilde{z}}{dz}(\gamma(t)) \cdot (z \circ \gamma)'(t),$$

und somit

$$\int_a^b (\tilde{f}(\gamma(t)) (\tilde{z} \circ \gamma)'(t) + \tilde{g}(\gamma(t)) \overline{(\tilde{z} \circ \gamma)'(t)}) dt = \int_a^b (f(\gamma(t)) (z \circ \gamma)'(t) + g(\gamma(t)) \overline{(z \circ \gamma)'(t)}) dt.$$

Das ist der Grund, warum 1-Formen die passenden Integranden für die Integration längs Kurven sind.

Entsprechendes gilt für die Integration von 2-Formen auf Flächen: Ist $\psi \in \Omega^2(X)$ mit $\text{Tr}(\psi) \subset U$, etwa $\psi|_U = f(z) dz \wedge d\bar{z}$, so definieren wir

$$\int_U \psi = \int_{z[U]} (f \circ z^{-1})(w) d^2(w),$$

wobei auf der rechten Seite ein 2-dimensionales (Lebesgue-)Integral über ein Gebiet in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ steht. Ist $h : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so ist $|h'|^2$ gleich der Determinante der Jacobi-Matrix von h als reell differenzierbare Funktion; hieraus und aus dem Transformationssatz für mehrdimensionale Integrale ergibt sich, dass auch dieses Integral koordinatenunabhängig ist.

Um auf diese Weise auch global definierte Differentialformen integrieren können, verwenden wir sogenannte glatte Zerlegungen der Eins.

1.31 Satz. (Existenz von glatten Zerlegungen der Eins.) Sei X eine Riemannsche Fläche, und $\mathfrak{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von X . Dann existiert für \mathfrak{U} eine *Zerlegung der Eins* [partition of unity] von X , das ist eine Familie $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ von glatten Funktionen $f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) $0 \leq f_\alpha \leq 1$
- (b) $\text{Tr}(f_\alpha) \subset U_\alpha$
- (c) *Lokale Endlichkeit:* Für jedes $x \in X$ existiert eine Umgebung $U(x)$ von x in X , so dass alle bis auf endlich viele der f_α auf $U(x)$ verschwinden.

$$(d) \sum_{\alpha \in A} f_\alpha = 1.$$

Die Bezeichnung "Zerlegung der Eins" kommt natürlich von Eigenschaft (d). Wegen der lokalen Endlichkeit ist die Summe in Eigenschaft (d), wenn man sie an einem Punkt auswertet, jeweils nur eine Summe von endlich vielen positiven Zahlen. **Frage:** Gibt es auch holomorphe Zerlegungen der Eins?

Um nun Integrale global auf Riemannschen Flächen X zu definieren, betrachten wir einen holomorphen Atlas $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, z_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ von X und wählen nach obigem Satz zur offenen Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ von X eine passende, glatte Zerlegung der Eins $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$. Ist nun $\omega \in \Omega^1(X)$ und $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ eine glatte Kurve, so definieren wir

$$\int_\gamma \omega := \sum_\alpha \int_\gamma f_\alpha \cdot \omega.$$

Dabei ist jeweils $\text{Tr}(f_\alpha \cdot \omega)$ in der Kartenumgebung U_α enthalten, so dass die rechtsstehenden Integrale am Anfang dieses Abschnitts definiert wurden. Die Summe läuft über alle $\alpha \in A$ für die U_α mit $\gamma[[a, b]]$ einen nicht-leeren Durchschnitt hat; weil $\gamma[[a, b]]$ kompakt ist, sind dies nur endlich viele, so dass die Summe eine komplexe Zahl ergibt. Schließlich ist die Definition nach der Koordinaten-Invarianz-Rechnung am Anfang dieses Abschnitts unabhängig von der Wahl des Atlas und der Zerlegung der Eins. Entsprechend definieren wir für $\psi \in \Omega^2(X)$ und eine (relativ) kompakte Teilmenge K von X

$$\int_K \psi = \sum_\alpha \int_K f_\alpha \cdot \psi.$$

Dabei sind die rechtsstehenden Integrale wieder von der zuvor definierten Art, und weil K kompakt ist, kann die Summe wieder als endlich angenommen werden. Auch diese Definition ist unabhängig von Atlas und Zerlegung der Eins.

Beweisskizze für Satz 1.31. Weil X abzählbare Topologie hat, dürfen wir ohne Beschränkung annehmen, dass $A = \mathbb{N}$ abzählbar ist, also $\mathfrak{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Man kann zeigen, dass möglicherweise nach einer Verfeinerung der offenen Überdeckung (U_n) die U_n Kartenumgebungen zu Karten ϕ_n von X sind, so dass die Bilder $\phi_n[U_n] = B(0, r_n)$ Bälle von gewissen Radien $r_n > 0$ sind, dass aber umgekehrt schon $(\phi_n^{-1}[B(0, r_n/2)])_{n \in \mathbb{N}}$ ganz X überdeckt. Die Verfeinerung kann darüber hinaus so gewählt werden, dass jedes U_n nur mit endlich vielen anderen U_m einen nicht-leeren Durchschnitt hat.

Um in dieser Situation eine Zerlegung der Eins zu konstruieren, betrachten wir für reelle Zahlen $a < b$ die Funktion $f_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, $x \mapsto f_{a,b}(x)$ mit

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq a \\ \exp\left(\frac{1}{x-b} \exp\left(\frac{1}{a-x}\right)\right) & \text{für } a < x < b \\ 0 & \text{für } b \leq x \end{cases}.$$

Man kann zeigen, dass $f_{a,b}$ glatt ist. Für $r > 0$ ist dann die Funktion $g_r(z) = f_{r/2, 2r/3}(|z|)$ eine glatte Funktion auf \mathbb{C} , die außerhalb von $B(0, 2r/3)$ verschwindet und auf $B(0, r/2)$ identisch gleich 1 ist. Wir setzen die glatte Funktion $h_n = g_{r_n} \circ \phi_n$ auf U_n zu einer glatten Funktion auf X fort, indem wir sie außerhalb von U_n auf Null setzen. Damit sind die beiden Funktionen h_n , $1 - h_n$ eine Zerlegung der Eins zu der zwei-elementigen offenen Überdeckung $\{U_n, \bigcup_{m \neq n} U_m\}$ von X .

Mithilfe der h_n können wir die gewünschte Zerlegung der Eins $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstruieren: Wir setzen

$$f_n = h_n \prod_{l=1}^{n-1} (1 - h_l) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt offenbar $0 \leq f_n \leq 1$ und $\text{Tr}(f_n) \subset \text{Tr}(h_n) \subset U_n$. Weil U_n nur mit endlich vielen anderen U_m einen nicht-leeren Durchschnitt hat, gilt die Bedingung der lokalen Endlichkeit. Schließlich zeigt man durch Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f_1 + \dots + f_n + \prod_{l=1}^n (1 - h_l) = 1.$$

Ist $x \in X$ gegeben, so gibt es ein $n(x) \in \mathbb{N}$ mit $\phi_{n(x)}(x) \in B(0, r_n/2)$ und damit $h_{n(x)}(x) = 1$. Für jedes $n \geq n(x)$ gilt dann $f_1(x) + \dots + f_n(x) = 1$ und somit $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = 1$. \square

1.32 Aussage. Rechenregeln für das Kurvenintegral. Sei X eine Riemannsche Fläche und $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ eine glatte Kurve.

- (a) Für $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(X)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ gilt $\int_{\gamma} (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_1 \int_{\gamma} \omega_1 + \lambda_2 \int_{\gamma} \omega_2$.
- (b) Für $f \in C^\infty(X)$ gilt $\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$. Insbesondere ist $\int_{\gamma} df = 0$, falls die Kurve γ geschlossen ist.
- (c) Ist $\omega \in \Omega(X)$, Y eine weitere Riemannsche Fläche, $\eta : Y \rightarrow X$ eine nicht-konstante, holomorphe Abbildung, und $\alpha : [a, b] \rightarrow Y$ eine glatte Kurve, so gilt $\int_{\alpha} \eta^* \omega = \int_{\eta \circ \alpha} \omega$.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, dass sowohl γ als auch $\text{Tr}(\omega), \text{Tr}(\omega_k)$ in einer Kartenumgebung U zu einer Karte (U, z) von X enthalten sind. Für diesen Fall ist (a) offensichtlich. Für (b) gilt (wobei wir wieder $z = x + iy$ mit den reell differenzierbaren Funktionen $x = \text{Re}(z), y = \text{Im}(z) : U \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben):

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} df &= \int_{\gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)) \cdot (z \circ \gamma)'(t) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\gamma(t)) \cdot \overline{(z \circ \gamma)'(t)} \right) \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot (x \circ \gamma)'(t) + i \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot (y \circ \gamma)'(t) \right) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Für (c) können wir wieder annehmen, dass $z \circ \eta$ eine Karte von Y ist. Wir schreiben lokal $\omega = \omega_1(z) dz + \omega_2(z) d\bar{z}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \eta^* \omega &= \int_{\alpha} ((\omega_1 \circ \eta) d(z \circ \eta) + (\omega_2 \circ \eta) d(\bar{z} \circ \eta)) \\ &= \int_a^b (\omega_1(\eta(\alpha(t))) (z \circ \eta \circ \alpha)'(t) + \omega_2(\eta(\alpha(t))) \overline{(z \circ \eta \circ \alpha)'(t)}) dt = \int_{\eta \circ \alpha} \omega. \end{aligned}$$

Für den allgemeinen Fall ergeben sich die Aussagen hieraus durch Anwendung einer Zerlegung der Eins. \square

Für Flächenintegrale gilt auch in dieser Situation der Satz von Stokes, den wir hier ohne Beweis zitieren:

1.33 Satz. Satz von Stokes. Es sei X eine Riemannsche Fläche, $\omega \in \Omega^1(X)$, $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge, deren Rand durch die geschlossene Kurve ∂K glatt und in mathematisch positiver Richtung berandet sei. Dann gilt

$$\int_K d\omega = \int_{\partial K} \omega.$$

Unter den Differentialformen vom Grad 1 spielen zwei Klassen eine besondere Rolle, nämlich die geschlossenen und die exakten 1-Formen:

1.34 Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche, und $\omega \in \Omega^1(X)$.

- (a) ω heißt *geschlossen* [closed], wenn $d\omega = 0$ ist.
- (b) ω heißt *exakt* [exact], wenn es ein $f \in C^\infty(X)$ mit $df = \omega$ gibt. Ein solches f heißt *Stammfunktion* [primitive] zu ω .

Die Regel $d \circ d = 0$ zeigt, dass jede exakte 1-Form auch geschlossen ist. Die folgende Aufgabe zeigt, dass die Umkehrung dieser Aussage im Allgemeinen falsch ist. Wir werden jedoch bald sehen, dass auf *einfach zusammenhängenden* Riemannschen Flächen die Umkehrung richtig ist, d.h. jede geschlossene 1-Form auch exakt ist.

1.35 Aufgabe. Consider $X = \mathbb{C}^*$, the smooth 1-form $\omega \in \Omega^1(X)$ that is given with respect to the global chart $z = x + iy = \text{id}_{\mathbb{C}^*}$ of \mathbb{C}^* by

$$\omega = -\frac{y}{|z|^2} dx + \frac{x}{|z|^2} dy,$$

and the closed smooth curve $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}^*$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ that parameterises S^1 .

Show that ω is closed, compute $\int_\gamma \omega$ and conclude that ω is not exact.

1.36 Aufgabe. Let X be a Riemann surface and $\omega \in \mathcal{A}^{1,0}(X)$. Show that ω is holomorphic if and only if it is closed.

We now introduce two equivalence relations on curves that have the same endpoints that do not change the integrals of closed 1-forms.

1.37 Definition. Let $\gamma, \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X$ be two curves in a Riemann surface such that $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$ and $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(1)$.

- (a) The curves are *homologous* if there exists a compact subset $K \subset X$ whose boundary is $\gamma[[0, 1]] \cup \tilde{\gamma}[[0, 1]]$.
- (b) The curves are (smoothly) *homotopic* if there is a smooth function $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ such that $h(t, 0) = \gamma(t)$ and $h(t, 1) = \tilde{\gamma}(t)$.

The function h above is called a homotopy of the curves γ and $\tilde{\gamma}$. We think of the second parameter as a deformation parameter. At $s = 0$ we have γ . As we increase s we deform it to the curve $t \mapsto h(t, s)$ in X . Finally, when $s = 1$ we have deformed it to $\tilde{\gamma}$. The requirement that h is a smooth map ensures that all the intermediate curves are also smooth, which was an assumption in the definition of integration along a curve. This is only a technicality because every continuous curve is continuously homotopic to a smooth curve.

For homologous curves, we can see that one must agree with the orientation of the boundary ∂K and one must disagree. If ω is a closed 1-form, then by Stokes' theorem we have that $\int_{\gamma} \omega - \int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{\partial K} \omega = \int_K d\omega = 0$. In other words, the integrals over the two curves are equal. This was hardly a proof, more an observation of a useful way to apply Stokes' theorem. In a similar way, we say that a collection of closed curves $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ is homologous to another collection of closed curves $\{\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n\}$ if there is a compact region $K \subset X$ such that the boundary ∂K is the union of the curves, the curves in the first set all agree with the orientation of ∂K , and the curves in the second set all disagree. Stokes' theorem applies now to say, for a closed 1-form ω , that

$$\int_{\gamma_1} \omega + \dots + \int_{\gamma_n} \omega = \int_{\tilde{\gamma}_1} \omega + \dots + \int_{\tilde{\gamma}_n} \omega.$$

We want to apply the same idea to homotopic curves, but there is no restriction that the image of the homotopy has to lie 'between' the two curves. The standard proof uses Stokes' theorem for manifolds in higher dimensions, and so we omit it. The result, that the integrals of a closed form on homotopic curves are equal, is a useful one to keep in mind.

1.38 Aussage und Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche, $\omega \in \mathcal{A}^{1,0}(X)$ eine meromorphe 1-Form vom Typ $(1,0)$ auf X , und $x \in X$. Für jede Karte (U, z) von X mit $x \in U$ und $z(x) = 0$ gibt es genau ein $c \in \mathbb{C}$, so dass die 1-Form $\omega - \frac{c}{z} \cdot dz$ auf einer Umgebung von x exakt ist. Der Wert von c hängt nicht von der Wahl der Karte z ab. Dieser Wert wird das *Residuum* [residue] von ω in x genannt, und mit $\text{Res}_x(\omega)$ bezeichnet.

Beweis. Bezüglich einer Karte (U, z) wie in der Aussage können wir $\omega = \omega_1(z) dz$ mit einer meromorphen Funktion $\omega_1 : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ schreiben. $\omega_1 \circ z^{-1}$ ist dann auf $z[U] \subset \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion im Sinne der Funktionentheorie I. Ist $c \in \mathbb{C}$ der Koeffizient zu z^{-1} der Laurentreihe dieser Funktion in $z = 0$, so besitzt $\omega_1 \circ z^{-1} - \frac{c}{z}$ auf $B(0, \varepsilon)$ eine Stammfunktion g , und dies ist für keine andere Wahl von c der Fall. Hier ist $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, dass $B(0, \varepsilon) \subset z[U]$ ist. Dann besitzt $(\omega - \frac{c}{z} dz)|_{z^{-1}[B(0, \varepsilon)]}$ die Stammfunktion $(g \circ z)|_{z^{-1}[B(0, \varepsilon)]}$.

Ist nun (\tilde{U}, \tilde{z}) eine weitere Karte von X mit $x \in \tilde{U}$ und $\tilde{z}(x) = 0$, so gibt es nach dem Vorgegangenen genau ein $\tilde{c} \in \mathbb{C}$, so dass $\omega - \frac{\tilde{c}}{\tilde{z}} d\tilde{z}$ auf einer Umgebung von x eine Stammfunktion besitzt. Dann gibt es eine Umgebung in $U \cap \tilde{U}$, auf der $\frac{c}{z} dz - \frac{\tilde{c}}{\tilde{z}} d\tilde{z} = \frac{c - \tilde{c}}{z} dz + \tilde{c} \cdot (\frac{1}{z} dz - \frac{1}{\tilde{z}} d\tilde{z})$ eine Stammfunktion besitzt. Die 1-Form $\frac{1}{z} dz - \frac{1}{\tilde{z}} d\tilde{z}$ ist in x holomorph, und besitzt daher in der Nähe von x eine Stammfunktion. Also besitzt auch $\frac{c - \tilde{c}}{z} dz$ lokal in der Nähe von x eine Stammfunktion, und das ist nur für $c - \tilde{c} = 0$ möglich. \square

1.39 Aussage. Seien X, Y Riemannsche Flächen, $\omega \in \mathcal{A}^{1,0}(X)$ eine meromorphe 1-Form vom Typ $(1,0)$, $y \in Y$ und $f : Y \rightarrow X$ eine holomorphe Abbildung, die bei y lokal injektiv ist. Dann gilt die *Transformationsformel* $\text{Res}_y(f^*\omega) = \text{Res}_{f(y)}(\omega)$.

Beweis. Ist z eine Kartenfunktion von X bei $f(y)$, so ist $z \circ f$ (falls erforderlich, eine Einschränkung davon) eine Kartenfunktion von Y bei y . $\omega - \text{Res}_{f(y)}(\omega) \cdot \frac{dz}{z}$ besitzt in der Nähe von $f(y)$ eine holomorphe Stammfunktion g . Dann gilt

$$d(g \circ f) = f^* dg = f^* \omega - \text{Res}_{f(y)}(\omega) \cdot \frac{d(z \circ f)}{z \circ f},$$

anders gesagt: $f^* \omega - \text{Res}_{f(y)}(\omega) \cdot \frac{d(z \circ f)}{z \circ f}$ besitzt bei y lokal eine holomorphe Stammfunktion. Wegen der Eindeutigkeitsaussage in Definition 1.38 folgt daraus die Behauptung. \square

1.40 Aussage. Sei X eine Riemannsche Fläche, $\omega \in \mathcal{A}^{1,0}(X)$ eine meromorphe 1-Form vom Typ $(1,0)$, $x \in X$, und (U, z) eine Karte von X mit $x \in U$ und $z(x) = 0$. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$ mit $B(0, \varepsilon) \subset z[U]$:

$$\text{Res}_x(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z^{-1} \circ \partial B(0, \varepsilon)} \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} (z^{-1})^* \omega.$$

Beweis. Dies ergibt sich, indem man die entsprechende klassische Aussage der Funktionentheorie I mit der Transformationsformel der Aussage 1.39 für $f = z^{-1}$ kombiniert. \square

Meromorphe Differentiale vom Typ $(1,0)$ heißen auch *abelsche Differentiale* [abelian differentials]. Nach einem alten Sprachgebrauch unterteilt man sie in drei Arten: Abelsche Differentiale *der ersten Art* [of the first kind] sind holomorph. Bei Abelschen Differentialen *der zweiten Art* [of the second kind] verschwindet ihr Residuum an jedem Pol. Und Abelsche Differentiale *der dritten Art* [of the third kind] haben genau zwei Polstelle, die nur erste Ordnung haben.

1.5 Algebraische Kurven

This section draws from Miranda “Algebraic Curves and Riemann Surfaces”.

1.41 Definition. A *plane curve* is the set $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid f(z, w) = 0\}$ for an polynomial f in two variables. This is a Riemann surface if $\partial f / \partial z$ and $\partial f / \partial w$ are never simultaneously zero on the curve and f is irreducible.

1.42 Bemerkung. Plane curves are not compact. By the fundamental theorem of algebra, we can always solve $f(z_0, w) = 0$ for any value of $z_0 \in \mathbb{C}$.

To see that this is in fact a Riemann surface, we appeal to the implicit function theorem for holomorphic functions (a polynomial in complex coordinates is always holomorphic): if at a point (z_0, w_0) of the curve we have $\partial f / \partial w(z_0, w_0) \neq 0$ then there is a holomorphic function g on a neighbourhood of z_0 such that the curve is locally a graph of the form $w = g(z)$ with $w_0 = g(z_0)$. A coordinate chart around (z_0, w_0) is given by projection $(z, w) \mapsto z$. Irreducibility of f ensures that the result is connected, but it is not so simple to prove (Miranda cites Shafarevich77, a standard text on algebraic geometry).

1.43 Beispiele. (a) The nice thing about curves is that they come with many easy holomorphic functions. Indeed, any holomorphic function of two variables restricts to give a holomorphic on the curve. For example, if the curve is a graph over z at some point, then we can write

the function as $F(z, g(z))$ in local coordinates. This is holomorphic by the chain rule. Two functions may restrict to give the same function on the curve. An obvious example is that f considered as a holomorphic function on \mathbb{C}^2 restricts to give the zero function, by definition.

- (b) We can also construct differentials on a curve, via two methods. Simply, we can take the differentials dz and dw on \mathbb{C}^2 and restrict them. However we have not properly defined complex differentials on higher dimensional spaces. Therefore we give a direct construction: in every sufficiently small neighbourhood, either z or w is a local coordinate (or possibly both). Therefore either dz or dw are non-vanishing holomorphic differential forms in this neighbourhood. Even when z or w are not local coordinates, they are global holomorphic functions on the curve, and so their exterior derivative is a holomorphic $\mathcal{A}^{1,0}$ form. Because f is identically zero on the curve $df = 0$. Then by the chain rule

$$0 = df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial w} dw$$

gives us a relation between dz and dw on the curve at most points. At a point where the curve is not a graph over z , ie $\partial f / \partial w = 0$, then we see that $dz = 0$ at that point.

To every plane curve there is an associated projective curve. A homogeneous polynomial of degree d is a polynomial with the property $F(\lambda z_0, \dots, \lambda z_n) = \lambda^d F(z_0, \dots, z_n)$. Intuitively this means that in each term of the polynomial the powers add up to d . The zero set of a homogeneous polynomial is invariant with respect to rescaling. Consequently the zero set is a well defined subset of $\mathbb{K}P^n$, even though F is not a function on $\mathbb{K}P^n$.

1.44 Definition. A *projective curve* is the set $\{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{C}P^2 \mid F(z_0, z_1, z_2) = 0\}$ for a homogeneous polynomial F in three variables.

1.45 Bemerkung. As a projective curve is a closed subset of projective space, which is compact, it is also compact.

The subset $U_0 = \{[1 : z : w] \in \mathbb{C}P^2\}$ is biholomorphic to \mathbb{C}^2 . Thus from a projective curve X we have an affine curve $X \cap U_0$ whose polynomial is $f(z, w) = F(1, z, w)$. The same holds for the other subset U_i . If these three affine curves are Riemann surfaces, then the projective curve must a Riemann surface too. Miranda Lemma 3.5 gives the criterion that this is equivalent to

$$F = \frac{\partial F}{\partial z_0} = \frac{\partial F}{\partial z_1} = \frac{\partial F}{\partial z_2} = 0$$

having no solutions (with the comment that F will then be irreducible automatically).

We can also reverse this. Given a polynomial f in two variables, we can define a homogeneous polynomial

$$F(z_0, z_1, z_2) = f\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right).$$

This is called the associated projective curve. It is also known as the *compactification* of the plane curve.

1.46 Beispiele. (a) There are no interesting examples of holomorphic function on projective curves, because every holomorphic function is constant.

- (b) There are many examples of meromorphic functions on projective curves, just take the quotient of homogeneous polynomials of the same degree (doesn't have to be the same degree as F).
- (c) This seems a little contradictory; there are many holomorphic functions on plane curves but none on projective curve. If h is a polynomial in two variables of degree d then we have the meromorphic function $h(z_0^{-1}z_1, z_0^{-1}z_2)$ which we can write as the quotient of the polynomials $z_0^d h(z_0^{-1}z_1, z_0^{-1}z_2)$ and z_0^d . On the subset U_0 this gives us back the polynomial $h(z_1, z_2)$ on the plane curve. But we see that there is a degree d pole at the points of projective curve where $z_0 = 0$. This is similar to a polynomial on \mathbb{C} when extended to $\widehat{\mathbb{C}}$ has a pole at $z = 0$ of order equal to its degree.

Chapter 2

Überlagerungen

We have seen that quotients are a useful way of constructing new Riemann surfaces. In the example of the complex torus, the quotient was more complicated than the original space (the plane). In this section we show that this is typical in some sense: we show that any Riemann surface is the quotient of a simply connected Riemann surface.

2.1 Überlagerungen

Since we want to ‘reverse’ a quotient, it is important to understand the canonical projection better. They are essentially covering maps.

2.1 Definition. Seien X, Y topologische Räume. Eine surjektive, stetige Abbildung $\pi : X \rightarrow Y$ heißt (*unverzweigte*) *Überlagerung* [(unbranched) covering map], wenn es zu jedem Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung $V(y) \subset Y$ und für jedes $x \in \pi^{-1}[\{y\}]$ eine offene Umgebung $U(x) \subset X$ gibt, so dass gilt:

- (i) $\pi^{-1}[V(y)] = \dot{\bigcup}_{x \in \pi^{-1}[\{y\}]} U(x)$ (disjunkte Vereinigung!)
- (ii) $\pi|_{U(x)} : U(x) \rightarrow V(y)$ ist jeweils ein Homöomorphismus *auf* $V(y)$.

In dieser Situation sagt man, dass die Überlagerung π über $V(y)$ *trivial* [trivial] ist.

Sind in der Situation der Definition X, Y Riemannsche Flächen und ist die Überlagerung $\pi : X \rightarrow Y$ holomorph, so sind wegen dem Satz von Osgood die Homöomorphismen $\pi|_{U(x)}$ aus (ii) schon biholomorph. Insbesondere ist π dann automatisch lokal biholomorph.

2.2 Beispiele. (a) Sei Z ein diskreter topologischer Raum (z.B. eine endliche Menge) und Y ein weiterer topologischer Raum. Dann ist $\pi : Z \times Y \rightarrow Y, (z, y) \mapsto y$ eine Überlagerung. In dieser Situation kann $V(y) = Y$ für jedes $y \in Y$ gewählt werden, deshalb heißen derartige Überlagerungen *trivial*.

- (b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\pi : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto z^n$ eine n -blättrige, holomorphe Überlagerung. Die entsprechende Abbildung auf \mathbb{C} hat bei $z = 0$ einen *Verzweigungspunkt*.

- (c) We met the complex tori in Example 1.22(c). The canonical projection $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ is a covering map. If we take a small ball B at the origin such that $\gamma[B] \cap B = \emptyset$ for all $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$, then $p[z + B]$ is an open neighbourhood of $p(z)$ and

$$p^{-1}[p[z + B]] = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(z) + B.$$

2.3 Aufgabe. Let X, Y be topological spaces, Y be connected, and $\pi : X \rightarrow Y$ a covering map so that $\pi^{-1}[\{y\}]$ is finite for every $y \in Y$. Then there exists $n \in \mathbb{N}$ so that $\#\pi^{-1}[\{y\}] = n$ for all $y \in Y$. In this situation one says that π is an *n-fold covering map* [*n-fache Überlagerung* oder *n-blättrige Überlagerung*].

Die nächste Aussage befasst sich mit dem Liften ("Hochheben") von Kurven oder Abbildungen auf Rechtecken:

2.4 Lemma. Es seien X, Y topologische Räume, und $\pi : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung.

- (a) Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow Y$ ein stetiger Weg, $t_0 \in [a, b]$ und $x_0 \in \pi^{-1}[\{\alpha(t_0)\}]$. Dann existiert genau ein stetiger Weg $\tilde{\alpha} : [a, b] \rightarrow X$ mit $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ und $\tilde{\alpha}(t_0) = x_0$. Die Kurve $\tilde{\alpha}$ heißt der *Lift* [lift] von α .
- (b) Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ (nicht unbedingt endliche) Intervalle, $Q = I \times J$, $h : Q \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, $q_0 \in Q$ und $x_0 \in \pi^{-1}[\{h(q_0)\}]$. Dann existiert genau eine stetige Abbildung $\tilde{h} : Q \rightarrow X$ mit $\pi \circ \tilde{h} = h$ und $\tilde{h}(q_0) = x_0$. Die Abbildung \tilde{h} heißt der *Lift* [lift] von h .

Beweis. Für (a). Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit: Sind $\tilde{\alpha}, \hat{\alpha}$ zwei Lifts von α mit $\tilde{\alpha}(t_0) = x_0 = \hat{\alpha}(t_0)$, so ist die Menge $A = \{t \in I \mid \tilde{\alpha}(t) = \hat{\alpha}(t)\}$ wegen der Stetigkeit von $\tilde{\alpha}, \hat{\alpha}$ abgeschlossen und wegen $x_0 \in A$ nicht leer. Sie ist auch offen, denn für $t \in A$ gibt es eine Umgebung $V(\alpha(t))$, über der π trivial ist, und dann stimmen $\tilde{\alpha}, \hat{\alpha}$ auf der t enthaltenden Zusammenhangskomponente der offenen Menge $\alpha^{-1}[V(\alpha(t))] \ni t$ überein. Da I zusammenhängend ist, folgt $A = I$ und somit $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha}$.

Zur Existenz: Wir dürfen $t_0 = a$ annehmen. Für jedes $t \in [a, b]$ sei $V(t)$ eine Umgebung von $\alpha(t)$ in Y , über der π trivial ist, und die Zusammenhangskomponente von $\alpha^{-1}[V(t)]$ durch t ist eine offene Umgebung $I(t)$ von t in I . Die $(I(t))_{t \in [a, b]}$ bilden eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[a, b]$. Daher existiert eine endliche Teilüberdeckung $I(t_0), \dots, I(t_n)$ von I , und wir können $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ annehmen. Auf jedem der $I(t_k)$ besitzt α offenbar einen Lift $\tilde{\alpha}_k$, und zwar können wir $\tilde{\alpha}_0$ mit $\tilde{\alpha}_0(t_0) = x_0$ und induktiv, nachdem wir die Lifts $\tilde{\alpha}_0, \dots, \tilde{\alpha}_k$ schon konstruiert haben, den Lift $\tilde{\alpha}_{k+1}$ mit $\tilde{\alpha}_{k+1}(t_{k+1}) = \tilde{\alpha}_k(t'_{k+1})$ für ein beliebig gewähltes $t'_{k+1} \in I(t_k) \cap I(t_{k+1})$ wählen. Weil $I(t_k) \cap I(t_{k+1})$ ein Intervall ist, folgt aus dieser Wahl $\tilde{\alpha}_{k+1}|_{I(t_k) \cap I(t_{k+1})} = \tilde{\alpha}_k|_{I(t_k) \cap I(t_{k+1})}$, und deshalb setzen sich alle $\tilde{\alpha}_k$ zu einem stetigen Lift $\tilde{\alpha} : [a, b] \rightarrow X$ mit $\tilde{\alpha}(t_0) = x_0$ zusammen.

Für (b). Zum Beweis kann man annehmen, dass Q kompakt ist, weil man jedes Rechteck als aufsteigende Vereinigungen von kompakten Rechtecken ausschöpfen kann. Man kann ebenfalls annehmen, dass q_0 ein Eckpunkt von Q ist, indem man Q eventuell zerlegt. Dann folgt der Beweis wie bei der Kurvenliftung. \square

2.5 Definition. Ein topologischer Raum X heißt *lokal wegzusammenhängend* [locally arc connected], wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder Umgebung U von x in X eine wegzusammenhängende Umgebung V mit $x \in V \subset U$ gibt.

Riemannsche Flächen sind offensichtlich lokal wegzusammenhängend.

Der folgende Satz verallgemeinert das Lemma 2.4 für beliebige, einfach zusammenhängende Definitionsgebiete:

2.6 Satz. Es seien X, Y, Z lokal wegzusammenhängende topologische Räume, $\pi : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung, $g : Z \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, $z_0 \in Z$ und $x_0 \in \pi^{-1}\{g(z_0)\}$. Sofern Z einfach zusammenhängend ist, existiert genau eine stetige Abbildung $\tilde{g} : Z \rightarrow X$ mit $\pi \circ \tilde{g} = g$ und $\tilde{g}(z_0) = x_0$. Die Abbildung \tilde{g} heißt der *Lift* [lift] von g .

Zusatz. Sind X, Y, Z Riemannsche Flächen, ist π holomorph, und ist g holomorph (glatt), so ist auch \tilde{g} holomorph (glatt).

Beweis. Sei $z \in Z$ und $\alpha : [0, 1] \rightarrow Z$ ein stetiger Weg mit $\alpha(0) = z_0$ und $\alpha(1) = z$. Nach Lemma 2.4(a) gibt es genau einen Lift $\beta : [0, 1] \rightarrow X$ der Kurve $g \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow Y$ mit $\beta(0) = x_0$. Sind α_0, α_1 zwei derartige Wege zum selben $z \in Z$, so existiert, weil Z einfach zusammenhängend ist, eine stetige Abbildung $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Z$, so dass für alle $t, s \in [0, 1]$ gilt:

$$h(t, 0) = \alpha_0(t), \quad h(t, 1) = \alpha_1(t), \quad h(0, s) = z_0 \quad \text{und} \quad h(1, s) = z.$$

(Ein solches h heißt eine *Homotopie mit festgehaltenen Randpunkten* von α_0 und α_1 .) Nach Lemma 2.4(b) gibt es genau einen stetigen Lift $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ der Abbildung $g \circ h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$ mit $k(0, 0) = x_0$. Für alle $s \in [0, 1]$ liegt $k(0, s)$ bzw. $k(1, s)$ in der diskreten Menge $\pi^{-1}\{z_0\}$ bzw. $\pi^{-1}\{z\}$. Wegen der Stetigkeit von k folgt, dass für alle $s \in [0, 1]$ gilt:

$$k(0, s) = k(0, 0) = x_0 \quad \text{und} \quad k(1, s) = k(1, 0).$$

Deshalb ist $k(\cdot, 0)$ bzw. $k(\cdot, 1)$ der stetige Lift von $g \circ \alpha_0$ bzw. $g \circ \alpha_1$ mit Wert x_0 an der Stelle $t = 0$, und deshalb haben diese beiden Lifte an der Stelle $t = 1$ denselben Wert. Das bedeutet, dass durch die Definition

$$\tilde{g} : Z \rightarrow X, \quad z \mapsto \beta(1)$$

eine von der jeweiligen Wahl von α unabhängige Abbildung \tilde{g} definiert wird. Es gilt $\tilde{g}(z_0) = x_0$ und $\pi \circ \tilde{g} = g$. Es verbleibt zu zeigen, dass \tilde{g} stetig ist. Dazu sei $z \in Z$ gegeben, $x = \tilde{g}(z) \in X$ und $y = g(z) = \pi(x) \in Y$. Weiter sei $V(y) \subset Y$ eine Umgebung von y , über der π trivial ist, und $U(x) \subset X$ die entsprechende Umgebung von x , so dass $\pi|_{U(x)} : U(x) \rightarrow V(y)$ ein Homöomorphismus ist. Weil X und Y lokal wegzusammenhängend sind, können wir $U(x)$ und $V(y)$ als wegzusammenhängend annehmen. Sei weiter $W(z)$ die Zusammenhangskomponente der offenen Menge $g^{-1}[V(y)] \subset Z$, die z enthält. Dann ist $\tilde{g}|_{W(z)} = (\pi|_{U(x)})^{-1} \circ g|_{W(z)}$, und damit ist \tilde{g} in z stetig.

Der Beweis des Zusatzes über Riemannsche Flächen läuft analog wie der Beweis der Stetigkeit von \tilde{g} . \square

2.7 Definition. Seien X, Y topologische Räume und $\pi : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung.

- (a) Eine *Decktransformation* oder *Deckbewegung* [covering transformation, deck transformation] ist ein Homöomorphismus $\gamma : X \rightarrow X$ mit $\pi \circ \gamma = \pi$; die letztere Bedingung bedeutet gerade, dass γ auf jeder Faser $\pi^{-1}\{y\}$ als Permutation operiert.

Die Gesamtheit aller Decktransformationen von π bildet eine Gruppe, die die *Decktransformationsgruppe* [covering transformation group, deck transformation group] von π genannt wird, und die wir mit $\text{Deck}(\pi)$ bezeichnen.

- (b) Die Überlagerung π heißt *regulär* [regular], wenn $\text{Deck}(\pi)$ auf den Fasern $\pi^{-1}\{y\}$ mit $y \in Y$ jeweils transitiv operiert.

Sind X, Y Riemannsche Flächen und ist $\pi : X \rightarrow Y$ eine holomorphe Überlagerung, so sind alle Decktransformationen von π automatisch biholomorph.

2.8 Beispiel. Ist \mathbb{C}/Γ ein komplexer Torus wie in Beispiel 1.22(c), so bilden die Translationen

$$z \mapsto z + \omega \quad \text{mit} \quad \omega = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \in \Gamma \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{Z})$$

die Decktransformationsgruppe der Überlagerung $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$.

2.9 Aufgabe. Let X and Y be topological spaces and $\pi : X \rightarrow Y$ be a covering map. Prove the following:

- (a) If π is a 2-fold covering, then π is regular.
 (b) If X is simply connected, then π is regular.

[Hint. Deck transformations of π are lifts of π with respect to π . You might need to read this sentence twice.]

Die Decktransformationsgruppe einer Überlagerung operiert stets frei im Sinne der Definition 1.14. Umgekehrt werden wir sehen, dass jede frei operierende Untergruppe der Homöomorphismengruppe eines topologischen Raums X als Decktransformationsgruppe einer geeigneten "Überlagerung" von X realisiert werden kann.

2.10 Satz. Seien X, Y lokal wegzusammenhängende topologische Hausdorffräume und $\pi : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung.

- (a) Die Decktransformationsgruppe von π operiert frei auf X .
 (b) Sei Γ eine frei operierende Untergruppe der Homöomorphismengruppe von X und $p : X \rightarrow X/\Gamma$, $x \mapsto [x] = \{\gamma x \mid \gamma \in \Gamma\}$ die kanonische Projektion. p ist eine reguläre Überlagerung, und es gilt $\text{Deck}(p) = \Gamma$.
 (c) Ist die Überlagerung π regulär, so gilt für $\Gamma = \text{Deck}(\pi)$:

Es existiert ein Homöomorphismus $F : Y \rightarrow X/\Gamma$, so dass $F \circ \pi = p$ gilt, d.h. dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xlongequal{\quad} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{\quad F \quad} & X/\Gamma \end{array}$$

Zusatz. Sind X, Y Riemannsche Flächen und ist π holomorph, so ist die Abbildung F biholomorph.

Beweis. Für (a). Aus der Eindeutigkeitsaussage in Lemma 2.4(a) folgt allgemein die Eindeutigkeit des Lifts bezüglich π , und deshalb erfüllt $\text{Deck}(\pi)$ Bedingung (F) aus Definition 1.14. Für Bedingung (H) seien $x_1, x_2 \in X$ gegeben. Wenn $\pi(x_1) \neq \pi(x_2)$ ist, so existieren disjunkte Umgebungen $V_1, V_2 \subset Y$ mit $\pi(x_k) \in V_k$. Dann ist $U(x_k) = \pi^{-1}[V_k]$ eine Umgebung von x_k , und für jedes $\gamma \in \text{Deck}(\pi)$ gilt $\gamma[U(x_1)] \cap U(x_2) = U(x_1) \cap U(x_2) = \emptyset$. Ist hingegen $\pi(x_1) = \pi(x_2) =: y$, so wählen wir eine Umgebung $V \subset Y$ von y , über der π trivial ist, und Umgebungen $U(x_k)$ von x_k , so dass $\pi|_{U(x_k)} : U(x_k) \rightarrow V$ ein Homöomorphismus auf V ist. Mit dieser Wahl ist Bedingung (H) erfüllt.

Für (b). Zum Beweis, dass p eine Überlagerung wird, sei $y \in X/\Gamma$ gegeben. Wir wählen ein $x_0 \in p^{-1}[\{y\}]$; dazu existiert wegen der Eigenschaften (H) und (F) eine Umgebung $U(x_0)$, so dass $\gamma[U(x_0)] \cap U(x_0) = \emptyset$ für alle $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}_X\}$ gilt. Dann ist $V(y) = p[U(x_0)]$ eine offene Umgebung von y . Ihr Urbild unter p besteht aus den offenen Mengen $U(\gamma x_0) = \gamma[U(x_0)]$ für $\gamma \in \Gamma$. Diese sind paarweise disjunkt, denn für $\gamma, \tilde{\gamma} \in \Gamma$ mit $\gamma \neq \tilde{\gamma}$ gilt

$$\gamma[U(x_0)] \cap \tilde{\gamma}[U(x_0)] = \tilde{\gamma}[(\tilde{\gamma}^{-1} \circ \gamma)[U(x_0)] \cap U(x_0)] = \tilde{\gamma}[\emptyset] = \emptyset.$$

Außerdem ist für jedes $x = \gamma(x_0)$ die Abbildung $p|_{U(x)} : U(x) \rightarrow V(y)$ bijektiv; da sie außerdem stetig und offen ist, ist sie ein Homöomorphismus. Damit ist p über $V(y)$ trivial.

Für (c). Weil π regulär ist, ist zu jedem $y \in Y$ die Faser $\pi^{-1}[\{y\}]$ eine Äquivalenzklasse von \sim und somit ein Element von X/Γ . Somit wird durch $F : Y \rightarrow X/\Gamma$, $y \mapsto \pi^{-1}[\{y\}]$ eine bijektive Abbildung definiert. Diese ist stetig und offen, und deshalb ein Homöomorphismus. \square

In Section 1.2 we could only say that the quotient construct did or did not produce new examples. With this theorem we can say more.

Weil $\hat{\mathbb{C}}$ einfach zusammenhängend ist, wäre jede Unterlagerung unter $\hat{\mathbb{C}}$ regulär. Aussage 1.20 zeigt deshalb in Verbindung mit Satz 2.10(c): Es gibt keine nicht-trivialen holomorphen Unterlagerungen unter $\hat{\mathbb{C}}$.

Nach Satz 2.10(b) gehören zu den in Aussage 1.21 klassifizierten frei operierenden Untergruppen Γ von $\text{Aut}(\mathbb{C})$ reguläre holomorphe Unterlagerungen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ von \mathbb{C} . Andererseits ist \mathbb{C} einfach zusammenhängend, und deshalb ist jede Unterlagerung unter \mathbb{C} regulär (vergleiche Aufgabe 2.9(b)). Wegen Satz 2.10(c) ist daher jede holomorphe Unterlagerung unter \mathbb{C} von der Art $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$. Deshalb entspricht Aussage 1.21 einer vollständigen Klassifikation der holomorphen Unterlagerungen von \mathbb{C} .

2.2 Die universelle Überlagerung

Zu jedem topologischen Raum bzw. Riemannschen Fläche Y existiert eine Überlagerung $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$, für die \tilde{Y} einfach zusammenhängend ist. \tilde{Y} und π sind im Wesentlichen eindeutig bestimmt, und jede andere Überlagerung über Y lässt sich in π wiederfinden, deshalb nennt man π die *universelle Überlagerung* von Y .

2.11 Definition. Eine Überlagerung $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$ eines wegzusammenhängenden topologischen Raums Y heißt *universell* [universal], wenn \tilde{Y} einfach zusammenhängend ist.

Die folgende Aussage zeigt, warum "universelle" Überlagerungen so genannt werden:

2.12 Aussage. Sei Y ein wegzusammenhängender topologischer Raum und $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$ "eine" universelle Überlagerung von Y . Ist $\sigma : X \rightarrow Y$ eine weitere Überlagerung von Y , so existiert eine Überlagerung $\tau : \tilde{Y} \rightarrow X$, so dass $\sigma \circ \tau = \pi$ ist.

Zusatz. Sind X, Y, \tilde{Y} Riemannsche Flächen, und sind π und σ holomorph, so kann auch τ holomorph gewählt werden.

Beweis. Die Gleichung $\sigma \circ \tau = \pi$ besagt, dass die gesuchte Abbildung τ ein Lift von π bezüglich der Überlagerung σ ist. Weil \tilde{Y} einfach zusammenhängend ist, folgt die Existenz von τ als stetige Abbildung aus Satz 2.6. Es verbleibt zu zeigen, dass τ eine Überlagerung ist. Sei $x \in X$ und $y = \sigma(x) \in Y$. Dann existiert eine Umgebung $V(y)$ von y in Y , über der sowohl π als auch σ trivial ist. Für $\tilde{y} \in \pi^{-1}[\{y\}]$ sei jeweils $U(\tilde{y})$ die Umgebung von \tilde{y} in \tilde{Y} , so dass $\pi|_{U(\tilde{y})} : U(\tilde{y}) \rightarrow V(y)$ ein Homöomorphismus ist. Dann ist für jedes $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ mit $\tau(\tilde{y}) = x$ die Umgebung $V = \tau(U(\tilde{y}))$ von \tilde{y} unabhängig, und $\tau|_{U(\tilde{y})} : U(\tilde{y}) \rightarrow V$ jeweils ein Homöomorphismus. Also ist τ über V trivial.

In der Situation des Zusatz ist τ als holomorpher Lift einer holomorphen Abbildung selber holomorph. \square

Aus dieser Aussage ergibt sich auch, dass die universelle Überlagerung eines Raums Y im Wesentlichen eindeutig ist:

2.13 Korollar. Sind $\pi : \tilde{Y} \rightarrow X$ und $\hat{\pi} : \hat{Y} \rightarrow X$ "zwei" universelle Überlagerungen desselben wegzusammenhängenden topologischen Raums X , so existiert ein Homöomorphismus $F : \tilde{Y} \rightarrow \hat{Y}$ mit $\hat{\pi} \circ F = \pi$.

Zusatz. Sind X, \tilde{Y}, \hat{Y} Riemannsche Flächen und sind $\pi, \hat{\pi}$ holomorph, so ist F biholomorph.

Beweis. Nach Aussage 2.12 sei $F : \tilde{Y} \rightarrow \hat{Y}$ eine Überlagerung. Wir wählen $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ und setzen $\hat{y} = F(\tilde{y})$. Sei $G : \hat{Y} \rightarrow \tilde{Y}$ das eindeutige Lift von $\text{id}_{\hat{Y}}$ bezüglich F mit $G(\hat{y}) = \tilde{y}$. Es hat $F \circ G = \text{id}_{\hat{Y}}$. Dann betrachten wir $H := G \circ F : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$. Es ist ein Lift von F bezüglich F , weil $F \circ H = F \circ G \circ F = \text{id} \circ F = F$, und hat $H(\tilde{y}) = \tilde{y}$. Aber $\text{id}_{\tilde{Y}}$ ist auch ein Lift von F bezüglich F mit $\text{id}_{\tilde{Y}}(y) = y$. Es folgt nach Satz 2.6, dass $G \circ F = \text{id}_{\tilde{Y}}$. Somit ist F ein Homöomorphismus. \square

2.14 Satz. Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, dessen Topologie eine Umgebungsbasis von einfach zusammenhängenden Mengen besitzt. Dann existiert ein einfach zusammenhängender topologischer Raum \tilde{X} mit einer universellen Überlagerung $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$.

Zusatz. Wenn X eine Riemannsche Fläche ist, ist die Bedingung über die Umgebungsbasis automatisch erfüllt. In diesem Fall ist auch \tilde{X} eine Riemannsche Fläche und die universelle Überlagerung $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ holomorph.

Beweis. Wir fixieren einen Punkt $x_0 \in X$ und betrachten die Menge \mathcal{C} der stetigen Kurven $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\alpha(0) = x_0$. Auf \mathcal{C} definieren wir eine Äquivalenzrelation \sim , indem wir für $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ sagen, dass $\alpha \sim \beta$ gilt, wenn $\alpha(1) = \beta(1)$ ist, und α und β mit festgehaltenen Endpunkten zueinander homotopieäquivalent sind. Die Äquivalenzklassen bezüglich \sim sind also die Homotopieklassen von Kurven in X mit Startpunkt x_0 . Die Menge dieser Äquivalenzklassen

bezeichnen wir mit $\tilde{X} = \mathcal{C} / \sim$. Außerdem definieren wir eine Abbildung $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$, $[\alpha] \mapsto \alpha(1)$.

Wir versehen \tilde{X} mit einer Topologie: Sei $\tilde{x} = [\alpha] \in \tilde{X}$ gegeben und $x = \pi(\tilde{x}) = \alpha(1) \in X$. Sei U eine offene, einfach zusammenhängende Umgebung von x in X . Wir ordnen U die Teilmenge \tilde{U} von \tilde{X} zu, deren Homotopieklassen durch Aneinanderfügung von $[\alpha]$ mit beliebigen stetigen Wegen in U entsteht. Indem wir \tilde{x} und U variieren, erhalten wir ein System von Teilmengen von \tilde{X} . Die Topologie auf \tilde{X} definieren wir dadurch, dass dieses System von Teilmengen Basis der Topologie sein soll. Hierdurch wird offenbar \tilde{X} zusammenhängend, und die Abbildung $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ stetig und offen. Weil die Urbildmenge $\pi^{-1}[\{x\}]$ jeweils isomorph zur Fundamentalgruppe von X ist, ist π tatsächlich eine Überlagerung.

Es verbleibt zu zeigen, dass \tilde{X} einfach zusammenhängend ist. Dazu sei $\tilde{x}_0 = [\alpha_0] \in \pi^{-1}[\{x_0\}]$. Eine geschlossene Schleife in \tilde{X} mit Start- und Endpunkt \tilde{x}_0 entspricht einer Decktransformation von π mit dem Fixpunkt \tilde{x}_0 . Diese Decktransformation ist also mit $\text{id}_{\tilde{X}}$ identisch, was bedeutet, dass die Schleife in \tilde{X} zusammenziehbar ist.

In der Situation des Zusatzes besitzt X eine Umgebungsbasis aus einfach zusammenhängenden Mengen, weil dies auf den Bildbereich der Kartenabbildungen \mathcal{C} zutrifft. Durch Zurückziehen von Karten von X mittels π auf Umgebungen, auf denen π trivial ist, erhalten wir einen Atlas für \tilde{X} , der \tilde{X} zu einer Riemannschen Fläche macht. Diesbezüglich ist π offensichtlich holomorph. \square

2.15 Korollar. Zu jeder Riemannschen Fläche X existiert eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche \tilde{X} und eine frei auf \tilde{X} operierende Untergruppe $\Gamma \subset \text{Aut}(\tilde{X})$, so dass X zu \tilde{X}/Γ biholomorph ist. Hier ist $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ die universelle Überlagerung von X und $\Gamma = \text{Deck}(\pi)$.

Beweis. Die universelle Überlagerung $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ existiert nach Satz 2.14, und sie ist nach Aufgabe 2.9(b) regulär. Nach Satz 2.10(c) ist X daher biholomorph äquivalent zu \tilde{X}/Γ mit $\Gamma = \text{Deck}(\pi)$. \square

2.16 Korollar. Let ω be a closed 1-form on X and let $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ be the universal cover. Then there exists a function $f : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$ such that $df = \pi^*\omega$.

Beweis. Recall that the universal cover is a set of curves in X up to homotopy equivalence. Since integrals of closed forms are invariant under homotopy, we define f through the formula $[\gamma] \mapsto \int_{\gamma} \omega$. When defined in this way, the difficult part is to understand how to compute the derivative of f . For this we use that π is a covering map, so for every path γ_0 there is a path-connected neighbourhood $U \subset \tilde{X}$ that is biholomorphic to a neighbourhood $V \subset X$ of $\pi(\gamma_0) = \gamma_0(1)$. We may further suppose that V is a coordinate neighbourhood with chart $\phi[V] = B(0, 1)$ and $\phi(\gamma_0(1)) = 0$. For any other $\gamma \in U$, there is a path α in V from $\gamma_0(1)$ to $\gamma(1)$. The concatenation of γ_0 with α is homotopic to γ , with the homotopy given by the lift of α to \tilde{X} with base point γ_0 . This shows that

$$f(\gamma) = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_0} \omega + \int_{\alpha} \omega = f(\gamma_0) + \int_{\alpha} \omega.$$

This reduces the problem to a single coordinate neighbourhood.

We may choose a particular form for the α , namely the interval between 0 and $z = \gamma(1)$, ie $\alpha(t) = \phi^{-1}(tz)$. Let us write $\omega = \omega_1 dx + \omega_2 dy$ and compute the x -partial derivative of f at γ_0 . In coordinates therefore we have

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\gamma) - f(\gamma_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\alpha} \omega = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \int_0^1 \omega_1(th) h + \omega_2(th) 0 \right) dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 \omega_1(th) dt, \end{aligned}$$

and the continuity of ω_1 implies this is equal to $\omega_1(0)$. A similar argument shows that $\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma_0) = \omega_2(0)$. Thus $df = \omega$ at 0 in this coordinate neighbourhood. Taking these local statements and phrasing them on \tilde{X} proves the corollary. \square

There are several useful observations that follow from this corollary. If the integral of ω on every closed curve in X is zero, then f is invariant under deck transformations. This means that it pushes down to give a well-defined function on X , in other words ω is exact. On a simply connected surface X , all closed curves are by definition homotopic to a constant curve and so the integral closed 1-forms are always zero. We have thus fulfilled our promise after Definition 1.34 to show that on a simply connected surface all closed 1-forms are exact. Note that the function f is unique up to the addition of a constant.

The second part of the proof is called the Poincare lemma, which in general says that all closed p -forms (of any degree, not just 1-forms) on the ball are exact. We can also understand it as a version of the fundamental theorem of calculus.

2.3 Verzweigte Überlagerungen und Hyperelliptische Riemannsche Flächen

Until now in this chapter, we have studied covering maps. Though not every holomorphic map between Riemann surfaces is a covering map, they none-the-less share many properties with covering maps, especially for maps between compact Riemann surfaces.

We first classify their behaviour at points where they fail to be trivial.

2.17 Aussage und Definition. Seien X, Y zwei Riemannsche Flächen, $f : X \rightarrow Y$ eine nicht-konstante, holomorphe Abbildung, $x \in X$ und $y = f(x) \in Y$. Dann existiert genau ein $n \in \mathbb{N}$, und Karten (U, z) von X mit $x \in U$ und $z(x) = 0$ bzw. (V, w) von Y mit $y \in V$ und $w(y) = 0$, so dass

$$w \circ f = z^n \quad \text{auf } U$$

ist.

Wir sagen in dieser Situation, dass f in x den Wert y mit der Vielfachheit n annimmt, oder in x die Vielfachheit n hat [f has multiplicity n at x]. Die Zahl $(n-1)$ bezeichnen wir mit $b_f(x)$, sie heißt die *Verzweigungszahl* [branch number] von f in x . Ein Punkt $x \in X$ mit $b_f(x) \geq 1$ heißt *Verzweigungspunkt* [ramification point] von f , und $f(x) \in Y$ heißt *Verzweigungswert* [branch point].

2.18 Bemerkung. Often a ramification point x is the only point in the preimage of the branch point $f(x)$. Thus it is common to identify the two points and use the terms ramification point and

branch point interchangeably. This is a bad habit, but one so common that a student must be aware of it.

2.19 Beispiel. Ist in der Situation von Aussage 2.17 $Y = \mathbb{C}$, so ist die Vielfachheit $n = b_f(x) + 1 = \text{ord}_x(f - y)$.

Beweis von Aussage 2.17. Wir wählen holomorphe Karten \tilde{z} von X um x mit $\tilde{z}(x) = 0$ und w von Y um y mit $w(y) = 0$, und betrachten die Taylorreihe von $w \circ f$

$$w \circ f = \sum_{k \geq n} c_k \tilde{z}^k \quad \text{mit } n > 0, c_k \in \mathbb{C}, c_n \neq 0.$$

In dieser Situation ist $g(\tilde{z}) = \sum_{k \geq 0} c_{n+k} \tilde{z}^k$ eine in der Nähe von x nullstellenfreie, holomorphe Funktion, die daher lokal bei x eine n -te Wurzel $h(\tilde{z})$ besitzt, es gilt also $h(\tilde{z})^n = g(\tilde{z})$. Das Definitionsgebiet von h kann dabei so gewählt werden, dass h nullstellenfrei ist. Damit gilt

$$w \circ f = \tilde{z}^n \cdot g(\tilde{z}) = (\tilde{z} h(\tilde{z}))^n = z^n \quad \text{mit } z = \tilde{z} \cdot h(\tilde{z}).$$

Dabei ist z in der Nähe von x eine weitere holomorphe Karte mit $z(x) = 0$, so dass die Bedingung der Aussage erfüllt ist. Es ist offensichtlich, dass die Zahl n nicht von der Wahl der Karten z und w abhängt. □

2.20 Aussage. Seien X, Y zwei kompakte Riemannsche Flächen und $f : X \rightarrow Y$ eine nicht-konstante, holomorphe Abbildung. Dann existiert eine Zahl $m \in \mathbb{N}$, so dass jedes $y \in Y$ von f mit Vielfachheiten gezählt genau m -mal angenommen wird, das soll heißen: Für jedes $y \in Y$ gilt

$$\sum_{x \in f^{-1}[\{y\}]} (b_f(x) + 1) = m.$$

Die Zahl m heißt der *Grad* [degree] von f . Wir sagen (per Definition), dass f eine *verzweigte, m -blättrige Überlagerung* [branched m -sheeted covering (map)] von X über Y ist.

In der Situation dieser Aussage ist die Menge von Verzweigungspunkte

$$S := \{x \in X \mid \exists x' \in f^{-1}[\{f(x)\}] : b_f(x') \neq 0\} = \{x \in X \mid \#f^{-1}[\{f(x)\}] < m\}$$

diskret und daher endlich. $f|_{X \setminus S} : X \setminus S \rightarrow Y \setminus f[S]$ ist dann eine m -blättrige, holomorphe Überlagerung im Sinne von Abschnitt 2.1, dadurch wird die Bezeichnung "verzweigte Überlagerung" für f gerechtfertigt. Aus der Endlichkeit von S folgt auch, dass die *totale Verzweigungsordnung* [total branching order]

$$b_f := \sum_{x \in X} b_f(x)$$

endlich ist.

Beweis von Aussage 2.20. Weil f holomorph und nicht konstant ist, ist f eine offene Abbildung, und daher ist $f[X]$ sowohl kompakt als auch offen in Y . Somit ist jedenfalls $f[X] = Y$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir nun die Menge

$$S_n = \left\{ y \in Y \mid \sum_{x \in f^{-1}[\{y\}]} (b_f(x) + 1) \geq n \right\}.$$

Wegen Aussage 2.17 ist S_n offen. Wir werden gleich sehen, dass S_n auch abgeschlossen ist. Daraus folgt, dass für $n \in \mathbb{N}$ jeweils entweder $S_n = \emptyset$ oder $S_n = Y$ gilt. Wegen $f[X] = Y$ ist offensichtlich

$$Y = S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \dots,$$

andererseits ist die Menge $f^{-1}[\{y\}]$ für jedes $y \in Y$ endlich und es ist $b_f(x)$ endlich für jedes $x \in X$; deshalb kann nicht $S_n = Y$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ sein. Also gibt es ein maximales $m \in \mathbb{N}$, so dass $S_m = Y$ ist. Für dieses gilt $S_{m+1} = \emptyset$, und deshalb erfüllt dieses m die Eigenschaft der Aussage.

Es verbleibt zu zeigen, dass S_n abgeschlossen ist. Dazu sei $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in S_n , die gegen ein $y \in Y$ konvergiert. Weil es nur endlich viele $y \in Y$ gibt, für die $b_f(x) \neq 0$ für mindestens ein $x \in f^{-1}[\{y\}]$ gilt, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $b_f(x) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x \in f^{-1}[\{y_k\}]$ ist. Also besteht $f^{-1}[\{y_k\}]$ jeweils aus mindestens n verschiedenen Punkten von X . Es seien also $x_{k,1}, \dots, x_{k,n} \in f^{-1}[\{y_k\}]$ paarweise verschieden. Weil X kompakt ist, besitzt für $j \in \{1, \dots, n\}$ die Folge $(x_{k,j})_{k \in \mathbb{N}}$ jeweils eine in X konvergente Teilfolge; indem wir zu einer geeigneten Teilfolge von (y_k) übergehen, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit erreichen, dass für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ die gesamte Folge $(x_{k,j})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen ein $x_j \in X$ konvergiert. Die Punkte x_j brauchen natürlich nicht verschieden zu sein, aber wegen der Steigkeits von f gilt $f(x_j) = y$, und weil $f(x_{k,j}) = y_k$ ist, folgt selbst falls die x_j nicht paarweise verschieden sind, $\sum_{x \in f^{-1}[\{y\}]} (b_f(x) + 1) \geq n$. Also ist $y \in S_n$. \square

The simplest case, but one that is very important, is a branched 2-sheeted cover of $\widehat{\mathbb{C}}$. For the following definition we recall that a holomorphic map to $\widehat{\mathbb{C}}$ is the same thing as a meromorphic function.

2.21 Definition. Eine kompakte Riemannsche Fläche X heißt *hyperelliptisch* [hyperelliptic], wenn es auf X eine nicht-konstante meromorphe Funktion f gibt, die genau zwei Polstellen (gezählt gemäß ihrer Vielfachheit) besitzt.* In dieser Situation hat jeder Verzweigungspunkt der Abbildung $f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ die Verzweigungszahl 1, also ist f eine 2-blättrige, verzweigte Überlagerung.

2.22 Beispiel. Before we give a complete description of hyperelliptic surfaces, let us begin with a basic example. Consider the projective curve $z_2^2 = z_1^2 + z_0^2$. You may recognise its affine part as the hyperbola $y^2 = x^2 + 1$, but we are considering it as a curve in complex variables, not just real variables. We may choose $f = z_1/z_0$. On the affine part this function can be written simply as x , and so is holomorphic. However there are two more points of the curve not in the affine part. In U_2 we have the curve $1 = z^2 + w^2$ for $z = z_1/z_2$ and $w = z_0/z_2$. The two points we did not see before are $(z, w) = (\pm 1, 0)$ (the points where $z_0 = 0$). In a neighbourhood of both points the coordinate z is a function of w (and vice versa). We can write the function in a local coordinate as

$$f = zw^{-1} = \frac{\pm \sqrt{1 - w^2}}{w}.$$

We clearly see that f has a simple pole at each of these two points. Thus it fits Definition 2.21.

We can also look for the branch points of this map. We know that these points will have fewer points in the preimage than usual. First, notice that f has two simple poles. In other words,

*Manche Autoren schränken den Begriff "hyperelliptisch" ein. In diesem Zusammenhang werden komplexe Tori als *elliptische* Flächen bezeichnet und $\widehat{\mathbb{C}}$. Sie sind stets hyperelliptisch im Sinne unserer Definition, siehe Aussage 5.39.

$f^{-1}[\infty]$ has two points. This is not a branch point. Any branch points must therefore be in the affine part, where the curve is $y^2 = x^2 + 1$ and $f = x$. For any given value of f , there will be two solutions for y , unless $y = 0$. Therefore there are two branch points $x = \pm\sqrt{-1}$, with corresponding ramification points $(\pm\sqrt{-1}, 0)$.

More generally, we want to consider $\Sigma^\circ = \{\nu^2 = a(\lambda)\}$ for a a polynomial of degree $2g + 2$ (this way of writing the degree will be explained in Example 5.41) and only simple roots. Because of the square root, for each value of λ there will be two values of ν , except for the roots of a , which are branch points. Unfortunately the associated projective curve is not a Riemann surface because it has singularities at points over $\lambda = \infty$. There is a construction that allows us to remove these singularities, called *blowing-up*, which we give below in the required form.

If we examine the curve for large values of λ , we see that $\nu^2 \approx a_{2g+2}\lambda^{2g+2} \Rightarrow \nu \approx \pm\sqrt{a_{2g+2}}\lambda^{g+1}$. The problem is now apparent; we want the Riemann surface to have two values when $\lambda = \infty$, but ν has a singularity. Instead we introduce $\tilde{\lambda} = \lambda^{-1}$ and $\tilde{\nu} = \lambda^{-g-1}\nu$. These obey

$$\tilde{\nu}^2 = \lambda^{-2g-2}\nu^2 = \lambda^{-2g-2}a(\lambda) =: \tilde{a}(\tilde{\lambda})$$

where $\tilde{a}(\tilde{\lambda})$ is a polynomial. In particular, when $\tilde{\lambda} = 0$ there are two solutions to this equation $\tilde{\nu} = \pm\sqrt{\tilde{a}_{2g+2}}$. Call these two points ∞^\pm . We claim that $\Sigma = \Sigma^\circ \cup \{\infty^\pm\}$ is a Riemann surface. Indeed, we already know that Σ° and $\Sigma^\infty := \{\tilde{\nu}^2 = \tilde{a}(\tilde{\lambda})\}$ are Riemann surfaces. The only things left to check is that it is Hausdorff, and the fact we have holomorphic transformations between $\Sigma^\circ \setminus \{\lambda = 0\}$ and $\Sigma^\infty \setminus \{\tilde{\lambda} = 0\}$ means that the change of coordinate functions are all holomorphic.

2.23 Aufgabe. Check this.

Because $\tilde{\lambda}$ is a coordinate at ∞^\pm , the relation $\lambda = \tilde{\lambda}^{-1}$ shows that λ has a simple pole at each of these points. And on Σ° it is holomorphic. Hence Σ is hyperelliptic as expected. We can also understand the behaviour of ν as a function on Σ . At a root α of a , because they are simple roots, $a'(\alpha) \neq 0$. Therefore, ν is a local coordinate in a neighbourhood of $(\alpha, 0)$ on the curve. Hence it has a simple root at each of these points. Its only poles occur at ∞^\pm . At these points, from $\nu = \tilde{\nu}\tilde{\lambda}^{-g-1}$ we see that ν has a pole of order $g + 1$.

One can also ask what happens if a has odd degree $2g + 1$. The construction is very similar. The only difference is that in Σ^∞ there is only one point over $\tilde{\lambda} = 0$ since

$$\tilde{\nu}^2 = \lambda^{-2g-2}a(\lambda) = 0 + a_{2g+1}\tilde{\lambda} + \dots$$

This point, called the point at infinity, is actually a ramification point of $\tilde{\lambda}$ (it is a root of \tilde{a}) and we say that the curve is branched at infinity. In both cases, whether a has degree $2g + 2$ or $2g + 1$ there are $2g + 2$ branch points.

Because it is a ramification point, $\tilde{\lambda}$ is not a local coordinate at the point at infinity, but $\tilde{\nu}$ is. Thus we see that

$$\lambda = \tilde{\lambda}^{-1} = \frac{a_{2g+1} + a_{2g}\tilde{\lambda} + \dots}{\tilde{\nu}^2}$$

has a pole of order 2 at this point. It follows that $\nu = \lambda^{g+1}\tilde{\nu}$ has a pole of order $2(g+1) - 1 = 2g + 1$ there, and as before, it has $2g + 1$ simple roots at the roots of a .

We can actually give a form for all meromorphic functions on a hyperelliptic surface. An important tool is the hyperelliptic involution $\sigma(\lambda, \nu) = (\lambda, -\nu)$. This is a holomorphic function from the curve to itself. The term involution refers to the fact that $\sigma \circ \sigma = \text{id}$. If h is a meromorphic function on the curve, then so is $h \circ \sigma$. Their average $\frac{1}{2}(h + h \circ \sigma)$ is unchanged when composed with σ ,

$$\frac{1}{2}(h + h \circ \sigma) \circ \sigma = \frac{1}{2}(h \circ \sigma + h \circ \sigma \circ \sigma) = \frac{1}{2}(h \circ \sigma + h \circ \text{id}) = \frac{1}{2}(h \circ \sigma + h),$$

and therefore takes the same value at (λ, ν) and $(\lambda, -\nu)$. Thus we can consider it as a function of λ only, in other words a meromorphic function on $\widehat{\mathbb{C}}$. Similarly, $\frac{1}{2}(h - h \circ \sigma)$ changes sign when composed with σ , and so $\frac{1}{2}(h - h \circ \sigma)\nu^{-1}$ can also be considered a function of λ . Now with some algebra

$$h(\lambda, \nu) = \frac{1}{2}(h + h \circ \sigma) + \frac{1}{2}(h - h \circ \sigma)\nu^{-1}\nu = h_1(\lambda) + h_2(\lambda)\nu.$$

Since we know that all meromorphic functions on $\widehat{\mathbb{C}}$ are just rational functions, Example 1.11, this is a massive simplification.

This construction gives us many examples of Riemann surfaces that are not so difficult to understand. In fact we have just constructed all hyperelliptic Riemann surfaces!

2.24 Aussage. Sei X eine hyperelliptische Riemannsche Fläche und f eine nicht-konstante, meromorphe Funktion auf X mit genau zwei Polstellen. Es seien $x_1, \dots, x_{2g+2} \in X$ die Verzweigungspunkte von f , und y_1, y_2 die Polstellen von f . Wir setzen voraus, dass $x_j \neq y_k$ für alle $j = 1, \dots, 2g+2$ und $k = 1, 2$ gilt. Dann existiert eine weitere meromorphe Funktion w auf X mit

$$w^2 = \prod_{j=1}^{2g+2} (f - f(x_j)). \quad (*)$$

w hat Nullstellen in die x_i und Polen in y_i mit Ordnung $g+1$.

Beweis von Aussage 2.24. Zumindest gibt es um jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung, auf der es eine meromorphe Funktion w gibt, die die Bedingung (*) erfüllt. Ist nämlich x weder Verzweigungspunkt noch Polstelle von f , so ist die rechte Seite von (*) auf einer einfach zusammenhängenden Umgebung U von x nullstellenfrei, daher existiert dort eine nullstellenfreie meromorphe Funktion $w = \sqrt{\prod_{j=1}^{2g+2} (f - f(x_j))}$, die (*) erfüllt. Ist hingegen x ein Verzweigungspunkt von f , so hat die rechte Seite von (*) dort eine Nullstelle genau zweiter Ordnung. Deshalb existiert auf einer einfach zusammenhängenden Umgebung U wieder eine meromorphe Funktion w , die (*) erfüllt; sie hat in x eine Nullstelle erster Ordnung. Ist schließlich x eine Polstelle von f , so hat die rechte Seite von (*) in x einen Pol der Ordnung $2g+2$. Daher existiert ebenfalls um x eine meromorphe Funktion w , die (*) erfüllt, und zwar hat w in x einen Pol der Ordnung $g+1$. In allen diesen Fällen ist eine solche lokale Funktion w bis auf ihr Vorzeichen eindeutig bestimmt.

Demnach verbleibt nur zu zeigen, dass es eine *globale* meromorphe Funktion w auf X gibt, die die Gleichung (*) erfüllt. Dafür konstruieren wir ein konkretes Modell für X . Wir setzen $e_j = f(x_j) \in \mathbb{C}$. Dann sind die e_j paarweise verschieden, es gilt $f^{-1}[\{e_j\}] = \{x_j\}$, wohingegen für $e \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{e_1, \dots, e_{2g+2}\}$ die Menge $f^{-1}[\{e\}]$ aus genau zwei Elementen von X besteht. Wir betrachten nun zwei Kopien der Riemannschen Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$, die wir als Kopie I und

Kopie II bezeichnen. Für jedes $k \in \{1, \dots, g+1\}$, wählen wir eine glatte Kurve in $\widehat{\mathbb{C}}$, die von e_{2k-1} nach e_{2k} verläuft, und wir als "Schlitz" in beiden Kopien von $\widehat{\mathbb{C}}$ betrachten. Wir dürfen annehmen, dass die x_j so nummeriert, und die "Schlitze" so gewählt sind, dass sich keine zwei von ihnen schneiden. Von den beiden "Ufern" eines jeden Schlitzes bezeichnen wir willkürlich das eine als "N-Ufer", das andere als "S-Ufer". Wir konstruieren einen topologischen Raum \tilde{X} , indem wir entlang jedem der $(g+1)$ Schlitzes das N-Ufer von Kopie I von $\widehat{\mathbb{C}}$ mit dem S-Ufer von Kopie II, sowie das S-Ufer von Kopie II mit dem N-Ufer von Kopie I verkleben. Auf diese Weise wird \tilde{X} eine kompakte Riemannsche Fläche. Die Funktion $f: \tilde{X} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, die jedem $\tilde{x} \in \tilde{X}$ das entsprechende Element von $\widehat{\mathbb{C}}$ zuordnet, ist offensichtlich eine nicht-konstante, meromorphe Funktion auf X mit genau zwei Polstellen, und Verzweigungspunkten genau in den e_j . Deshalb ist (\tilde{X}, \tilde{f}) biholomorph äquivalent zu (X, f) . In diesem Sinne ist (\tilde{X}, \tilde{f}) ein konkretes Modell für (X, f) .

Wir haben nun zu zeigen, dass eine lokal definierte Funktion w entlang jeder Kurve in X analytisch fortgesetzt werden kann. Um zu verstehen, dass dies der Fall ist, betrachten wir zunächst auf $\widehat{\mathbb{C}}$ die analytische Fortsetzung eines Zweiges der Funktion $\sqrt{f - e_j}$. Sie wechselt entlang eines geschlossenen Weges in $\widehat{\mathbb{C}}$ genau dann das Vorzeichen, wenn der Weg um e_j ungerade Windungszahl hat. Deshalb wechselt die analytische Fortsetzung von w entlang eines geschlossenen Weges in $\widehat{\mathbb{C}}$ genau dann das Vorzeichen, wenn die Summe der Windungszahlen um alle e_j ungerade ist. Ist dies der Fall, so muss der Weg ungeradzahlig häufig einen "Schlitz" der Konstruktion von \tilde{X} schneiden. Das bedeutet aber, dass der Lift des gegebenen Weges nach \tilde{X} nicht mehr geschlossen ist, sondern von Kopie I von $\widehat{\mathbb{C}}$ nach Kopie II oder umgekehrt verläuft. Er verbindet also zwei verschiedene Punkte von \tilde{X} mit demselben Bild unter \tilde{f} . Daraus ergibt sich, dass w auf \tilde{X} global definiert werden kann. \square

2.25 Beispiel. Finally, we consider the holomorphic forms on hyperelliptic surfaces. We know from Section 1.5 that $d\lambda$ and $d\nu$ are meromorphic forms. Considered as derivatives of the respective functions, we see that $d\lambda$ has double poles at ∞^\pm (or a triple pole if the curve is branched at infinity) and $d\nu$ has poles of order $g+2$ (or $2g+2$). The relation between the two reads

$$2\nu d\nu = a'(\lambda)d\lambda.$$

In particular we see that $d\lambda$ has simple roots at the ramification points, the roots of a , and no other roots. The quotient $d\lambda/\nu$ is now especially interesting: both the numerator and denominator have simple roots at the roots of a , which cancel out. More over, at ∞^\pm we have a root of order $-2+g+1 = g-1$. For $g \geq 1$, this is a holomorphic differential. In fact for $j = 0, \dots, g-1$

$$\omega_j := \lambda^j \frac{d\lambda}{\nu}$$

is holomorphic. We will see later, in Remark 5.41, that every holomorphic differential is a \mathbb{C} -linear combination of these g holomorphic forms.

Chapter 3

Uniformisierung

In diesem Kapitel wollen wir den *Uniformisierungssatz* beweisen, der die Riemannschen Flächen bis auf Biholomorphie klassifiziert. Eine wesentliche Etappe hierzu ist der *große Riemannsche Abbildungssatz*, der besagt, dass jede *einfach zusammenhängende* Riemannsche Fläche entweder zu \mathbb{C} , oder zu $\widehat{\mathbb{C}}$, oder zu $\mathbb{D} := B(0,1) \subset \mathbb{C}$ biholomorph äquivalent ist.

Um den großen Riemannschen Abbildungssatz zu zeigen, werden wir auf jeder beliebigen einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche X eine injektive, meromorphe Funktion konstruieren. Dies werden wir mittels monotonen Grenzwerten von (sub)harmonischen Funktionen tun. Daher befassen wir uns als erstes mit harmonischen Funktionen auf Riemannschen Flächen. Dies sind lokal die Realteile von holomorphen Funktionen.

3.1 Harmonische Funktionen

3.1 Aussage und Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche und $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte, reellwertige Funktion auf X . Für u sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $d'd''u = -d''d'u = 0$.
- (ii) $d'u$ ist eine holomorphe 1-Form vom Typ $(1,0)$ auf X .
- (iii) Für jede Karte (U, z) von X gilt mit $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$ die *Laplacesche Differentialgleichung*

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

- (iv) Es gibt eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ von X , so dass $u|_{U_\alpha}$ jeweils Realteil einer holomorphen Funktion $f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ ist. f_α ist jeweils bis auf Addition einer rein-imaginären Konstanten eindeutig bestimmt.

Gilt eine – und damit jede – dieser äquivalenten Aussagen, so heißt u *harmonisch* [harmonic]. Den reellen Vektorraum der harmonischen Funktionen auf X bezeichnen wir mit $\mathcal{H}(X)$. Die holomorphe 1-Form $d'u$ betrachten wir als die Ableitung von $u \in \mathcal{H}(X)$; in der Situation von (iv) gilt jeweils $d'u|_{U_\alpha} = df_\alpha$. In lokalen Koordinaten gilt $d'u = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y})dz$.

3.2 Aufgabe. (a) $u := \log |z| \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ with $d'u = \frac{1}{z} dz$.

(b) For a Riemann surface X and a holomorphic function $f \in \mathcal{O}(X)$ without zeros, we have $u := \log |f| \in \mathcal{H}(X)$ and $d'u = f^{-1} df$. For this reason $f^{-1} df$ is called the *logarithmic derivative* of f .

Beweis von Aussage 3.1. In (i) beachten wir zunächst, dass in jedem Fall $0 = ddu = (d' + d'')(d' + d'')u = d'd''u + d''d'u$ und damit $d'd''u = -d''d'u$ gilt. $\omega := d'u$ ist in jedem Fall eine 1-Form vom Typ $(1,0)$. Diese ist genau dann holomorph, wenn $0 = d''\omega = d''d'u$ gilt. Damit ist die Äquivalenz (i) \Leftrightarrow (ii) gezeigt. Bezüglich einer lokalen Karte wie in (iii) gilt $\omega = \frac{\partial u}{\partial z} dz$ und daher

$$d''\omega = -\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}(dz \wedge d\bar{z}) = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) (dz \wedge d\bar{z}).$$

Das gibt die Äquivalenz (i) \Leftrightarrow (iii). Für die Äquivalenz (iii) \Leftrightarrow (iv) verwenden wir, dass wir X durch Kartenumgebungen überdecken können, deren Bild unter der Kartenabbildung jeweils ein konvexes Gebiet in \mathbb{C} ist. Aus diesem Grund können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass u auf einem konvexen Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ definiert ist. Ist u harmonisch, so gilt für die Funktion $g := u_x - iu_y$

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u_x - iu_y) = \frac{1}{2} (u_{xx} - iu_{xy} + iu_{yx} + u_{yy}) = 0.$$

Also ist g holomorph, und besitzt daher eine holomorphe Stammfunktion f auf dem konvexen Gebiet G . Die Integrationskonstante können wir dabei so wählen, dass $\operatorname{Re} f(z_0) = u(z_0)$ an einer Stelle $z_0 \in G$ gilt. Nun ist $df = g(z) dz$ und

$$d(\operatorname{Re} f) = \operatorname{Re} df = \frac{1}{2} g dz + \frac{1}{2} \bar{g} d\bar{z} = \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = du.$$

Deshalb ist $\operatorname{Re} f = u$. Ist umgekehrt u der Realteil einer holomorphen Funktion $f = u + iv$, so gilt wegen der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y = (v_y)_x - (v_x)_y = 0,$$

und somit ist u dann harmonisch. □

3.3 Aufgabe. Let X, Y be Riemann surfaces, $f : X \rightarrow Y$ a holomorphic map, and $u \in \mathcal{H}(Y)$. Then $u \circ f \in \mathcal{H}(X)$.

Dadurch, dass harmonische Funktionen lokal Realteile von holomorphen Funktionen sind, übertragen sich gewisse Eigenschaften holomorpher Funktionen auf diese.

3.4 Aufgabe. Formulate and prove a version of the identity theorem for harmonic functions on Riemann surfaces.

Die folgende Mittelwerteigenschaft, die wir zunächst nur für harmonische Funktionen auf Kreisscheiben in \mathbb{C} formulieren, ergibt sich aus der Cauchyschen Integralformel:

3.5 Aussage. (Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen) Sei $0 < r' < r$ und $u \in \mathcal{H}(B(z_0, r))$. Dann ist $u(z_0)$ gleich dem Mittelwert der Werte von u auf dem Kreis $\{|z - z_0| = r'\} = \partial B(z_0, r')$, explizit:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r' \cdot e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $z_0 = 0$ annehmen. Weil $B(0, r)$ ein konvexes Gebiet ist, existiert eine holomorphe Funktion $f : B(0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(f) = u$, siehe den Beweis von Aussage 3.1. Nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(r' \cdot e^{i\varphi})}{r' \cdot e^{i\varphi}} \cdot ir' e^{i\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r' \cdot e^{i\varphi}) d\varphi$$

und somit

$$u(0) = \operatorname{Re}(f(0)) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r' \cdot e^{i\varphi}) d\varphi \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(f(r' \cdot e^{i\varphi})) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r' \cdot e^{i\varphi}) d\varphi.$$

□

3.6 Aussage. (Maximumprinzip für harmonische Funktionen) Sei X eine Riemannsche Fläche und u eine harmonische Funktion auf X .

- (a) Wenn u in einem $x_0 \in X$ ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum annimmt, so ist u konstant.
- (b) Ist $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge, so nimmt $u|_K$ sein Maximum und sein Minimum auf dem Rand von K an.

Beweis. Zu (a): u habe in $x_0 \in X$ ein lokales Maximum. Es sei (U, z) eine Karte von X mit $x_0 \in U$ und $z(x_0) = 0$. Dann wählen wir $r > 0$ mit $B(0, r) \subset z[U]$ und so, dass $u|_{z^{-1}[B(0, r)]} \leq u(x_0)$ ist. Nach Aufgabe 3.3 ist $\tilde{u} = u(x_0) - (u \circ z^{-1})|_{B(0, r)}$ eine harmonische Funktion auf $B(0, r)$. Für $0 < r' < r$ gilt dann nach der Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen, Aussage 3.5

$$0 = \tilde{u}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(r' \cdot e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Weil der Integrand \tilde{u} nicht-negativ ist, folgt hieraus, dass \tilde{u} auf $K_{r'}(0)$ verschwindet. Das zeigt, dass u auf $z^{-1}[B(0, r)]$ konstant gleich $u(x_0)$ ist. Mit dem Identitätssatz für harmonische Funktionen, Aufgabe 3.4, folgt, dass u überhaupt konstant ist. (b) folgt sofort aus (a). □

3.2 Das Dirichlet-Problem für Kreisscheiben

3.7 Definition. Sei G ein beschränktes Gebiet in \mathbb{C} oder eine "berandete Riemannsche Fläche", und $g : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Die Suche nach einer stetigen reellwertigen Funktion $u : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $u|_G$ ist harmonisch,
- (ii) $u|_{\partial G} = g$

heißt *Dirichlet-Problem*.

In diesem Abschnitt werden wir das Dirichlet-Problem zunächst für offene Kreisscheiben $B(z_0, r)$ in \mathbb{C} diskutieren. Es wird sich zeigen, dass es in diesem Fall für jede beliebige stetige Randfunktion g eindeutig lösbar ist. Weil eine offene Kreisscheibe $B(z_0, r)$ durch die Möbius-Transformation $z \mapsto \frac{z-z_0}{r}$ auf die offene Kreisscheibe $\mathbb{D} := B(0, 1)$ abgebildet wird, genügt es, \mathbb{D} zu betrachten. Später werden wir das Dirichlet-Problem für allgemeine Riemannsche Flächen untersuchen.

Der Schlüssel für die Lösung des Dirichlet-Problems auf Kreisscheiben ist die Poissonsche Darstellungsformel. Sie ist eine Verallgemeinerung der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen (Aussage 3.5), die zeigt, dass sich alle Funktionswerte einer harmonischen Funktion auf dem Inneren einer Kreisscheibe aus den Werten auf dem Rand ausrechnen lassen. Die Poissonsche Darstellungsformel kann andererseits auch als eine Entsprechung der Cauchyschen Integralformel für harmonische Funktionen aufgefasst werden. Dabei wird die Rolle des "Integralkerns" $\frac{1}{\zeta-z}$ durch den "Poissonkern", $\frac{|\zeta|^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2} = \operatorname{Re} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}$ übernommen.

3.8 Satz. (Poissonsche Darstellungsformel.) Sei $u : \overline{B(z_0, r)} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $u|_{B(z_0, r)}$ harmonisch. Dann gilt für jedes $z \in B(z_0, r)$:

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\psi}) \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z_0 + re^{i\psi} - z|^2} d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\psi}) \operatorname{Re} \left(\frac{z_0 + re^{i\psi} + z}{z_0 + re^{i\psi} - z} \right) d\psi. \end{aligned}$$

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $B(z_0, r) = \mathbb{D}$ annehmen. Für gegebenes $z \in \mathbb{D}$ betrachten wir die Möbius-Transformation

$$\Phi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad \zeta \mapsto \frac{\zeta + z}{1 + \bar{z}\zeta}.$$

Sie bildet $\zeta = 0$ auf $z \in \mathbb{D}$ ab, und außerdem den Einheitskreis auf sich selber, denn für $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$ gilt

$$|\zeta + z| = |\zeta \cdot (1 + \zeta^{-1}z)| = |1 + \bar{\zeta}z| = |1 + \zeta\bar{z}|.$$

Daher bildet Φ auch \mathbb{D} auf sich ab. Wegen Aufgabe 3.3 ist daher $u \circ \Phi$ eine weitere auf \mathbb{D} harmonische und auf $\overline{\mathbb{D}}$ stetige Funktion. Nach der Mittelwerteigenschaft (Aussage 3.5) für die harmonische Funktion $u \circ \Phi$ ist $(u \circ \Phi)(0)$ gleich dem Mittelwert von $u \circ \Phi$ auf Kreisen um Null mit beliebigem Radius $r < 1$. Weil $u \circ \Phi$ auf dem Kreis mit Radius Eins noch stetig ist, ist diese Aussage auch für $r = 1$ richtig, das heißt, es gilt

$$u(z) = (u \circ \Phi)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u \circ \Phi)(e^{i\varphi}) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\Phi(e^{i\varphi})) d\varphi.$$

Wir substituieren nun

$$e^{i\psi} = \Phi(e^{i\varphi}) = \frac{e^{i\varphi} + z}{1 + \bar{z}e^{i\varphi}}.$$

Weil Φ eine Möbiustransformation ist, die den Einheitskreis auf sich abbildet, durchläuft mit φ auch ψ das reelle Intervall $[0, 2\pi]$. Wir erhalten

$$e^{i\varphi} = \frac{e^{i\psi} - z}{1 - \bar{z}e^{i\psi}}$$

und

$$ie^{i\varphi}d\varphi = \frac{ie^{i\psi}(1 - \bar{z}e^{i\psi}) + \bar{z}ie^{i\psi}(e^{i\psi} - z)}{(1 - \bar{z}e^{i\psi})^2}d\psi = i \frac{(1 - z\bar{z})e^{i\psi}}{(1 - \bar{z}e^{i\psi})^2},$$

also

$$d\varphi = \frac{(1 - z\bar{z})e^{i\psi}}{(1 - \bar{z}e^{i\psi})^2} \cdot \frac{1 - \bar{z}e^{i\psi}}{(e^{i\psi} - z)}d\psi = \frac{1 - z\bar{z}}{(e^{-i\psi} - \bar{z})(e^{i\psi} - z)}d\psi = \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\psi} - z|^2}d\psi.$$

Insgesamt folgt dann

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\psi}) \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\psi} - z|^2} d\psi.$$

□

Die Poissonsche Darstellungsformel zeigt, dass ein Dirichlet-Problem auf einer Kreisscheibe $B(z_0, r)$ zu einer gegebenen stetigen Randfunktion $g : \partial B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ höchstens eine Lösung u besitzen kann, denn die einzige mögliche Lösung ist durch die Formel im folgenden Satz gegeben. Tatsächlich wird aber – wie der folgende Satz zeigt – durch diese Formel tatsächlich eine Lösung gegeben. Damit ist das Dirichlet-Problem auf $B(z_0, r)$ zu jeder Randfunktion eindeutig lösbar.

3.9 Satz. (Lösung des Dirichlet-Problems auf $B(z_0, r)$.) Sei $g : \partial B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist das Dirichlet-Problem auf $B(z_0, r)$ zur Randfunktion g eindeutig lösbar, und zwar ist die Lösung u für $z \in B(z_0, r)$ durch

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\psi}) \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z_0 + re^{i\psi} - z|^2} d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\psi}) \operatorname{Re} \left(\frac{z_0 + re^{i\psi} + z}{z_0 + re^{i\psi} - z} \right) d\psi$$

gegeben.

Beweis. Für jedes $\psi \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $z \mapsto \frac{z_0 + re^{i\psi} + z}{z_0 + re^{i\psi} - z}$ auf $z \in B(z_0, r)$ eine konvergente Potenzreihe, die für alle $\epsilon > 0$ auf $z \in B(z_0, r - \epsilon)$ sogar gleichmäßig konvergiert. Weil g beschränkt ist, ist also auch die Funktion

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\psi}) \frac{z_0 + re^{i\psi} + z}{z_0 + re^{i\psi} - z} d\psi$$

auf $B(z_0, r)$ eine konvergente Potenzreihe und damit holomorph. Also ist u auf $B(z_0, r)$ der Realteil einer holomorphen Funktion und somit harmonisch.

Wir müssen noch zeigen, dass sich die so definierte Funktion u stetig auf $\overline{B(z_0, r)}$ fortsetzen lässt und dort gleich g ist. Dazu bemerken wir, dass die Funktion $\psi \mapsto \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z_0 + re^{i\psi} - z|^2}$ für jedes $z \in B(z_0, r)$ auf $\psi \in [0, 2\pi]$ positiv ist. Durch Anwendung des Poissonschen Darstellungssatzes auf die harmonische Funktion $u = 1$ ergibt sich, dass diese Funktion den Mittelwert 1 besitzt. Außerdem folgt für alle $\psi \in [0, 2\pi]$ und alle $0 < \delta \leq \sqrt[3]{2r}$ aus $|z_0 + re^{i\psi} - z| \geq \delta$ und $r - \delta^3 < |z - z_0| < r$

$$\frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z_0 + re^{i\psi} - z|^2} < \frac{r^2 - (r - \delta^3)^2}{\delta^2} = \frac{\delta^3(2r - \delta^3)}{\delta^2} < 2r\delta.$$

Wegen der Stetigkeit von g gibt es für jedes $\varphi \in [0, 2\pi]$ und jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass für alle $\psi \in [0, 2\pi]$ mit $|z_0 + re^{i\varphi} - z_0 - re^{i\psi}| = |re^{i\varphi} - re^{i\psi}| < 2\delta$ gilt $|g(z_0 + re^{i\varphi}) - g(z_0 + re^{i\psi})| < \frac{\epsilon}{2}$. Weil

$\partial B(z_0, r)$ kompakt ist, ist $|g|$ beschränkt durch ein $M > 0$. Offenbar können wir δ sogar immer kleiner oder gleich $\min\{1, \sqrt[3]{2r}, \frac{\epsilon}{8rM}\}$ wählen. Dann folgt für alle $z \in B(z_0, r) \cap B(z_0 + re^{i\varphi}, \delta^3)$

$$\begin{aligned} |u(z) - g(z_0 + re^{i\varphi})| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| g(z_0 + re^{i\psi}) - g(z_0 + re^{i\varphi}) \right| \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|re^{i\psi} - z|^2} d\psi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z_0 + re^{i\psi} - z| < \delta} \left| g(z_0 + re^{i\psi}) - g(z_0 + re^{i\varphi}) \right| \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|re^{i\psi} - z|^2} d\psi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{|z_0 + re^{i\psi} - z| \geq \delta} \left| g(z_0 + re^{i\psi}) - g(z_0 + re^{i\varphi}) \right| \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|re^{i\psi} - z|^2} d\psi. \end{aligned}$$

Wegen $\delta \leq 1$ folgt aus $|z_0 + re^{i\varphi} - z| < \delta^3$ und $|z_0 + re^{i\psi} - z| < \delta$ auch $|re^{i\varphi} - re^{i\psi}| < \delta + \delta^3 \leq 2\delta$. Wegen der Stetigkeit von g ist dann das erste Integral kleiner als $\frac{\epsilon}{2}$. Das zweite Integral ist wegen der obigen Abschätzung von $\frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z_0 + re^{i\varphi} - z|^2}$ kleiner als $2r\delta \cdot 2M$. Wegen $\delta \leq \frac{\epsilon}{8rM}$ ist dann auch das zweite Integral kleiner als $\frac{\epsilon}{2}$. Also folgt

$$|u(z) - g(z_0 + re^{i\varphi})| < \epsilon \quad \text{für alle } z \in B(z_0, r) \cap B(z_0 + re^{i\varphi}, \delta^3).$$

Dann läßt sich u stetig auf $\overline{B(z_0, r)}$ fortsetzen und auf $\partial B(z_0, r)$ gilt $u = g$. \square

3.10 Korollar. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die die Mittelwert-eigenschaft hat, das heißt, dass für jedes $z_0 \in G$ und jedes $r > 0$ mit $\overline{B(z_0, r)} \subset G$ gilt: $u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi$. Dann ist u harmonisch.

Beweis. Sei $z_0 \in G$ gegeben und $r > 0$ so klein, dass $\overline{B(z_0, r)} \subset G$ gilt. $g := u|_{\partial B(z_0, r)}$ ist stetig, deshalb existiert nach Satz 3.9 eine Lösung \tilde{u} des Dirichlet-Problems zu g , d.h. eine stetige Funktion $\tilde{u} : \overline{B(z_0, r)} \rightarrow \mathbb{R}$, die auf $B(z_0, r)$ harmonisch ist und $\tilde{u}|_{\partial B(z_0, r)} = g = u|_{\partial B(z_0, r)}$ erfüllt. Als harmonische Funktion hat auch \tilde{u} die Mittelwert-eigenschaft nach Aussage 3.5. Wegen der Linearität erfüllt daher auch $u|_{\overline{B(z_0, r)}} - \tilde{u}$ die Mittelwert-eigenschaft. Beim Beweis des Maximumprinzips Aussage 3.6 wurde für die betreffende Funktion nur die Mittelwert-eigenschaft verwendet, deshalb nimmt $u|_{\overline{B(z_0, r)}} - \tilde{u}$ sowohl sein Maximum als auch sein Minimum auf $\partial B(z_0, r)$ an. Dort verschwindet $u - \tilde{u}$ aber. Hieraus folgt $u|_{B(z_0, r)} = \tilde{u}|_{B(z_0, r)}$, und somit ist u auf $B(z_0, r)$ harmonisch. \square

Die folgende *Harnacksche Ungleichung* wird uns das erste Konvergenzprinzip für harmonische Funktionen, den *Satz von Harnack* liefern.

3.11 Aussage. (Harnacksche Ungleichung.) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion mit $u \geq 0$. Ist $z_0 \in G$ und $R > 0$ mit $\overline{B(z_0, R)} \subset G$, so gilt für alle $0 < r < R$ und alle $z \in G$ mit $|z - z_0| = r$

$$u(z_0) \cdot \frac{R - r}{R + r} \leq u(z) \leq u(z_0) \cdot \frac{R + r}{R - r}.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $z_0 = 0$ annehmen. Für $\varphi \in [0, 2\pi]$ gilt dann

$$R - r = |Re^{i\varphi}| - |z| \leq |Re^{i\varphi} - z| \leq |Re^{i\varphi}| + |z| = R + r.$$

Daraus folgt (durch Anwendung von x^{-2} und Multiplikation mit $R^2 - r^2$)

$$\frac{R - r}{R + r} \leq \frac{R^2 - r^2}{|Re^{i\varphi} - z|^2} \leq \frac{R + r}{R - r}.$$

Indem wir diese Abschätzung für den Poissonkern in die Poissonsche Darstellungsformel Satz 3.8 einsetzen, erhalten wir die Behauptung. \square

3.12 Satz. (Satz von Harnack.) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von harmonischen Funktionen $u_n : G \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) Konvergiert (u_n) kompakt gleichmäßig gegen eine Funktion $u : G \rightarrow \mathbb{R}$, so ist u harmonisch.
- (b) Ist die Folge (u_n) monoton wachsend (d.h. es gilt $u_1 \leq u_2 \leq \dots$), so konvergiert (u_n) kompakt gleichmäßig entweder gegen ∞ oder gegen eine harmonische Funktion $u : G \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis. Zu (a). Jedenfalls ist die Grenzfunktion u unter den genannten Voraussetzungen stetig. Die Funktionen u_n besitzen nach Aussage 3.5 die Mittelwerteigenschaft. Wegen des Lebesgue-Satzes von der beschränkten Konvergenz folgt hieraus, dass auch die Grenzfunktion u die Mittelwerteigenschaft besitzt. Also ist nach Korollar 3.10 u harmonisch.

Zu (b). Indem wir von (u_n) zu $(u_n - u_1)$ übergehen, können wir annehmen, dass alle $u_n \geq 0$ sind. Wenn die monoton wachsende Folge $(u_n(z_0))$ für ein $z_0 \in G$ in \mathbb{R} konvergiert, und ist $R > 0$ so gewählt, dass $\overline{B(z_0, 2R)} \subset G$ ist, so zeigt die Harnacksche Ungleichung Aussage 3.11, dass für alle $z \in B(z_0, R)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$u_n(z) \leq u_n(z_0) \cdot \frac{2R + |z - z_0|}{2R - |z - z_0|} \leq 3 \cdot u_n(z_0).$$

Aus diesem Grund konvergiert u_n dann auf $\overline{B(z_0, R)}$ gleichmäßig gegen eine reellwertige Funktion u . Jede kompakte Teilmenge von G kann durch endlich viele derartige Bälle überdeckt werden, deshalb ist die Konvergenz kompakt gleichmäßig. Wegen (a) ist die Grenzfunktion u harmonisch. \square

3.3 Subharmonische Funktionen

Um die einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen zu klassifizieren, wollen wir auf solchen Flächen injektive, holomorphe bzw. meromorphe Funktionen konstruieren. Es stellt sich aber als leichter heraus, zunächst harmonische Funktionen zu konstruieren, und aus diesen dann holomorphe Funktionen zu gewinnen. Harmonische Funktionen haben gegenüber holomorphen Funktionen den Vorteil, dass wir auf sie als reelle Funktionen das Prinzip der monotonen Konvergenz anwenden können, wie wir es schon im letzten Abschnitt mit dem Satz von Harnack (Satz 3.12) gemacht haben. Diesen Vorteil werden wir in diesem Abschnitt weiter ausbauen. Dazu erweitern wir unsere Betrachtungen zunächst auf die sogenannten subharmonischen Funktionen. Sie haben den "Vorteil", dass sie nicht "starr" sind, d.h. dass für subharmonische Funktionen kein Identitätssatz gilt. Deshalb kann man lokale subharmonische Funktionen (auf geeignete Weise) zu globalen Funktionen zusammenfügen. Dieses Verfahren wird es uns letztlich erlauben, harmonische Funktionen auf Riemannschen Flächen aus lokalen Lösungen des Dirichlet-Problems "zusammenzukleben".

3.13 Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Funktion f heißt *subharmonisch* [subharmonic], wenn für jedes $z_0 \in G$ und jedes $r > 0$ mit $\overline{B(z_0, r)} \subset G$ gilt:

$$f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi .$$

Die Funktion f heißt *superharmonisch* [superharmonic], wenn $-f$ subharmonisch ist.

Sind f, g subharmonische Funktionen, so ist auch $f + g$ subharmonisch. Hingegen ist $f - g$ im Allgemeinen *nicht* subharmonisch. Ist $c > 0$, so ist mit f auch $c \cdot f$ subharmonisch; $(-c) \cdot f$ ist hingegen im Allgemeinen *nicht* subharmonisch, sondern superharmonisch.

Eine Funktion ist genau dann zugleich subharmonisch und superharmonisch, wenn sie harmonisch ist; das liegt daran, dass harmonische Funktionen durch die Mittelwerteigenschaft charakterisiert sind (siehe Aussage 3.5 und Korollar 3.10).

Einige Eigenschaften von harmonischen Funktionen übertragen sich auf subharmonische Funktionen. Hier ist vor allem das Maximumprinzip zu nennen.

3.14 Aussage. (Maximumprinzip für subharmonische Funktionen.) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

- (a) Sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine subharmonische Funktion. Wenn f auf G ein lokales Maximum besitzt, dann ist f konstant.
- (b) Sei G beschränkt, $f, g : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, und $f|_G$ bzw. $g|_G$ sei subharmonisch bzw. superharmonisch. Wenn dann $f(z) \leq g(z)$ für alle $z \in \partial G$ gilt, so ist $f \leq g$.

Beweis. Für (a). f nehme etwa in $z_0 \in G$ ein lokales Maximum an. Dann ist $f - f(z_0)$ in der Nähe von z_0 eine nicht-positive Funktion. Für jedes hinreichend kleine $r > 0$ mit $\overline{B(z_0, r)} \subset G$ gilt daher

$$0 = f(z_0) - f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi - f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(z_0 + re^{i\varphi}) - f(z_0)) d\varphi \leq 0 .$$

Daraus folgt $f|_{\partial B(z_0, r)} = f(z_0)$. Dies zeigt, dass die Menge $\{z \in G \mid f(z) = f(z_0)\}$ in G offen ist; sie ist auch abgeschlossen und nicht-leer, und daher gleich G . Damit ist f konstant.

Für (b). Die Funktion $f - g = f + (-g)$ ist subharmonisch und nimmt auf dem Abschluss \overline{G} von G ein Maximum an. Wegen (a) muss dieses auf dem Rand ∂G liegen, der entsprechenden Funktionswert ist deshalb nicht-positiv. Das zeigt $f - g \leq 0$. \square

Ist f eine auf G subharmonische Funktion, und g eine auf einer offenen Teilmenge $U \subset G$ harmonische Funktion, so ist $f + g$ subharmonisch auf U . Das Maximumprinzip aus Aussage 3.14(a) zeigt daher, dass $f + g$ entweder auf U konstant ist, oder dort kein lokales Maximum annimmt. Die folgende Aussage zeigt, dass subharmonische Funktionen durch diese Eigenschaft charakterisiert werden:

3.15 Aussage. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Funktion f ist genau dann subharmonisch (superharmonisch), wenn für jede offene Teilmenge $U \subset G$ und jede

harmonische Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: $f + g$ ist entweder auf U konstant oder nimmt dort kein lokales Maximum (Minimum) an.

Beweis. Es genügt, den subharmonischen Fall zu betrachten. Wir haben schon begründet, dass eine subharmonische Funktion die in der Aussage genannte Eigenschaft besitzt. Die stetige Funktion f erfülle nun umgekehrt die besagte Bedingung. Wir wählen $z_0 \in G$ und $r > 0$ so, dass $\overline{B(z_0, r)} \subset G$ ist. Weil auf $U = B(z_0, r)$ das Dirichlet-Problem nach Satz 3.9 eindeutig lösbar ist, existiert eine stetige Funktion $g : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $g|_U$ harmonisch ist, und $g|_{\partial U} = f|_{\partial U}$ ist. Wir behaupten nun, dass $f|_U \leq g|_U$ ist: Wegen der Voraussetzung (angewendet für die harmonische Funktion $-g$) ist $f - g$ auf U entweder konstant, oder nimmt auf U kein lokales Maximum an. Ist $f - g$ auf U konstant, so muss die Konstante wegen $g|_{\partial U} = f|_{\partial U}$ aus Stetigkeitsgründen den Wert Null haben, also gilt $f|_U = g$. Andernfalls gilt: Wenn $f - g$ auf U positive Werte annähme, so würde diese Funktion auf U ein Maximum annehmen, weil sie auf ∂U verschwindet. Also gilt $(f - g)|_U \leq 0$ und somit $f|_U \leq g|_U$. Nun ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi = g(z_0) \geq f(z_0).$$

Das zeigt, dass f subharmonisch ist. □

Die im Folgenden genannte Eigenschaft wird oft verwendet, um subharmonische Funktionen zu definieren:

3.16 Korollar. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f genau dann subharmonisch, wenn für jede kompakte Teilmenge $A \subset G$ und jede stetige Funktion $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, die auf A° harmonisch ist, gilt: Wenn $f|_{\partial A} \leq g|_{\partial A}$ ist, so ist $f|_A \leq g$.

Beweis. Nach Aussage 3.15 ist f genau dann subharmonisch, wenn für jedes g von der im Korollar genannten Art gilt: Entweder ist $f|_A - g$ konstant, oder $f|_A - g$ nimmt sein Maximum auf ∂A an. Im ersten Fall ist wegen $f|_{\partial A} \leq g|_{\partial A}$ die Konstante ≤ 0 , und damit gilt $f|_A \leq g$. Im zweiten Fall ist wegen $f|_{\partial A} \leq g|_{\partial A}$ der Wert dieses Maximums ≤ 0 , und es folgt wieder $f|_A \leq g$. □

3.17 Korollar. Das Maximum von endlich vielen subharmonischen Funktionen ist subharmonisch.

Beweis. Wegen $\max(f_1, \dots, f_n) = \max(f_1, \max(f_2, \max(f_3, \dots)))$ genügt es zu zeigen, dass das Maximum zweier subharmonischer Funktionen $f_1, f_2 : G \rightarrow \mathbb{R}$ subharmonisch ist. Dazu verwenden wir Korollar 3.16. Sei $A \subset G$ eine kompakte Teilmenge, und $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf A° harmonisch ist, und für die $\max(f_1, f_2)|_{\partial A} \leq g|_{\partial A}$ gilt. Dann gilt für $k \in \{1, 2\}$ insbesondere $f_k|_{\partial A} \leq g|_{\partial A}$. Nach Korollar 3.16 (angewendet auf f_k) folgt, dass $f_k|_A \leq g$ ist. Damit ist aber auch $\max(f_1, f_2)|_A \leq g$. Mit Korollar 3.16 folgt, dass f subharmonisch ist. □

Die folgende Schlussfolgerung zeigt, dass Subharmonizität eine lokale Eigenschaft ist:

3.18 Korollar. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f genau dann subharmonisch, wenn es zu jedem $z \in G$ eine Umgebung $V \subset G$ von z gibt, so dass $f|_V$ subharmonisch ist.

Beweis. Wenn f subharmonisch ist, so ist offenbar auch jeweils $f|_V$ subharmonisch. Umgekehrt sei jeweils $f|_V$ subharmonisch. Wir wenden Aussage 3.15 an, um zu zeigen, dass f subharmonisch ist. Sei also $U \subset G$ offen und $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Angenommen, $f + g$ würde in einem Punkt $z_0 \in U$ ein lokales Maximum annehmen. Nach Voraussetzung gibt es eine Umgebung $V \subset G$ von z_0 , so dass $f|_V$ harmonisch ist. Sei W die Zusammenhangskomponente von $U \cap V$, die z_0 enthält. Dann ist $f|_W$ auf W subharmonisch, $g|_W$ auf W harmonisch, und $f + g$ nimmt in $z_0 \in W$ ein lokales Maximum an. Nach Aussage 3.15 folgt, dass $(f + g)|_W$ konstant ist. Weil dies für jedes z_0 gilt, in dem $f + g$ ein lokales Maximum hat, folgt, dass $f + g$ auf ganz U konstant ist. Mit Aussage 3.15 folgt, dass f subharmonisch ist. \square

3.4 Die Methode von Perron

In Korollar 3.17 haben wir gesehen, dass das Maximum von endlich vielen subharmonischen Funktionen wieder subharmonisch ist. In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass das Supremum von unendlich vielen subharmonischen Funktionen unter ganz bestimmten Voraussetzungen nicht nur subharmonisch, sondern sogar harmonisch ist. Das entsprechende Konstruktionsverfahren für harmonische Funktionen nennt man die *Methode von Perron*.

3.19 Definition. (Perron-Familie.) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, und $f : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann besteht die *Perron-Familie* [Perron family] $\mathcal{P}(G, f)$ aus allen subharmonischen Funktionen $g : G \rightarrow \mathbb{R}$, die für jedes $z_0 \in \partial G$ die Bedingung

$$\limsup_{z \rightarrow z_0} g(z) \leq f(z_0)$$

erfüllen.

3.20 Satz. (Methode von Perron.) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, und $f : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist folgende Funktion harmonisch:

$$h : G \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto h(z) = \sup\{g(z) \mid g \in \mathcal{P}(G, f)\}.$$

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir das folgende Lemma. Es zeigt, auf welche Weise man eine harmonische Funktion in eine subharmonischen Funktion "einkleben" kann, um so eine Funktion zu erhalten, die insgesamt subharmonisch, aber auf einer Kreisscheibe sogar harmonisch ist.

3.21 Lemma. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine subharmonische Funktion. Es sei $z_0 \in G$ und $r > 0$ so, dass $\overline{B(z_0, r)} \subset G$ ist. Dann sei g die Lösung des Dirichlet-Problems zu $f|_{\partial B(z_0, r)}$, d.h. $g : \overline{B(z_0, r)} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die (nach Satz 3.9 eindeutig bestimmte) stetige Funktion, die auf $B(z_0, r)$ harmonisch ist und $g|_{\partial B(z_0, r)} = f|_{\partial B(z_0, r)}$ erfüllt. Dann ist die folgende Funktion h subharmonisch:

$$h : G \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto h(z) = \begin{cases} g(z) & \text{für } z \in B(z_0, r) \\ f(z) & \text{für } z \in G \setminus B(z_0, r). \end{cases}$$

Beweis. Wegen Korollar 3.18 sind $h|_{B(z_0, r)}$ und $h|_{G \setminus \overline{B(z_0, r)}}$ subharmonisch. Aus $f|_{\partial B(z_0, r)} = g|_{\partial B(z_0, r)}$ folgt nach Korollar 3.16: $f|_{B(z_0, r)} \leq g|_{B(z_0, r)}$, und somit ist $f \leq h$. Für $z \in \partial B(z_0, r)$

und $r' < r$ gilt daher

$$h(z) = f(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + r'e^{i\varphi}) d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z + r'e^{i\varphi}) d\varphi .$$

Daher ist h insgesamt subharmonisch. \square

Beweis von Satz 3.20. Wir zeigen als Erstes, dass h tatsächlich reelle Werte annimmt: Weil G beschränkt ist, ist ∂G kompakt, und somit f nach oben durch ein $M \in \mathbb{R}$ beschränkt. Wegen des Maximumprinzips für subharmonische Funktionen ist M dann auch obere Schranke für jedes $g \in \mathcal{P}(G, f)$. Deshalb ist dann auch $h \leq M$, insbesondere ist h tatsächlich reellwertig.

Sei nun $z_0 \in G$ gegeben. Wir wählen $r > 0$ so klein, dass $\overline{B(z_0, r)} \subset G$ ist. Wegen der Definition von h existiert eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(G, f)$, so dass $(g_n(z_0))$ gegen $h(z_0)$ konvergiert. Wir konstruieren eine monoton wachsende Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von auf $B(z_0, r)$ harmonischen Funktionen in $\mathcal{P}(G, f)$, die gegen h konvergiert. Dazu definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $h_n : G \rightarrow \mathbb{R}$ durch $h_n|_{G \setminus B(z_0, r)} = \max\{g_1, \dots, g_n\}|_{G \setminus B(z_0, r)}$; auf $B(z_0, r)$ sei h_n die Lösung des Dirichlet-Problems mit dem Randwert $\max\{g_1, \dots, g_n\}|_{\partial B(z_0, r)}$ (siehe Satz 3.9). Nach Korollar 3.17 ist $\max\{g_1, \dots, g_n\}$ jeweils eine subharmonische Funktion, deshalb zeigt Lemma 3.21, dass h_n subharmonisch ist. Somit ist h_n eine monoton wachsende Folge von subharmonischen Funktionen in $\mathcal{P}(G, f)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $g_n(z_0) \leq h_n(z_0) \leq h(z_0)$; weil $g_n(z_0) \rightarrow h(z_0)$ gilt, folgt $h_n(z_0) \rightarrow h(z_0)$. Die Funktionen $h_n|_{B(z_0, r)}$ sind nach Konstruktion harmonisch; mit dem Satz von Harnack (Satz 3.12(b)) folgt, dass die Folge (h_n) auf $B(z_0, r)$ kompakt gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion $H : B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $H(z_0) = h(z_0)$ konvergiert.

Wir zeigen nun, dass $H = h|_{B(z_0, r)}$ ist. Dazu wählen wir $z_1 \in B(z_0, r)$. Es existiert wieder eine Folge $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(G, f)$ mit $\tilde{g}_n(z_1) \rightarrow h(z_1)$. Damit definieren wir neuerlich eine monoton wachsende Folge $(\tilde{h}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(G, f)$, so dass \tilde{h}_n auf $B(z_0, r)$ harmonisch ist und $\tilde{h}_n|_{\partial B(z_0, r)} = \max\{g_1, \dots, g_n, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n\}$ ist. Auch diese Folge konvergiert nach dem Satz von Harnack auf $B(z_0, r)$ kompakt gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion $\tilde{H} : B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$, für die $\tilde{H}(z_0) = h(z_0)$ und $\tilde{H}(z_1) = h(z_1)$ gilt. Es gilt $h_n|_{\partial B(z_0, r)} \leq \tilde{h}_n|_{\partial B(z_0, r)}$, und deshalb nach dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen (Aussage 3.6(b)) $h_n|_{B(z_0, r)} \leq \tilde{h}_n|_{B(z_0, r)}$. Daraus folgt $H \leq \tilde{H}$. Weil $H(z_0) = h(z_0) = \tilde{H}(z_0)$ ist, hat die harmonische Funktion $\tilde{H} - H$ in z_0 ein (lokales) Minimum, ist also nach dem Maximumprinzip Aussage 3.6(a) konstant. Deshalb ist $\tilde{H} = H$, und somit $H(z_1) = \tilde{H}(z_1) = h(z_1)$. Dies zeigt $H = h|_{B(z_0, r)}$, also ist h auf $B(z_0, r)$ harmonisch. \square

3.5 Riemannsche Flächen mit Rand

Um das Dirichlet-Problem auch für Riemannsche Flächen formulieren zu können, benötigen wir das Konzept einer Riemannschen Fläche mit Rand. Im Folgenden bezeichnen wir mit $\mathbb{B} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ die abgeschlossene obere Halbebene in der komplexen Ebene. Für offene Teilmengen U von \mathbb{B} nennt man eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, wenn es eine offene Teilmenge $\tilde{U} \supset U$ von \mathbb{C} und eine Fortsetzung $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}$ von f gibt, die im üblichen Sinn holomorph ist.

3.22 Definition. Sei X ein topologischer Raum.

- (a) Eine *komplexe Karte mit Rand* [complex chart with boundary] von X ist ein Paar (U, φ) aus einer offenen Teilmenge $U \subset X$ und einem Homöomorphismus φ von U auf eine offene Teilmenge $U' = \varphi[U]$ von \mathbb{B} .
- (b) Zwei komplexe Karten mit Rand (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) heißen *holomorph verträglich* [holomorphically compatible], wenn $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ist, oder wenn im Fall $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ der *Koordinatenwechsel* [transition function]

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}|_{\varphi_1[U_1 \cap U_2]} : \varphi_1[U_1 \cap U_2] \rightarrow \varphi_2[U_1 \cap U_2]$$

biholomorph (in Sinn von \mathbb{B}) ist.

- (c) Ein *holomorpher Atlas mit Rand* [holomorphic atlas with boundary] für X ist eine Familie $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ von paarweise holomorph verträglichen Karten mit Rand auf X , so dass $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X ist, d.h. $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.
- (d) Ein holomorpher Atlas mit Rand \mathfrak{A} heißt *maximal* [maximal], wenn für jede komplexe Karte mit Rand (U, φ) von X , die mit allen Karten mit Rand aus \mathfrak{A} verträglich ist, schon $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$ gilt.
- (e) Eine *Riemannsche Fläche mit Rand* [Riemann surface with boundary] ist ein Paar (X, \mathfrak{A}) , bestehend aus einem wegzusammenhängenden, metrisierbaren, hausdorffschen topologischen Raum X mit abzählbarer Basis der Topologie und einem holomorphen Atlas mit Rand \mathfrak{A} auf X .

Holomorphe, meromorphe, harmonische Funktionen, Differentialformen usw. werden für Riemannsche Flächen mit Rand sinngemäß definiert. Subharmonische und superharmonische Funktionen $X \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir *mutatis mutandis* mit Hilfe des Kriteriums aus Korollar 3.16.

Wenn wir von Riemannschen Flächen "mit Rand" sprechen, sollten wir auch sagen, was denn nun der Rand einer solchen Fläche ist. Das wird in der folgenden Aussage erledigt:

3.23 Aussage und Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche mit Rand und $x_0 \in X$. Für Karten mit Rand (U, φ) mit $x_0 \in U$ ist die Gültigkeit der Bedingung $\varphi(x_0) \in \partial\mathbb{B} = \mathbb{R}$ von der Wahl der Karte unabhängig. Gilt diese Bedingung, so heißt x_0 ein *Randpunkt* [boundary point] von X . Die Menge der Randpunkte von X wird mit ∂X bezeichnet. Ist x_0 kein Randpunkt, so heißt x_0 ein *innerer Punkt* [inner point] von X . Die Menge der inneren Punkte von X wird mit $X^\circ = X \setminus \partial X$ bezeichnet.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass für je zwei offene Teilmengen U_1, U_2 von \mathbb{B} und jeden Homöomorphismus $f : U_1 \rightarrow U_2$ gilt: $f[U_1 \cap \partial\mathbb{B}] = U_2 \cap \partial\mathbb{B}$. Dies ist der Fall, weil sich die inneren Punkte $z \in \mathbb{B}$ von \mathbb{B} eindeutig dadurch charakterisieren lassen, dass es eine ε -Umgebung $B(z, \varepsilon)$ gibt, die ganz in \mathbb{B} enthalten ist. \square

3.6 Das allgemeine Dirichlet-Problem

In diesem Abschnitt werden wir die Methode von Perron verwenden, um das Dirichlet-Problem allgemein zu lösen, zunächst für Gebiete in \mathbb{C} , und dann für Riemannsche Flächen mit Rand.

3.24 Definition. Ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt *Dirichlet-Gebiet*, wenn das Dirichlet-Problem für jede stetige Randfunktion auf ∂G eindeutig lösbar ist, d.h. wenn es für jede stetige Funktion $g : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$ genau eine stetige Funktion $f : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $f|_G$ harmonisch ist und $f|_{\partial G} = g$ gilt.

Wir haben schon in Satz 3.9 gesehen, dass alle offenen Bälle $B(z_0, r)$ Dirichlet-Gebiete sind. Wir werden jetzt gleich sehen, dass alle beschränkten Gebiete mit hinreichend guten Rändern Dirichlet-Gebiete sind.

3.25 Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $z_0 \in \partial G$. Eine *Barriere* [barrier] für G in z_0 ist eine Familie $\{\psi_r \mid r > 0\}$ von reellen Funktionen ψ_r mit folgenden Eigenschaften:

- (i) ψ_r ist auf $G \cap B(z_0, r)$ superharmonisch mit $0 \leq \psi_r \leq 1$.
- (ii) ψ_r läßt sich stetig auf dem Abschluss von $G \cap B(z_0, r)$ in \mathbb{C} fortsetzen. Diese Fortsetzung verschwindet bei z_0 , und ist auf $\bar{G} \cap \partial B(z_0, r)$ gleich 1.

3.26 Satz. Ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist genau dann ein Dirichlet-Gebiet, wenn jeder Randpunkt von G eine Barriere hat.

Beweis. Es sei zunächst G ein Dirichlet-Gebiet. Zu vorgegebenem $z_0 \in \partial G$ ist $g : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto \frac{|z-z_0|}{1+|z-z_0|}$ eine stetige Funktion mit $0 \leq g \leq 1$, die nur bei z_0 verschwindet. Weil G ein Dirichlet-Gebiet ist, existiert genau eine Lösung des Dirichlet-Problems zu g , d.h. genau eine stetige Funktion $f : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $f|_G$ harmonisch ist, und $f|_{\partial G} = g$ gilt. Weil f sein Maximum und sein Minimum auf ∂G annimmt, ist $0 \leq f \leq 1$. Für $r > 0$ sei $c_r \geq 0$ der minimale Funktionswert, der von f auf der kompakten Menge $\bar{G} \cap \partial B(z_0, r)$ angenommen wird. Wenn $c_r = 0$ wäre, so würde dieses Minimum in einem Punkt in G angenommen, und deshalb wäre f dann nach dem Maximumprinzip Aussage 3.6(a) konstant. Also ist $c_r > 0$. Die Funktion $\psi_r := \frac{1}{c_r} \min\{f, c_r\}$ ist nach Korollar 3.17 (bzw. der analogen Aussage für superharmonische Funktionen) auf $G \cap B(z_0, r)$ superharmonisch, es gilt $0 \leq \psi_r \leq 1$, $\psi_r(z_0) = 0$ und $\psi_r|_{\bar{G} \cap \partial B(z_0, r)} = 1$. Also ist $\{\psi_r \mid r > 0\}$ eine Barriere für G in z_0 .

Wir setzen nun umgekehrt voraus, dass das Gebiet G an jedem Randpunkt eine Barriere besitzt. Dann sei eine stetige Funktion $g : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Nach dem Satz 3.20 über die Methode von Perron ist die Funktion

$$f : G \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto \sup\{h(z) \mid h \in \mathcal{P}(G, g)\}$$

harmonisch. Wir werden zeigen, dass f stetig auf \bar{G} fortgesetzt werden kann und dann $f|_{\partial G} = g$ gilt. Damit ist f dann eine Lösung des Dirichlet-Problems zu g . Wegen Aussage 3.6(b) ist die Lösung eindeutig bestimmt.

Sei dafür $z_0 \in \partial G$ und $\{\psi_r \mid r > 0\}$ eine Barriere für G in z_0 . Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $g(z_0) = 0$ annehmen. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ sei $\delta > 0$ so gewählt, dass $|g(z)| < \varepsilon$ für alle $z \in B(z_0, 2\delta) \cap \partial G$ gilt. Dann definieren wir $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\psi(z) = \begin{cases} \psi_\delta(z) & \text{für } z \in G \cap \overline{B(z_0, \delta)} \\ 1 & \text{für } z \in G \setminus \overline{B(z_0, \delta)} \end{cases}.$$

Offenbar ist ψ superharmonisch und es gilt $\psi \geq 0$. Sei $M > 0$ das Maximum von $|g|$ auf ∂G . Wir zeigen nun

$$-M\psi - \varepsilon \leq f \leq M\psi + \varepsilon.$$

Die linke Ungleichung folgt aus $-M\psi - \varepsilon \in \mathcal{P}(G, g)$, was der Fall ist, denn $-M\psi - \varepsilon$ ist subharmonisch, es gilt für $z \in \partial G \cap B(z_0, \delta)$

$$-M\psi(z) - \varepsilon \leq -\varepsilon < g(z)$$

und für $z \in \partial G \setminus B(z_0, \delta)$ gilt $\psi(z) = 1$ und deshalb

$$-M\psi(z) - \varepsilon \leq -M \leq g(z).$$

Andererseits ist jedes $h \in \mathcal{P}(G, g)$ auf ∂G durch $g \leq M\psi + \varepsilon$ nach oben beschränkt. Weil h subharmonisch und $M\psi + \varepsilon$ superharmonisch ist, folgt $h \leq M\psi + \varepsilon$ auf ganz G nach Aussage 3.14(b). Durch Bildung des Supremums über alle $h \in \mathcal{P}(G, g)$ folgt heraus die rechte Ungleichung.

Die obige Ungleichung zeigt wegen $\psi(z_0) = 0$: $-\varepsilon \leq f(z_0) \leq \varepsilon$. Indem man nun $\varepsilon \rightarrow 0$ gehen lässt, folgt $f(z_0) = 0 = g(z_0)$, was zu zeigen war.

Der Nutzen der Barriere bei diesem Beweis bestand darin, die Funktion ψ zu konstruieren, mit deren Hilfe wir f "einklemmen" konnten. \square

Wegen des vorhergehenden Satzes ist es extrem interessant, wenn man weiß, dass bei einem bestimmten Gebiet jeder Randpunkt eine Barriere besitzt. Das folgende Lemma liefert hierfür ein (hinreichendes) Kriterium. Es zeigt, dass die Voraussetzung von Satz 3.26 für jedes beschränkte Gebiet in \mathbb{C} , dessen Rand "hinreichend gutartig" ist, erfüllt ist.

3.27 Lemma. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $z_0 \in \partial G$. Wenn es ein $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \bar{G}$ gibt, so dass für die Verbindungsstrecke $[z_0, z_1] = \{z_0 + t(z_1 - z_0) \mid t \in [0, 1]\}$ gilt: $[z_0, z_1] \cap \bar{G} = \{z_0\}$, dann besitzt G bei z_0 eine Barriere.

Beweis. Sind $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ zwei beschränkte Gebiete, $\varphi: \bar{G}_1 \rightarrow \bar{G}_2$ biholomorph, und $z_0 \in \partial G_1$. Dann besitzt G_1 genau dann eine Barriere in z_0 , wenn G_2 eine Barriere in $\varphi(z_0)$ besitzt. Diese Aussage verwenden wir, indem wir zu $G_1 = G$ unter der genannten Voraussetzung eine biholomorphe Abbildung auf die Einheitskreisscheibe $G_2 = \mathbb{D}$ konstruieren. Da letztere ein Dirichlet-Gebiet ist, besitzt nach Satz 3.26 jeder Randpunkt von \mathbb{D} eine Barriere. Daher folgt dann, dass G bei z_0 eine Barriere besitzt.

Die Möbiustransformation $z \mapsto \frac{z-z_0}{z-z_1}$ bildet die Verbindungsstrecke $[z_0, z_1]$ auf \mathbb{R}_0^- ab, denn für $t \in \mathbb{R}^-$ gilt

$$\frac{z-z_0}{z-z_1} = -t \iff z(1+t) = z_0 + z_1 t \iff z = z_0 + \frac{t}{1+t}(z_1 - z_0).$$

Das Gebiet $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ ist einfach zusammenhängend, und besitzt den Zweig der Quadratwurzelfunktion

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}, \quad z \mapsto \sqrt{z},$$

die mit diesem Definitions- und Wertebereich biholomorph ist. Das Bild wird durch die Möbiustransformation $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$ auf \mathbb{D} abgebildet. Dabei wird der Randpunkt z_0 auf $-1 \in \partial \mathbb{D}$ abgebildet. Nach dem anfangs Gesagten folgt, dass G in z_0 eine Barriere hat. \square

Jetzt können wir auch das Dirichletproblem auf beliebigen Riemannschen Flächen mit kompaktem Rand lösen.

3.28 Theorem. Sei X eine Riemannsche Fläche mit kompaktem Rand ∂X , und $f : \partial X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es genau eine stetige Funktion $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $g|_{X^\circ}$ harmonisch ist, und $g|_{\partial X} = f$ gilt.

Beweis. Wir wollen die Perron-Methode verwenden, um die gesuchte Funktion zu konstruieren. Weil X im Allgemeinen nicht kompakt ist, sind stetige Funktionen auf X nicht unbedingt beschränkt. Aus diesem Grund müssen wir die Definition der Perron-Familie für diesen Fall modifizieren: Die *modifizierte Perron-Familie* $\tilde{\mathcal{P}}(X, f)$ besteht aus allen stetigen Funktionen $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $g|_{X^\circ}$ subharmonisch ist, für alle $x_0 \in \partial X$

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq f(x_0)$$

gilt, und die $g \leq \max_{x \in \partial X} f(x) \in \mathbb{R}$ erfüllen.

Wegen Korollar 3.17 ist das Maximum von endlich vielen Elementen von $\tilde{\mathcal{P}}(X, f)$ wieder in $\tilde{\mathcal{P}}(X, f)$, und die in Lemma 3.21 aus einem $f \in \tilde{\mathcal{P}}(X, f)$ konstruierten Funktion h ist wieder in $\tilde{\mathcal{P}}(X, f)$. Deshalb übertragen sich die Argumente aus den Beweisen der Sätze 3.20 und 3.26 auf die vorliegende Situation.

Ist $x_0 \in \partial X$, so existiert eine Karte (U, z) von X mit $z(x_0) = 0$, $\operatorname{Im}(z(x)) = 0$ für alle $x \in \partial X \cap U$ und $\operatorname{Im}(z(x)) > 0$ für alle $x \in X^\circ \cap U$. Daher erfüllt $G := z[U^\circ]$ die Bedingung von Lemma 3.27 mit $z_0 = 0$ und $z_1 = -i$. Nach diesem Lemma besitzt G eine Barriere in $z_0 = z(x_0)$, und daher besitzt X eine Barriere in x_0 .

Daher ist nach (der auf die vorliegende Situation übertragenen Version von) Satz 3.26 das Dirichlet-Problem auf X zu f eindeutig lösbar. \square

3.7 Der Anulus-Satz

Ein wichtiger Teilschritt auf dem Weg zum großen Riemannschen Abbildungssatz ist der Anulus-Satz, den wir in diesem Abschnitt vorstellen und beweisen. Er zeigt, dass eine einfach zusammenhängende (bzw. planare, vgl. Definition 3.29) Riemannsche Fläche, aus der man zwei abgeschlossene Bälle "herausgeschnitten" hat, zu einem Kreisring in \mathbb{C} biholomorph ist.

Die folgende Definition hat provisorischen Charakter, d.h. sie erfolgt nur, um den Beweis des großen Riemannschen Abbildungssatz besser zu organisieren. Am Ende wird sich herausstellen, dass eine Riemannsche Fläche genau dann planar ist, wenn sie einfach zusammenhängend ist.

3.29 Definition. Eine Riemannsche Fläche X (ohne Rand) heißt *planar* [planar], wenn jede geschlossene 1-Form auf X mit kompaktem Träger exakt ist.

3.30 Satz. (Anulus-Satz) Sei X eine kompakte, planare Riemannsche Fläche, $D \subset X$ eine offene Teilmenge, die zu \mathbb{D} biholomorph äquivalent ist, und $A, B \subset D \cong \mathbb{D}$ zwei disjunkte abgeschlossene Kreisscheiben. Dann existiert ein $R > 1$, so dass die Riemannsche Fläche $X \setminus (A \cup B)$ zum Kreisring

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < R\}$$

biholomorph äquivalent ist.

Für den Beweis benötigen wir noch etwas Vorbereitung. In der Situation von Satz 3.30 identifizieren wir D mit \mathbb{D} und bezeichnen die Mittelpunkte der Kreisscheiben A bzw. B mit $a, b \in \mathbb{D} \simeq D$. Wir bezeichnen mit A_r und B_r die abgeschlossenen Bälle um a und b mit Radius r , und mit X_r die Riemannsche Fläche $X \setminus (\overline{A_r} \cup \overline{B_r})$. Wähle ε klein genug, so dass sich $\overline{A_{4\varepsilon}}$, $\overline{B_{4\varepsilon}}$ und $\partial B(0, 1 - \varepsilon)$ nicht schneiden. Sei C die geschlossene Kurve $\partial A_{4\varepsilon}$.

3.31 Lemma. In der zuvor beschriebenen Situation gilt für jede glatte, geschlossene 1-Form ω auf X_ε : Wenn $\int_C \omega \in \mathbb{Z}$ ist, so ist auch $\int_\gamma \omega \in \mathbb{Z}$ für jeden geschlossenen Weg γ in X_ε .

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass jede geschlossene 1-Form ω auf X_ε , die $\int_C \omega = 0$ erfüllt, exakt ist. Weil C und $\partial A_{2\varepsilon}$, sowie C und $-\partial B_{2\varepsilon}$, homologous sind und ω geschlossen ist, verschwindet wegen des Satzes von Stokes (Satz 1.33) $\int_{\partial A_{2\varepsilon}} \omega = -\int_{\partial B_{2\varepsilon}} \omega = \int_C \omega = 0$. Betrachte nun das Anulus $A' := A_{2\varepsilon} \setminus \overline{A_\varepsilon}$. Wegen Homotopie ist $\int_\gamma \omega = n \int_{\partial A_{2\varepsilon}} \omega = 0$ für alle geschlossen Kurven γ in A' . Also gibt es eine glatte Funktion φ mit $d\varphi = \omega$ auf A' (Korollar 2.16). Wir können φ zu X fortsetzen, so dass $\varphi \equiv 0$ außerhalb von $A_{3\varepsilon}$. Ähnlich gibt es eine glatte Funktion ψ auf X , so dass $d\psi = \omega$ auf $B' := B_{2\varepsilon} \setminus \overline{B_\varepsilon}$ und $\psi \equiv 0$ außerhalb von $B_{3\varepsilon}$. Deshalb haben wir auf X_ε die Form $\omega - d\varphi - d\psi$, die auf A' und B' verschwindet. Setze sie als 0 auf $\overline{A_\varepsilon} \cup \overline{B_\varepsilon}$, um eine glatte geschlossene 1-Form auf X zu bilden. Weil X planar ist, folgt, dass $\omega - d\varphi - d\psi$ exakt ist. Also ist auch ω auf X_ε exakt.

Als nächstes zeigen wir, dass es eine geschlossene Form Ω auf X_ε gibt, so dass $\int_C \Omega = 1$ und $\int_\gamma \Omega \in \mathbb{Z}$ für alle geschlossenen Wege $\gamma \in X_\varepsilon$ gilt. Dazu definieren wir zunächst

$$\Omega' = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{dz}{z-a} - \frac{dz}{z-b} \right) \text{ auf } \mathbb{D} \setminus \{a, b\}.$$

Dann gilt $\int_{\partial A_\varepsilon} \Omega' = \int_C \Omega' = 1$, $\int_{B_\varepsilon} \Omega' = -1$ und $\int_{\partial B(0, 1-\varepsilon)} \Omega' = 0$ (Aussage 1.40). Wie oben gibt es eine glatte Funktion ζ auf $X \setminus \overline{B(0, 1-\varepsilon)}$, so dass $\Omega' - d\zeta$ auf $B(0, 1) \setminus \overline{B(0, 1-\varepsilon)}$ verschwindet. Wir definieren eine glatte 1-Form auf X durch

$$\Omega = \begin{cases} \Omega' & \text{auf } D, \\ d\zeta & \text{auf } X \setminus D. \end{cases}$$

Jeder geschlossene Weg von X_ε lässt sich zerlegen in geschlossene Wege in \overline{D} und geschlossene Wege in $X \setminus D$. Auf jedem geschlossenen Weg γ in $X \setminus D$ ist $\int_\gamma \Omega = 0$, weil Ω hier exakt ist. Andererseits ist jeder geschlossene Weg in D homologous zu einer Kombination von A_ε und B_ε . Dann folgt die Behauptung.

Nun betrachten wir eine geschlossene 1-Form ω auf X_ε , die $n := \int_C \omega \in \mathbb{Z}$ erfüllt. Dann ist $\omega' = \omega - n\Omega$ eine geschlossene 1-Form auf X_ε , die $\int_C \omega' = 0$ erfüllt. Wegen dem ersten Beweisschritt ist ω' also exakt. Damit folgt für jeden geschlossenen Weg γ in X_ε :

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega' + n \int_\gamma \Omega = 0 + n \int_\gamma \Omega \in \mathbb{Z}.$$

□

Beim Beweis des Anulus-Satz verwenden wir weiter den sogenannten *Hodge*-Operator* [Hodge star operator] für 1-Formen. Er ist dadurch definiert, dass bezüglich beliebiger holomorpher Karten z und glatter Funktionen $f(z)$, $g(z)$ gilt:

$$*(f(z) dz + g(z) d\bar{z}) = -i f(z) dz + i g(z) d\bar{z}.$$

Man überprüft leicht:

3.32 Aufgabe. Sei X eine Riemannsche Fläche.

- (a) Durch $*$ wird ein wohldefinierter (koordinatenunabhängiger) linearer Operator auf dem Raum der glatten 1-Formen auf X definiert.
- (b) Eine zweimal differenzierbare Funktion $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann harmonisch, wenn $*dh$ geschlossen ist, also $d * dh = 0$ gilt.
- (c) Ist $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion, so ist jede Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, die $df = dh + i * dh$ erfüllt, holomorph.
- (d) Ist $G \subset \mathbb{C}$ und ω eine reelle 1-Form (d.h. $\omega = f(z)dz + g(z)d\bar{z}$ mit reellwertigen Funktionen $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$), so ist $\omega \wedge * \omega$ punktweise ein nicht-negatives, reelles Vielfaches der "Standardorientierung von \mathbb{C} ", d.h. der 2-Form $dx \wedge dy$. Außerdem hat $\omega \wedge * \omega$ nur an den Nullstellen von ω Nullstellen.

Beweis des Anulus-Satzes (Satz 3.30). Die Riemannsche Fläche mit Rand \bar{X}_ε hat kompakten Rand $\partial X_\varepsilon = \partial A_\varepsilon \cup \partial B_\varepsilon$. Nach Theorem 3.28 besitzen deshalb Dirichlet-Probleme auf \bar{X}_ε eindeutige Lösungen. Für $c > 0$ sei $h_c : \bar{X}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösung des Dirichlet-Problems zur stetigen Randfunktion $h_c : \partial A_\varepsilon \cup \partial B_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h_c|_{\partial A_\varepsilon} = c$ und $h_c|_{\partial B_\varepsilon} = 0$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung dieses Dirichlet-Problems gilt jeweils $h_c = c \cdot h_1$. Weil h_c harmonisch ist, wegen des Satzes von Stokes (Satz 1.33), und weil ∂A_ε in \bar{X}_ε homotop zu C ist, gilt

$$\int_{X_\varepsilon} dh_c \wedge * dh_c = \int_{X_\varepsilon} d(h_c \cdot * dh_c) = \int_{\partial A_\varepsilon} h_c \cdot * dh_c + \int_{\partial B_\varepsilon} h_c \cdot * dh_c = c \cdot \int_{\partial A_\varepsilon} * dh_c = c \cdot \int_C * dh_c.$$

Wegen Aufgabe 3.32(d) ist $\int_{X_\varepsilon} dh_c \wedge * dh_c > 0$. Deshalb folgt, dass es genau ein $c > 0$ gibt, so dass $\int_C * dh_c = 1$ ist. Weil $*dh_c$ nach Aufgabe 3.32(b) geschlossen ist, folgt aus Lemma 3.31, dass $\int_\gamma * dh_c \in \mathbb{Z}$ für jeden geschlossenen Weg γ in X_ε gilt. Deshalb ist für fixiertes $x_0 \in X_\varepsilon$ und beliebiges $x \in X_\varepsilon$ der Wert

$$f(x) = \exp\left(2\pi \int_{x_0}^x (dh_c + i * dh_c)\right) \cdot \exp(2\pi h_c(x_0))$$

unabhängig von der Wahl des Integrationswegs in X_ε von x_0 nach x , so dass hierdurch eine Funktion $f : X_\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}$ definiert wird. Nach Aufgabe 3.32(c) ist der Integrand $dh_c + i * dh_c$ holomorph, und deshalb ist auch f holomorph. Wegen der Formel $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ gilt für jedes $x \in X_\varepsilon$: $|f(x)| = \exp(2\pi h_c(x))$. Nach dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen, angewendet auf die harmonische Funktion h_c , ist $0 < h_c < c$ auf X_ε (die strengen Ungleichungen gelten, weil h_c sonst konstant wäre), und somit ist das Bild von f im Anulus

$$M := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < \exp(2\pi c)\}$$

enthalten. Und zwar ist das Bild $f[X_\varepsilon]$ einerseits nach dem Satz vom offenen Bild eine offene Teilmenge von M ; andererseits ist \bar{X}_ε kompakt, und deshalb ist $f[\bar{X}_\varepsilon] = f[\bar{X}_\varepsilon]$ eine kompakte Teilmenge von \bar{M} . Deshalb ist $f[X_\varepsilon] = f[\bar{X}_\varepsilon] \cap M$ auch abgeschlossen in M . Weil M zusammenhängend ist, folgt hieraus $f[X_\varepsilon] = M$.

Es verbleibt zu zeigen, dass f injektiv ist; nach dem Satz von Osgood ist dann $f : X_\varepsilon \rightarrow M$ biholomorph. Wir benutzen dazu, dass nicht-konstante holomorphe Abbildungen "verzweigte Überlagerungen" sind, d.h. dass es eine diskrete Menge $N \subset X_\varepsilon$ gibt, so dass $f|_{(X_\varepsilon \setminus N)}$ eine holomorphe Überlagerung ist, und dass an den "Verzweigungspunkten", d.h. den Punkten von N die Fasern von f höchstens so viele Punkte enthalten wie die Blätterzahl der Überlagerung angibt. Deshalb ist

$$\int_{\bar{X}_\varepsilon} f^*(dz \wedge d\bar{z}) = \deg(f) \cdot \int_M dz \wedge d\bar{z}, \quad (*)$$

wobei $\deg(f) \in \mathbb{N}$ auch der "Abbildungsgrad" von f heißt. Aus dem zuvor gesagten folgt: Wenn $\deg(f) = \pm 1$ ist, so ist f injektiv. Um $\deg(f)$ zu bestimmen, sollten wir also die beiden Integrale in (*) ausrechnen.

Auf der einen Seite gilt

$$\int_M dz \wedge d\bar{z} = -2i \cdot \int_M dx \wedge dy = -2i \cdot \text{vol}(M) = -2i \cdot \pi(\exp(4\pi c) - 1).$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} f^*(dz \wedge d\bar{z}) &= df \wedge d\bar{f} = |f|^2 \cdot \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} = \exp(4\pi h_c) \cdot (2\pi(dh_c + i * dh_c)) \wedge (2\pi(dh_c - i * dh_c)) \\ &= \exp(4\pi h_c) \cdot 4\pi^2 \cdot (-2i) \cdot (dh_c \wedge *dh_c) = -2\pi i \cdot d(\exp(4\pi h_c)) \wedge *dh_c \\ &= -2\pi i \cdot d(\exp(4\pi h_c) \cdot *dh_c) \end{aligned}$$

und somit nach dem Satz von Stokes:

$$\begin{aligned} \int_{\bar{X}_\varepsilon} f^*(dz \wedge d\bar{z}) &= -2\pi i \int_{\bar{X}_\varepsilon} d(\exp(4\pi h_c) \cdot *dh_c) = -2\pi i \int_{\partial \bar{X}_\varepsilon} \exp(4\pi h_c) \cdot *dh_c \\ &= -2\pi i \cdot \left(\int_{\partial A_\varepsilon} \exp(4\pi h_c) \cdot *dh_c + \int_{\partial B_\varepsilon} \exp(4\pi h_c) \cdot *dh_c \right) \\ &= -2\pi i \cdot \left(\exp(4\pi c) \int_{\partial A_\varepsilon} *dh_c + \int_{\partial B_\varepsilon} *dh_c \right) \\ &= -2\pi i \cdot (\exp(4\pi c) - 1). \end{aligned}$$

Durch Vergleich der beiden Rechenergebnisse in (*) ergibt sich $\deg(f) = 1$ und damit die Injektivität von f . \square

3.33 Korollar. Sei X eine Riemannsche Fläche mit Rand, die als topologischer Raum homöomorph zu $S^1 \times [0, 1]$ ist. Dann gibt es ein $R > 1$, so dass das Innere $X^\circ \cong S^1 \times (0, 1)$ biholomorph ist zum Anulus

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < R\}.$$

Beweis. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ ist isomorph zu \mathbb{Z} , und ein Erzeuger von $\pi_1(X)$ ist die Homotopieklasse der geschlossenen Kurve $C : S^1 \rightarrow X \cong S^1 \times [0, 1]$, $\varphi \mapsto (\varphi, 0)$. Daher hat X mit dieser Kurve C sinngemäß die Eigenschaft von Lemma 3.31. Der Beweis des Anulus-Satzes überträgt sich nun auf die gegenwärtige Situation. \square

3.8 Der große Riemannsche Abbildungssatz

In diesem Abschnitt werden wir den großen Riemannschen Abbildungssatz beweisen. Wichtige Zutaten für dessen Beweis sind die Lösung des Dirichlet-Problems, der Anulus-Satz, und der "kleine" Riemannsche Abbildungssatz. Hinzu kommt der sogenannte Satz von Koebe, eine erweiterte Version des Satzes von Montel, der die Konvergenz von injektiven holomorphen Funktionen charakterisiert; solche Funktionen nennt man manchmal auch *schlichte Funktionen**.

Zur Erinnerung:

3.34 Aussage. (Satz von Montel.) Sei \mathcal{F} eine lokal gleichmäßig beschränkte Familie von holomorphen Funktionen auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ oder einer Riemannschen Fläche X . Dann ist \mathcal{F} *normal*, d.h. jede Folge in \mathcal{F} besitzt eine kompakt gleichmäßig konvergente Teilfolge.

3.35 Satz. (Satz von Koebe.) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $x_0 \in G$. Dann ist die Menge \mathcal{F} aller injektiven holomorphen Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) = 1$ kompakt, d.h. jede Folge in \mathcal{F} besitzt eine kompakt gleichmäßig konvergente Teilfolge, deren Grenzwert auch in \mathcal{F} liegt.

Wir bereiten den Beweis des Satzes von Koebe durch die folgenden beiden Lemmata vor:

3.36 Lemma. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, so dass $\mathbb{C} \setminus G$ innere Punkte enthält, und $x_0 \in G$. Dann besitzt jede Folge von holomorphen Funktionen $f : \mathbb{D} \rightarrow G$ mit $f(0) = x_0$ eine kompakt gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{C}$ ein innerer Punkt von $\mathbb{C} \setminus G$. Dann wird durch $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ das Gebiet G biholomorph auf ein beschränktes Gebiet in \mathbb{C} abgebildet. Also folgt die Aussage aus dem Satz von Montel (Aussage 3.34). \square

3.37 Lemma. Die Menge \mathcal{F} der injektiven holomorphen Funktionen $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ ist kompakt, d.h. jede Folge in \mathcal{F} besitzt eine kompakt gleichmäßig konvergente Teilfolge, deren Grenzwert auch in \mathcal{F} liegt.

Beweis. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in \mathcal{F} . Zu zeigen ist, dass (f_n) eine Teilfolge besitzt, die kompakt gleichmäßig gegen eine Funktion in \mathcal{F} konvergiert.

Nach dem Satz vom offenen Bild ist für $n \in \mathbb{N}$ jeweils $f_n[\mathbb{D}]$ offen in \mathbb{C} und es gilt $0 \in f_n[\mathbb{D}]$. Daher erfüllt der maximale Radius r_n , so dass $B(0, r_n) \subset f_n[\mathbb{D}]$ ist, $r_n > 0$. Wir behaupten, dass andererseits $r_n < 2$ gilt: Wäre $r_n \geq 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so wäre $B(0, 2) \subset f_n[\mathbb{D}]$, also ist $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, $z \mapsto f_n^{-1}(2z)$ eine wohldefinierte holomorphe Funktion mit $g(0) = 0$ und $|g(z)| \leq 1$ für $z \in \mathbb{D}$. Nach dem Lemma von Schwarz gilt $|g(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$, und folglich $|f_n^{-1}(z)| \leq \frac{1}{2}|z|$ für alle $z \in B(0, 2)$. Daraus folgt $|(f_n^{-1})'(0)| \leq \frac{1}{2}$ und somit $|f_n'(0)| \geq 2$ im Widerspruch zu $f_n'(0) = 1$.

Wegen der Maximalität von r_n ist $\partial B(0, r_n) \setminus f_n[\mathbb{D}] \neq \emptyset$, und wir wählen ein $a_n \in \partial B(0, r_n) \setminus f_n[\mathbb{D}]$. Wir setzen $g_n = \frac{1}{a_n} \cdot f_n$. Dann gilt $\mathbb{D} \subset g_n[\mathbb{D}]$, aber $1 \notin g_n[\mathbb{D}]$. Weil $g_n[\mathbb{D}]$ einfach

*Manchmal ist mit einer "schlichten Funktion" allerdings auch eine biholomorphe Funktion, oder eine biholomorphe Funktion f mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$, oder ein ähnliches Konzept gemeint. In englischsprachigen Texten sieht man gelegentlich "schlicht function".

zusammenhängend ist, existiert auf diesem Gebiet eine "Quadratwurzel" aus $z - 1$, d.h. es existiert genau eine holomorphe Funktion $\psi_n : g_n[\mathbb{D}] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\psi_n^2 = z - 1$ und $\psi_n(0) = i$. Für die holomorphe Funktion $h_n := \psi_n \circ g_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ gilt dann $h_n^2 = g_n - 1$ und $h_n(0) = i$.

Wir behaupten nun, dass $h_n[\mathbb{D}] \cap (-h_n[\mathbb{D}]) = \emptyset$ gilt. Das liegt daran, dass mit f_n auch g_n injektiv ist. Gäbe es nun $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ mit $h_n(z_1) = -h_n(z_2)$, so wäre $g_n(z_1) = h_n(z_1)^2 + 1 = h_n(z_2)^2 + 1 = g_n(z_2)$ und somit $z_1 = z_2$. Daraus folgt $h_n(z_1) = 0$ und somit $g_n(z_1) = h_n(z_1)^2 + 1 = 1$ im Widerspruch zu $1 \notin g_n[\mathbb{D}]$.

Wegen $\mathbb{D} \subset g_n[\mathbb{D}]$ ist $U := \psi_n[\mathbb{D}] \subset h_n[\mathbb{D}]$ und somit folgt $(-U) \cap h_n[\mathbb{D}] = \emptyset$. Wegen Lemma 3.36 besitzt (h_n) eine Teilfolge (h_{n_k}) , die kompakt gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion h konvergiert. Es gilt $f_n = a_n \cdot (h_n^2 + 1)$ mit $|a_n| = r_n \leq 2$; deshalb hat auch (f_n) eine Teilfolge $(f_{\tilde{n}_k})$, die kompakt gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion f konvergiert. Wegen $f_n(0) = 0$ und $f'_n(0) = 1$ ist $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Weil die f_n injektiv sind, ist f wegen dem "nullstellenzählenden Integral" entweder injektiv oder konstant; hier kann f jedoch wegen $f'(0) = 1$ nicht konstant sein. Also ist $f \in \mathcal{F}$. \square

Beweis des Satzes von Koebe (Satz 3.35). Wir verwenden eine ähnliche Beweisidee, wie sie häufig auch für den Beweis des Satzes von Arzela-Ascoli verwendet wird. Es sei eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen in \mathcal{F} gegeben. Zu zeigen ist, dass es eine Teilfolge (f_{n_k}) von (f_n) gibt, die auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset G$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in \mathcal{F}$ konvergiert.

Wir wählen eine dichte Folge $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in G , zum Beispiel kann (x_m) eine Abzählung von $G \cap \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ sein. Weil nach Lemma 3.36 insbesondere für jedes $x \in G$ eine Teilfolge von $(f_n(x))$ gibt, die gegen ein $y \in \mathbb{C}$ konvergiert, lässt sich induktiv eine Teilfolge (f_{n_k}) von (f_n) konstruieren, so dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_{n_k}(x_m))_{k \in \mathbb{N}}$ gegen ein $y_m \in \mathbb{C}$ konvergiert; mehr noch: für alle $k \geq m$ gilt jeweils $|f_{n_k}(x_m) - y_m| \leq \frac{1}{k}$. Wir behaupten, dass diese Teilfolge (f_{n_k}) kompakt gleichmäßig gegen ein $f \in \mathcal{F}$ konvergiert.

Als "Kreiskette mit Anfangspunkt x_0 " bezeichnen wir eine endliche Folge von Kreisscheiben B_1, \dots, B_ℓ , so dass $x_0 \in B_1$ ist, und jeweils $\bar{B}_j \subset G$, $B_j \cap B_{j+1} \neq \emptyset$ und $B_j \cap B_{\tilde{j}} = \emptyset$ für $\tilde{j} \neq j, j+1$ gilt. Lemma 3.37 gilt offensichtlich *mutatis mutandis* für beliebige Kreisscheiben an Stelle von \mathbb{D} , und daher auch für Kreisketten mit Anfangspunkt x_0 . Wegen der Konstruktion der Teilfolge (f_{n_k}) gilt dabei die Aussage des Lemmas jeweils für diese feste Teilfolge, unabhängig von der Wahl der Kreiskette, d.h. auf jeder Kreiskette konvergiert (f_{n_k}) gleichmäßig gegen ein $f \in \mathcal{F}$.

Ist nun eine beliebige kompakte Teilmenge $K \subset G$ gegeben, so kann diese durch endlich viele Kreisketten mit Anfangspunkt x_0 überdeckt werden. Daher konvergiert (f_{n_k}) auch auf K gleichmäßig gegen ein $f \in \mathcal{F}$. \square

Die folgende Aussage ist eine Anwendung des Satzes von Koebe auf Riemannsche Flächen (statt auf Gebiete in \mathbb{C}):

3.38 Aussage. Sei X eine Riemannsche Fläche, und $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine "Ausschöpfung" von X durch offene, zusammenhängende Mengen U_n , d.h. es gilt

$$U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \dots \quad \text{und} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = X.$$

Weiter gebe es jeweils eine biholomorphe Abbildung f_n von U_n auf ein Gebiet $G_n \subset \mathbb{C}$. Dann gibt es auch eine biholomorphe Abbildung $f : X \rightarrow G$ auf ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $U_1 \neq \emptyset$. Wir fixieren einen Punkt $x_0 \in U_1$ und eine holomorphe Karte (\tilde{U}_1, z) von X mit $\tilde{U}_1 \subset U_1$ und $z(x_0) = 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es jeweils eindeutig bestimmte komplexe Zahlen $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, so dass für die biholomorphe Funktion

$$g_n(x) = a_n \cdot f_n(x) + b_n$$

gilt:

$$g_n(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dg_n}{dz}(x_0) = 1.$$

(Es gilt nämlich $\frac{df_n}{dz}(x_0) \neq 0$, und deshalb ist $a_n = \left(\frac{df_n}{dz}(x_0)\right)^{-1}$ und $b_n = -a_n \cdot f_n(x_0)$.)

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ fest. Wir betrachten für $n \geq 1$ die injektiven holomorphen Funktionen $h_n := g_{m+n} \circ g_m^{-1}$, die das Gebiet $V_m := g_m[U_m] \subset \mathbb{C}$ jeweils auf eine offene Teilmenge von \mathbb{C} abbilden. Offensichtlich gilt

$$0 \in V_m, \quad h_n(0) = 0 \quad \text{und} \quad h'_n(0) = 1.$$

Der Satz von Koebe (Satz 3.35) zeigt deshalb, dass es eine Teilfolge (h_{n_k}) der (h_n) gibt, die auf V_m kompakt gleichmäßig gegen eine injektive, holomorphe Funktion konvergiert. Wir setzen $\tilde{g}_n = g_n$ für $n \leq m$ und $\tilde{g}_n = h_{n-m}$ für $n > m$.

Wir schließen nun induktiv: Wir führen die Konstruktion des obigen Absatzes zunächst mit $m = 1$ aus, und ersetzen dann die Folge (g_n) durch (\tilde{g}_n) . So erhalten wir eine auf U_1 kompakt gleichmäßig konvergente Folge (g_n) . Nachdem die Konstruktion für $1, \dots, m-1$ durchgeführt wurde, führen wir sie für m durch, und ersetzen wieder (g_n) durch (\tilde{g}_n) , so dass wir Konvergenz von U_m haben. Induktiv erhalten wir eine Funktionenfolge (g_n) , die auf ganz $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} U_m = X$ gegen eine biholomorphe Abbildung f konvergiert. \square

Mit dem folgenden Satz beweisen wir schon die erste "Hälfte" des großen Riemannschen Abbildungssatzes:

3.39 Satz. Jede kompakte planare Riemannsche Fläche X ist biholomorph zur Riemannschen Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}}$.

Beweis. Wir wählen eine Koordinatenumgebung von X und darin eine zu \mathbb{D} biholomorphe, offene Teilmenge $D \subset X$. Wir identifizieren wieder D mit \mathbb{D} . Weiter wählen wir $a, b \in D$ mit $a \neq b$ und betrachten für (hinreichend großes) $n \in \mathbb{N}$ die offene, zusammenhängende Menge $U_n = X \setminus (B(a, \frac{1}{n}) \cup B(b, \frac{1}{n}))$. Damit gilt offenbar $U_1 \subset U_2 \subset \dots$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = X \setminus \{a, b\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert nach dem Annulus-Satz (Satz 3.30) eine biholomorphe Abbildung f_n von U_n auf ein Gebiet (nämlich einen Annulus) in \mathbb{C} . Nach Aussage 3.38 existiert daher eine injektive holomorphe Abbildung $f : X \setminus \{a, b\} \rightarrow \mathbb{C}$.

Wir zeigen, dass sich f in a bzw. b zu einer injektiven meromorphen Funktion $f : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ fortsetzen lässt: Ist f in der Nähe von a beschränkt, so lässt sich f nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz in a zu einer holomorphen Funktion fortsetzen. Ist f in der Nähe von a nicht beschränkt, so kann f bei a keine wesentliche Singularität haben: dies folgt aus dem Satz von Casorati-Weierstraß wegen der Injektivität von f . Also hat f bei a dann einen Pol. Wegen der Injektivität von f muss dieser Pol von erster Ordnung sein. Also lässt sich f durch $f(a) = \infty$ in a meromorph fortsetzen. Dieselben Argumente treffen natürlich auch auf b zu. So erhalten wir eine meromorphe Funktion $f : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Weil diese in einer Umgebung von a bzw. b alle Werte aus einem kleinen Ball um $f(a)$ bzw. $f(b)$ annimmt, ist die fortgesetzte Funktion f weiterhin

injektiv. Ihr Bild $f[X]$ ist einerseits nach dem Offenheitssatz offen in $\widehat{\mathbb{C}}$, andererseits mit X kompakt und deshalb abgeschlossen in $\widehat{\mathbb{C}}$. Also folgt $f[X] = \widehat{\mathbb{C}}$, und somit ist $f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ biholomorph. \square

Wir arbeiten jetzt nur noch am Riemannsches Abbildungssatz für nicht-kompakte, planare Riemannsche Flächen X .

3.40 Lemma. Sei X eine Riemannsche Fläche. Dann existiert eine Ausschöpfung $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von X durch offene Mengen O_n (d.h. es gilt $O_1 \subset O_2 \subset O_3 \subset \dots$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n = X$) mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) \bar{O}_n ist kompakt, und die Zusammenhangskomponenten von ∂O_n besitzen einen "Kragen", letzteres bedeutet: Für jede Zusammenhangskomponente B von ∂O_n gibt es einen Homöomorphismus, der eine Umgebung von B in O_n auf $S^1 \times (0, 1)$ und B auf $S^1 \times \{1\}$ abbildet.
- (b) ∂O_n besitzt in allen seinen Punkten eine Barriere.

Beweis. Wie schon im Beweis des Satzes 1.31 über die Zerlegung der Eins verwenden wir, dass es eine abzählbare, offene Überdeckung $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von X durch Kartenumgebungen U_n zu holomorphen Karten ϕ_n gibt, die so beschaffen sind, dass die Bilder $\phi_n[U_n] = B(0, r_n)$ Bälle von gewissen Radien $r_n > 0$ sind, dass aber umgekehrt schon $(\phi_n^{-1}[B(0, r_n/2)])_{n \in \mathbb{N}}$ ganz X überdeckt. Wir werden zeigen, dass mit einer geeigneten Folge $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Radien mit $0 < \frac{r_n}{2} \leq R_n < r_n$ die offenen Mengen

$$O_n = \bigcup_{k=1}^n \phi_k^{-1}[B(0, R_k)] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

die geforderten Eigenschaften erfüllt. Jedenfalls ist (O_n) offensichtlich eine Ausschöpfung von X und \bar{O}_n ist jeweils kompakt.

Um die Barrieren-Bedingung zu erfüllen, wählen wir die Radien R_n induktiv aus. Seien also die Radien R_1, \dots, R_n bereits gewählt. Wir wählen den Radius $R_{n+1} \in (\frac{r_{n+1}}{2}, r_{n+1})$ so aus, dass der Rand $\partial \phi_{n+1}^{-1}[\overline{B(0, R_{n+1})}]$ die Ränder der vorherigen Mengen $\partial \phi_1^{-1}[\overline{B(0, R_1)}], \dots, \partial \phi_n^{-1}[\overline{B(0, R_n)}]$ (bezüglich einer beliebigen Karte) transversal schneidet. Dies führt einerseits dazu, dass O_{n+1} die Bedingung aus Lemma 3.27 erfüllt, und deshalb in jedem Randpunkt eine Barriere besitzt. Andererseits folgt, dass jede Zusammenhangskomponente von ∂O_{n+1} einen Kragen besitzt.

Die Realteile der logarithmischen Koordinaten $\ln(\phi_{n+1})$ sind die Logarithmen der Abstände zu $\phi_{n+1}^{-1}(0) \in U_{n+1}$. Weil der Realteil einer holomorphen Funktion harmonisch ist, sind die Funktionen auf den Rändern der obigen Mengen reellanalytisch. Deshalb gibt es höchstens endliche viele kritische Werte von dieser reell analytischen Funktion auf $\partial \phi_1^{-1}[\overline{B(0, R_1)}], \dots, \partial \phi_n^{-1}[\overline{B(0, R_n)}]$, und damit auch ein $\frac{r_{n+1}}{2} \leq R_{n+1} < r_{n+1}$ mit den gewünschten Eigenschaften. \square

3.41 Satz. Sei X eine nicht-kompakte, planare Riemannsche Fläche. Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung von X auf eine offene Teilmenge von \mathbb{C} .

Beweis. Nach Lemma 3.40 gibt es eine Ausschöpfung (O_n) von X durch offene Mengen mit den dort genannten Eigenschaften. Wir zeigen, dass jedes O_n biholomorph zu einem Gebiet in \mathbb{C} ist. Nach Aussage 3.38 ist dann auch X selbst biholomorph zu einem Gebiet in \mathbb{C} .

Dabei können wir ohne Beschränkung annehmen, dass O_n einfach zusammenhängend ist. Weil \bar{O}_n kompakt ist, ist sein Rand ∂O_n homöomorph zu S^1 . Außerdem besitzt O_n einen Kragen $K \subset X$, dieser ist homöomorph zu $S^1 \times [0, 1)$, wobei $\partial O_n \subset K$ der Teilmenge $S^1 \times \{1\}$ entspricht. Nach dem Anulus-Satz in der Version von Korollar 3.33 existiert eine biholomorphe Abbildung g von K auf einen Anulus $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < R\}$ mit einem geeigneten $R > 1$. Dabei kann g so gewählt werden, dass $g[\partial O_n] = \partial \mathbb{D}$ ist. Weil O_n in jedem Randpunkt eine Barriere besitzt, ist nach Satz 3.26 das Dirichlet-Problem zu $u|_{\partial O_n} = \operatorname{Re}(g)|_{\partial O_n}$ lösbar, d.h. es existiert eine Funktion $u : \bar{O}_n \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $u|_{O_n}$ harmonisch ist und $u|_{\partial O_n} = \operatorname{Re}(g)|_{\partial O_n}$ gilt. Weil X planar ist, besitzt die geschlossene 1-Form $du + i * du$ eine Stammfunktion $f : \bar{O}_n \rightarrow \mathbb{C}$, und diese ist nach Aufgabe 3.32(c) holomorph. Dabei kann die Integrationskonstante für f so gewählt werden, dass f eine Fortsetzung von g ist, und deshalb $f[\partial O_n] = \partial \mathbb{D}$ ist. Die Funktion $|f|$ nimmt ihr Maximum auf ∂O_n an, also gilt $|f| \leq 1$. Auch wegen des Maximumprinzips ist $|f| < 1$ auf O_n . Somit bildet f das Gebiet O_n biholomorph auf ein Gebiet in $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ ab. \square

Der Riemannsche Abbildungssatz zählt in den Worten von Felix Klein zu den tiefsten und größten Erkenntnissen, die in der Mathematik je erwachsen sind. Jetzt ist es endlich soweit:

3.42 Theorem. Für eine Riemannsche Fläche X sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) Jede geschlossene, glatte 1-Form auf X ist exakt.
- (b) X ist entweder biholomorph zu $\hat{\mathbb{C}}$, oder zu \mathbb{C} , oder zu \mathbb{D} .
- (c) X ist einfach zusammenhängend.

Beweis. Zu (a) \implies (b). Eine Riemannsche Fläche X , die (a) erfüllt, ist insbesondere planar. Ist X kompakt, so ist X nach Satz 3.39 biholomorph zu $\hat{\mathbb{C}}$. Ist X nicht kompakt, so ist X nach Satz 3.41 biholomorph zu einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Ist $G \neq \mathbb{C}$, so ist nach dem "kleinen" Riemannschen Abbildungssatz (Theorem B.1) G und damit X biholomorph zu \mathbb{D} .

Zu (b) \implies (c). Da $\hat{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} und \mathbb{D} einfach zusammenhängend sind, ist auch jede Riemannsche Fläche, die zu einem dieser Gebiete biholomorph ist, einfach zusammenhängend.

Zu (c) \implies (a). Das ist ein Konsequenz von Korollar 2.16. \square

3.9 Der Uniformisierungssatz

Als direkte Folge des großen Riemannschen Abbildungssatzes erhalten wir nun auch eine ziemlich weitgehende Übersicht über alle (auch nicht einfach zusammenhängende) Riemannsche Flächen. Dies ist der sogenannte *Uniformisierungssatz*.

3.43 Theorem. (Uniformisierungssatz.) Jede Riemannsche Fläche X gehört zu einer der folgenden Klassen:

- (a) X ist biholomorph zur Riemannschen Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}}$.
- (b) Die universelle Überlagerung \tilde{X} von X ist biholomorph zu \mathbb{C} . In diesem Fall ist X selbst biholomorph zu einer der folgenden Riemannschen Flächen:

- (i) \mathbb{C}
 - (ii) \mathbb{C}^*
 - (iii) ein komplexer Torus \mathbb{C}/Γ , siehe Beispiele 1.22(c) und 2.8.
- (c) Die universelle Überlagerung \tilde{X} von X ist biholomorph zu \mathbb{D} . In diesem Fall ist X biholomorph zu einer Riemannschen Fläche \mathbb{D}/Γ , wobei Γ eine auf \mathbb{D} frei operierende Untergruppe der Automorphismengruppe

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\mathbb{D}) &= \left\{ z \mapsto e^{i\varphi} \cdot \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \mid \varphi \in \mathbb{R}, z_0 \in \mathbb{D} \right\} \\ &= \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{bz + a} \mid a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

ist.

Ein Wermutstropfen bleibt bei diesem schönen Ergebnis: Es ist leider nicht möglich, die auf \mathbb{D} frei operierenden Untergruppen Γ in ähnlicher Weise explizit anzugeben, wie wir das für die auf \mathbb{C} frei operierenden Untergruppen in Abschnitt 1.2 getan haben. Es ist aber nicht verwunderlich, dass dieser Fall kompliziert ist: alle kompakten, orientierbaren, zusammenhängenden, reell-2-dimensionale Flächen können als Riemannsche Flächen aufgefasst werden, und ist ihr Geschlecht ≥ 2 , so ist ihre universelle Überlagerung biholomorph zu \mathbb{D} . Alle diese Flächen gehen also aus dem Fall (c) des Uniformisierungssatzes hervor.

Beweis des Uniformisierungssatzes Theorem 3.43. Sei $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ die universelle Überlagerung der gegebenen Riemannschen Fläche X . Sie existiert nach Satz 2.14 und ist wegen Korollar 2.13 bis auf biholomorphe Äquivalenz eindeutig. Sei Γ die Gruppe der Decktransformationen von π ; sie ist eine Untergruppe der biholomorphen Abbildungen $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$, die nach Satz 2.10(a) auf \tilde{X} frei operiert. Die Überlagerung π ist nach Aufgabe 2.9(b) regulär. Deshalb ist nach Satz 2.10(c) die Riemannsche Fläche X biholomorph äquivalent zu \tilde{X}/Γ .

Die Riemannsche Fläche \tilde{X} ist wegen der Definition der universellen Überlagerung einfach zusammenhängend. Nach dem großen Riemannschen Abbildungssatz (Theorem 3.42) ist \tilde{X} entweder zu $\hat{\mathbb{C}}$, oder zu \mathbb{C} oder zu \mathbb{D} biholomorph äquivalent.

Ist \tilde{X} zu $\hat{\mathbb{C}}$ biholomorph äquivalent, so gilt $\Gamma = \{\text{id}_{\hat{\mathbb{C}}}\}$ nach Aussage 1.20. Also liegt der Fall (a) vor.

Ist \tilde{X} zu \mathbb{C} biholomorph äquivalent, so hat Γ eine der drei Formen (T), (Z), (E) aus Aussage 1.21. Diese drei Fällen jeweils sind komplexen Tori, der punktierten Ebene \mathbb{C}^* und der komplexen Ebene \mathbb{C} , und somit den Fällen (b)(iii), (b)(ii), (b)(i) aus dem Uniformisierungssatz.

Es bleibt der Fall, dass \tilde{X} zu \mathbb{D} biholomorph äquivalent ist. Nach Korollar B.3 ist die Automorphismengruppe von \mathbb{D} tatsächlich wie in (c) angegeben, und deshalb liegt nach dem zuvor gesagten der Fall (c) aus dem Uniformisierungssatz vor. \square

3.44 Beispiel. We have not seen any quotients of the last type yet. First, note that the Cayley transformation $z \mapsto -i \frac{z+1}{z-1}$ is a biholomorphism between \mathbb{D} and the upper half plane $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$. Then $\Gamma = \{z \mapsto z + n\}$ is a group of automorphisms of \mathbb{H} . Similar to Example 1.22(b), we see that the quotient \mathbb{H}/Γ is biholomorphic to $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, the punctured disc.

Chapter 4

Garben

Die primäre Literaturquelle für dieses Kapitel ist [Fo], Kapitel 2. Eine weitere gute Standard-Quelle, die allerdings die Garben-Sprache weniger verwendet, ist [FK], Chapter III.

4.1 Prägarben und Garben

The idea of a sheaf is to formalise the algebraic structure of functions of various types on a space. On one hand, the set of functions usually inherits the algebraic structure of the codomain, through pointwise operations. For example, two functions f, g from X to \mathbb{R} can be added pointwise to give a new function $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. This makes the set of real-valued functions into a real algebra (a ring with a real scaling operation).

But a function is not a monolith; it has local behaviour, it can be restricted to give a new function on a subset. This restriction behaviour can be more complicated than you might first think. Consider a function of compact support. If you restrict it to a subset outside its support, you get the zero function. This shows that restriction is not in general an injective operation. Conversely, consider the continuous function $\sin|z|^{-1}$ on \mathbb{C}^* . It has no continuous extension to \mathbb{C} , so the restriction of continuous functions from \mathbb{C} to \mathbb{C}^* is not surjective. When the functions inherit operations pointwise however, this structure is unaffected by restriction: for example, the restriction of a sum of functions is the sum of the restrictions. Hence restriction is a homomorphism of the algebraic structure.

In very abstract algebraic geometry, the ‘spaces’ are defined in strange ways such that it is not clear what functions even make sense. In that context, having what is essentially a description of the behaviour of functions is useful. For us, it is mainly an organisational tool. The functions on a space contain a lot of useful information about that space, and we want to extract that information in a systematic and algebraic manner.

4.1 Definition. Sei X ein topologischer Raum mit Topologie (System der offenen Mengen) \mathfrak{T} . Eine *Prägarbe* [presheaf] von abelschen Gruppen auf X ist ein Paar (\mathcal{F}, ρ) bestehend aus

- (a) einer Familie $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(U))_{U \in \mathfrak{T}}$ von abelschen Gruppen,

(b) einer Familie $\rho = (\rho_V^U)_{U,V \in \mathfrak{T}, V \subset U}$ von Gruppen-Homomorphismen

$$\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V) \quad \text{wenn immer } U, V \in \mathfrak{T} \text{ mit } V \subset U \text{ ist,}$$

so dass die folgenden Bedingungen gelten:

$$\begin{aligned} \rho_U^U &= \text{id}_{\mathcal{F}(U)} \quad \text{für jedes } U \in \mathfrak{T}, \\ \rho_W^V \circ \rho_V^U &= \rho_W^U \quad \text{für } U, V, W \in \mathfrak{T} \text{ mit } W \subset V \subset U. \end{aligned}$$

Meistens schreibt man nur \mathcal{F} statt (\mathcal{F}, ρ) . Die Homomorphismen ρ_V^U heißen *Einschränkungshomomorphismen* [restriction homomorphisms]. Für $f \in \mathcal{F}(U)$ schreibt man anstatt von $\rho_V^U(f)$ meistens $f|_V$. Die Elemente von $\mathcal{F}(U)$ werden manchmal *Schnitte* [sections] von \mathcal{F} genannt, die Elemente von $\mathcal{F}(X)$ *globale Schnitte* [global sections].

Entsprechend wie Prägarben von abelschen Gruppen kann man auch Prägarben von Mengen, Vektorräumen, Ringen usw. definieren.

4.2 Beispiele. (a) Sei X ein topologischer Raum mit Topologie \mathfrak{T} . Für $U \in \mathfrak{T}$ sei $\mathcal{C}(U)$ der Raum der stetigen Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, und für $U, V \in \mathfrak{T}$ mit $V \subset U$ sei

$$\rho_V^U : \mathcal{C}(U) \rightarrow \mathcal{C}(V), \quad f \mapsto f|_V.$$

Dann ist (\mathcal{C}, ρ) eine Prägarbe von Ringen (oder Vektorräumen) auf X .

(b) Sei X eine Riemannsche Fläche mit Topologie \mathfrak{T} . Für $U \in \mathfrak{T}$ sei $\mathcal{O}(U)$ bzw. $\mathcal{M}(U)$ der Raum der holomorphen bzw. meromorphen Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, und für $U, V \in \mathfrak{T}$ mit $V \subset U$ sei wieder $\rho_V^U : f \mapsto f|_V$. Dann sind (\mathcal{O}, ρ) und (\mathcal{M}, ρ) Prägarben von Ringen (genauer: von kommutativen Ringen mit Eins) auf X , genannt die *Garbe der holomorphen bzw. meromorphen Funktionen auf X* .*

(Vorsicht: \mathcal{M} ist *keine* Prägarbe von Körpern. Warum nicht?)

In analoger Weise kann man die Prägarbe \mathcal{E} der glatten Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ definieren.

This properties characterise the restriction of functions. Because we define functions by giving their value at every point, we expect that functions are completely determined by their local information, that is, their restrictions.

Wo es Prägarben gibt, gibt es bestimmt auch Garben. Die werden in der folgenden Definition eingeführt:

4.3 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Eine Prägarbe \mathcal{F} auf X heißt eine *Garbe* [sheaf], wenn für jede offene Menge $U \subset X$ und jede Familie $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Mengen in X mit $\bigcup_{i \in I} U_i = U$ die folgenden *Garbenaxiome* [sheaf axioms] erfüllt sind:

(GL) Sind $f, g \in \mathcal{F}(U)$ und gilt $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ für alle $i \in I$, so ist $f = g$.

*Der Buchstabe \mathcal{O} in der Bezeichnung der Garbe der holomorphen Funktionen steht vielleicht für den Namen des japanischen Mathematikers KIYOSHI OKA, der entscheidend zur Entwicklung der Kohomologietheorie für allgemeine komplexe Mannigfaltigkeiten beigetragen hat.

(LG) Sind $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ für alle $i \in I$ gegeben, und gilt

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \quad \text{für alle } i, j \in I, \quad (*)$$

so existiert ein $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$.

Das in Teil (LG) der Definition konstruierte f ist wegen Teil (GL) der Definition eindeutig bestimmt. Außerdem zeigen (GL) und (LG) (angewendet mit $U = \emptyset$ und $I = \emptyset$), dass $\mathcal{F}(\emptyset)$ aus genau einem Element besteht.

4.4 Beispiele. (a) Die Prägarben \mathcal{C} , \mathcal{O} , \mathcal{M} , \mathcal{E} aus Beispiel 4.2 sind offenbar sogar Garben.

(b) Sei X ein topologischer Raum und G eine abelsche Gruppe. Für $\emptyset \neq U \subset X$ offen sei $\mathcal{G}(U)$ die Menge der lokal konstanten Funktionen $f : U \rightarrow G$ (d.h. f ist auf jeder Zusammenhangskomponente von U konstant). Außerdem sei $\mathcal{G}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Für $U, V \subset X$ offen mit $\emptyset \neq V \subset U$ sei $\rho_V^U : \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{G}(V)$, $f \mapsto f|_V$ die übliche Restriktion; außerdem sei $\rho_\emptyset^U : \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{G}(V)$, $f \mapsto \emptyset$. Dann ist (\mathcal{G}, ρ) eine Garbe, die *lokal konstante Garbe* genannt und oft einfach mit G bezeichnet wird.

4.5 Aufgabe. Let X be a topological space and G an abelian group. For any open set $\emptyset \neq U \subset X$ let $\tilde{\mathcal{G}}(U)$ be the set of constant functions $f : U \rightarrow G$, also let $\tilde{\mathcal{G}}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Define the restriction operators ρ_V^U naturally. (Note the difference to Beispiel 4.4(b)!)

(a) Show that $(\tilde{\mathcal{G}}, \rho)$ is a presheaf.

(b) Discuss whether $(\tilde{\mathcal{G}}, \rho)$ is in fact a sheaf.

Das Prinzip, das hinter der Konstruktion der "Funktionengarben" \mathcal{C} , \mathcal{O} , \mathcal{M} , \mathcal{E} in den obigen Beispielen steht, wird in der folgenden Übungsaufgabe abstrakt herausgearbeitet:

4.6 Aufgabe. It becomes very tedious to check that whether or not something is a (pre-)sheaf or not. In this question we automate the proof for sheaves of functions. Suppose that X is a topological space and \mathcal{F} is defined by $\mathcal{F}(U) := \{f : U \rightarrow G \mid f \text{ has property } P\}$ for any open set $U \subset X$, where P is a property that can hold for functions $f : U \rightarrow G$. For example, 'f is continuous' and 'f is locally constant' are examples of such properties.

(a) Suppose that property P is *restrictable*. That means if $f : U \rightarrow G$ has property P and $V \subset U$ is open, then $f|_V$ also has the property P . Show that \mathcal{F} is a presheaf.

(b) Suppose further that property P is *local*. That means the following: Take any open set $U \subset X$ and a function $f : U \rightarrow G$. Then f has property P if P holds for all restrictions $f|_{U_i}$ for any open cover $\{U_i\}$ of U . Show that \mathcal{F} is a sheaf.

4.7 Aussage. Sei X ein topologischer Raum und (\mathcal{F}, ρ) eine Garbe von kommutativen Ringen mit Eins auf X . Für $U \subset X$ offen sei $\mathcal{F}^*(U)$ die (multiplikative) abelsche Gruppe der invertierbaren Elemente des kommutativen Rings $\mathcal{F}(U)$. Für $V \subset U \subset X$ offen und $f \in \mathcal{F}^*(U)$ ist $f|_V \in \mathcal{F}^*(V)$. Mit \mathcal{F}^* und dieser Restriktion wird eine Garbe von abelschen Gruppen auf X definiert, die *Garbe der invertierbaren Elemente von \mathcal{F}* .

4.8 Beispiel. Sei X eine Riemannsche Fläche, und \mathcal{O} die Garbe der holomorphen Funktionen auf X . Dann ist die Garbe \mathcal{O}^* der invertierbaren holomorphen Funktionen auf X gegeben durch

$$\mathcal{O}^*(U) = \{f \in \mathcal{O}(U) \mid f \text{ ist nullstellenfrei}\} \quad \text{für } U \subset X \text{ offen.}$$

Beweis von Aussage 4.7. Wir bezeichnen das Einselement (multiplikatives neutrales Element) des Rings $\mathcal{F}(U)$ mit 1_U . Sei $V \subset U \subset X$ offen. Weil die Restriktion $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ ein Homomorphismus von Ringen mit Eins ist, gilt $1_U|_V = 1_V$. Sei nun $f \in \mathcal{F}^*(U)$ gegeben. Nach Definition existiert also ein $g \in \mathcal{F}(U)$ mit $g \cdot f = 1_U$. Dann ist $g|_V \in \mathcal{F}(V)$ und es gilt

$$(g|_V) \cdot (f|_V) = (g \cdot f)|_V = 1_U|_V = 1_V.$$

Also ist $f|_V \in \mathcal{F}^*(V)$. Daher ist \mathcal{F}^* mit der durch ρ gegebenen Restriktion eine Prägarbe.

Für \mathcal{F}^* ist das Garbenaxiom (GL) offenbar erfüllt. Wir überprüfen, dass auch das Garbenaxiom (LG) gilt: Dazu seien offene Mengen $U, (U_i)_{i \in I}$ mit $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, sowie $f_i \in \mathcal{F}^*(U_i)$ gegeben, so dass die Bedingung (*) in (LG) gilt. Insbesondere gilt $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$. Wegen dem Garbenaxiom (LG) für \mathcal{F} existiert daher ein $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$. Es ist zu zeigen, dass $f \in \mathcal{F}^*(U)$ ist. Dazu: Weil f_i in $\mathcal{F}(U_i)$ invertierbar ist, existiert jeweils ein $g_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $g_i \cdot f_i = 1_{U_i}$. Für $i, j \in I$ gilt

$$\begin{aligned} (g_i)|_{U_i \cap U_j} \cdot (f_i)|_{U_i \cap U_j} &= (g_i \cdot f_i)|_{U_i \cap U_j} = 1_{U_i}|_{U_i \cap U_j} = 1_{U_i \cap U_j} = \dots = (g_j)|_{U_i \cap U_j} \cdot (f_j)|_{U_i \cap U_j} \\ &= (g_j)|_{U_i \cap U_j} \cdot (f_i)|_{U_i \cap U_j}. \end{aligned}$$

Weil $(f_i)|_{U_i \cap U_j} \in \mathcal{F}^*(U_i \cap U_j)$ ist, folgt $g_i|_{U_i \cap U_j} = g_j|_{U_i \cap U_j}$. Nach dem Garbenaxiom (LG) für \mathcal{F} existiert daher ein $g \in \mathcal{F}(U)$ mit $g|_{U_i} = g_i$. Für jedes $i \in I$ ist $(g \cdot f)|_{U_i} = g_i \cdot f_i = 1_{U_i} = (1_U)|_{U_i}$, woraus mit dem Garbenaxiom (GL) für \mathcal{F} folgt: $g \cdot f = 1_U$ und somit $f \in \mathcal{F}^*(U)$. \square

4.2 Homomorphismen von Garben

Zu algebraischen oder analytischen Strukturen gehören immer auch die passenden Homomorphismen. Hier führen wir die entsprechenden Homomorphismen für Prägarben und für Garben ein.

4.9 Definition. Sei X ein topologischer Raum, und \mathcal{F} und \mathcal{G} zwei (Prä-)Garben von abelschen Gruppen auf X . Dann ist ein *Homomorphismus von (Prä-)Garben* [(pre-)sheaf homomorphism] $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ eine Familie (f_U) von Gruppenhomomorphismen $f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ (wobei U die offenen Teilmengen von X durchläuft), so dass für alle offenen Teilmengen $V \subset U$ das folgende Diagramm jeweils kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{G}(V). \end{array}$$

Der Homomorphismus f heißt *Isomorphismus* [isomorphism], wenn alle f_U Isomorphismen sind.

Offenbar ist die Identität auf einer (Prä-)Garbe \mathcal{F} ein Isomorphismus von (Prä-)Garben.

In der folgenden Aufgabe werden der Kern $\ker(f)$ und das (Prägarben-)Bild $\operatorname{im}^P(f)$ von Prägarben-Homomorphismen $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ definiert. $\ker(f)$ und $\operatorname{im}^P(f)$ sind in jedem Fall Prägarben, und zwar Unter-Prägarben von \mathcal{F} bzw. \mathcal{G} . Man sagt, dass f *injektiv* [injective] bzw. *prägarben-surjektiv* [presheaf surjective] ist, wenn $\ker(f) = \{0\}$ bzw. $\operatorname{im}^P(f) = \mathcal{G}$ ist. f ist genau dann ein Prägarben-Isomorphismus, wenn f sowohl injektiv als auch prägarben-surjektiv sind.

Sind \mathcal{F} und \mathcal{G} sogar Garben, so ist der Prägarben-Homomorphismus $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Garben-Homomorphismus. In diesem Fall ist zwar stets $\ker(f)$ eine Garbe, aber $\operatorname{im}^P(f)$ ist im Allgemeinen immer noch *keine* Garbe, sondern nur eine Prägarbe (*Vorsicht!*). Man bezeichnet mit $\operatorname{im}(f)$ die kleinste Untergarbe von \mathcal{G} , die $\operatorname{im}^P(f)$ enthält. $\operatorname{im}(f)$ heißt die *Bildgarbe* [image sheaf] von f . Der Garben-Homomorphismus f heißt *garben-surjektiv* [sheaf surjective] oder kurz *surjektiv* [surjective], wenn $\operatorname{im}(f) = \mathcal{G}$ ist.

4.10 Beispiel. Sei X eine Riemannsche Fläche. Dann ist $\exp(2\pi i \cdot) : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*$ ein Homomorphismus von Garben, genauer gesagt ist dieser gegeben durch die Familie von Homomorphismen von Ringen mit Eins:

$$\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}^*(U), f \mapsto \exp(2\pi i f),$$

wobei $U \subset X$ alle offenen Teilmengen durchläuft. Der Kern dieses Garben-Homomorphismus besteht aus allen f , die nur ganzzahlige Werte annehmen (solche sind lokal konstant), also ist $\ker(\exp(2\pi i \cdot)) = \mathbb{Z}$ (gesehen als lokal-konstante Garbe \mathbb{Z}). Das Prägarben-Bild des Homomorphismus besteht aus allen Funktionen $g \in \mathcal{O}^*(U)$, die "einen Logarithmus besitzen", d.h. für die ein $f \in \mathcal{O}(U)$ mit $\exp(2\pi i f) = g$ existiert. Ist U nicht einfach zusammenhängend, so ist daher $\operatorname{im}^P(\exp(2\pi i \cdot))(U) \subsetneq \mathcal{O}^*(U)$. Hingegen ist die Bildgarbe $\operatorname{im}(\exp(2\pi i \cdot)) = \mathcal{O}^*$. Also ist $\exp(2\pi i \cdot)$ garben-surjektiv, aber nicht prägarben-surjektiv.

4.11 Aufgabe. In this question we explore morphisms of sheaves and how some constructions for abelian groups carry over. Let $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ be a morphism of sheaves on a topological space X . Define $\ker \varphi$ by

$$(\ker \varphi)(U) := \{f \in \mathcal{F}(U) \mid f \in \ker \varphi_U\}.$$

and $\operatorname{im}^P \varphi$ by

$$(\operatorname{im}^P \varphi)(U) := \{g \in \mathcal{G}(U) \mid g \in \operatorname{im} \varphi_U\}.$$

- Prove that both $\ker \varphi$ and $\operatorname{im}^P \varphi$ are presheaves on X .
- Show further that $\ker \varphi$ is a sheaf.
- However, use the example of $X = \mathbb{C}$, $\varphi = \exp : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*$ (ie, $f \mapsto \exp \circ f$), $U = \mathbb{C}^\times$, and $f(z) = z \in \mathcal{O}^*(U)$ to show that $\operatorname{im}^P \varphi$ is not a sheaf.
- Argue that since for any open set U , $f \in \mathcal{O}^*(U)$, and point $p \in U$ that there is a neighbourhood V of p where $f|_V$ has a logarithm, that \exp is in fact a surjective morphism of sheaves.

4.12 Definition. Seien \mathcal{F} , \mathcal{G} , \mathcal{H} Exemplare einer algebraischen Struktur (also beispielsweise Gruppen, Ringe, ... oder auch Prägarben oder Garben), und $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ und $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ entsprechende Homomorphismen. Man nennt

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

eine *exakte Sequenz* [exact sequence], wenn das Bild von φ gleich dem Kern von ψ ist. Im Fall von Garben-Homomorphismen ist mit dem Bild von φ die Bildgarbe gemeint. Längere Sequenzen von Homomorphismen nennt man entsprechend exakt, wenn sie an jeder Stelle exakt sind.

Eine exakte Sequenz der Form

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

heißt *kurze exakte Sequenz* [short exact sequence], dabei ist mit dem linken Pfeil die Abbildung $0 \mapsto 0_{\mathcal{F}}$ und mit dem rechten Pfeil die Abbildung auf \mathcal{H} , die identisch Null ist, gemeint.

4.13 Aufgabe. Let A , B , and C be abelian groups. Suppose that there exist homomorphisms ϕ and ψ such that

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \rightarrow 0$$

is an exact sequence. State what properties ϕ and ψ must have for this sequence to be exact. What is the relationship between the groups A , B , and C ?

4.14 Beispiele. Sei X eine Riemannsche Fläche.

(a) Das folgende ist eine kurze exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp(2\pi i \cdot)} \mathcal{O}^* \rightarrow 1.$$

(b) Wir bezeichnen mit Ω^1 bzw. Ω^2 die Garbe der holomorphen 1-Formen vom Typ $(1,0)$ bzw. die Garbe der holomorphen 2-Formen auf X . Dann ist die folgende Sequenz exakt:

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \rightarrow 0.$$

(c) Sei $\mathcal{E}^{(0,1)}$ die Garbe der glatten 1-Formen vom Typ $(0,1)$ auf X . Wir werden später mit Hilfe des Dolbeault'schen Lemmas sehen, dass die kurze Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{(0,1)} \rightarrow 0$$

exakt ist. Ebenso ist eine exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow \bar{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d'} \mathcal{E}^{(1,0)} \rightarrow 0.$$

4.15 Aufgabe. Suppose $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \rightarrow 0$ is a short exact sequence of sheaves on the topological space X .

(a) Show that for every open set $U \subset X$, the sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}(U)$$

is exact.

(b) Illustrate by an example that $\psi : \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)$ does not need to be surjective.

4.3 Garbenvkohomologie

Kohomologie ist ein sehr abstraktes mathematisches Konzept zur Konstruktion von Folgen von abelschen Gruppen zu topologischen Räumen, das ursprünglich der algebraischen Geometrie entstammt, und heute in vielen verschiedenen Bereichen eine wichtige Rolle spielt. Hier interessieren wir uns vor allem für die sogenannte Čech-Kohomologie zu einer Garbe \mathcal{F} von abelschen Gruppen auf einem beliebigen topologischen Raum X , und zwar wollen wir in diesem Abschnitt vor allem (nur) die erste Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{F})$ definieren. Diese Kohomologiegruppen werden für unsere Untersuchung von Riemannschen Flächen X eine ganz wesentliche Rolle spielen.

Wir definieren diese Kohomologiegruppe und verwandte Objekte zunächst in einer "groben" Version, die von der Wahl einer offenen Überdeckung von X abhängen. Indem wir immer feinere und feinere offene Überdeckung betrachten, werden wir dann durch eine Art Grenzwert die eigentliche Kohomologiegruppe erhalten, die dann nicht mehr von der Überdeckung abhängt.

4.16 Definition. Sei X ein topologischer Raum, und \mathcal{F} eine Garbe von abelschen Gruppen auf X . Wir fixieren eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X .

- (a) Sei $q \in \mathbb{N}$. Eine q -Kokette [q -cochain] von \mathcal{F} bezüglich \mathfrak{U} ist eine Familie $(f_{i_0, \dots, i_q})_{(i_0, \dots, i_q) \in I^{q+1}}$, so dass

$$f_{i_0, \dots, i_q} \in \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}) \quad \text{für alle } (i_0, \dots, i_q) \in I^{q+1}$$

gilt. Die Menge $C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ der q -Koketten von \mathcal{F} bezüglich \mathfrak{U} ist eine abelsche Gruppe, wobei die Addition von q -Koketten komponentenweise definiert ist. $C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ heißt die q -te Kokettengruppe [q -th cochain group] von \mathcal{F} bezüglich \mathfrak{U} .

- (b) Für $q \in \{0, 1\}$ definieren wir Korand-Operatoren[†] [coboundary operators] $\delta^q : C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ wie folgt:

- (i) Wir definieren

$$\delta^0 : C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

für $(f_i)_{i \in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ durch $\delta^0((f_i)) = (g_{ij})_{i, j \in I} \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ mit

$$g_{ij} = f_i - f_j \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \quad \text{für } i, j \in I .$$

Ausdrücke wie $f_i - f_j$ sind dabei hier und im Folgenden so zu verstehen, dass f_i und f_j auf den gemeinsamen Definitionsbereich $U_i \cap U_j$ eingeschränkt wird, bevor die Differenz gebildet wird.

- (ii) Wir definieren

$$\delta^1 : C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

für $(f_{ij})_{i, j \in I} \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ durch $\delta^1((f_{ij})) = (g_{ijk})_{i, j, k \in I} \in C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ mit

$$g_{ijk} = f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j \cap U_k) \quad \text{für } i, j \in I .$$

[†]Übrigens: Dass die von uns betrachtete Struktur als Kohomologie bezeichnet wird, korrespondiert zur "Richtung" dieser Operatoren δ . Bei einem entsprechenden Homologie-Funktor würde man Rand-Operatoren $\delta : C_q \rightarrow C_{q-1}$ betrachten.

Die Korand-Operatoren δ^q sind offensichtlich Homomorphismen von abelschen Gruppen. Es gilt $\delta^1 \circ \delta^0 = 0$.

4.17 Beispiel. Sei $(f_i)_{i \in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Dann gilt $\delta^0((f_i)) = 0$ genau dann, wenn $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ für alle $i, j \in I$ ist. Wegen dem Garbenaxiom (LG) ist das genau dann der Fall, wenn sich die f_i zu einem globalen Schnitt $f \in \mathcal{F}(X)$ zusammensetzen, d.h. so dass $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$ gilt.

Die Elemente von

$$Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \ker(\delta^1) \subset C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

heißen *(1-)Kozykel* [1-cocycles]. Das bedeutet, dass eine Kokette $(f_{ij})_{i,j \in I} \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ genau dann ein Kozykel ist, wenn er die sogenannte *Kozykelbedingung* [cocycle relation]

$$f_{ik} = f_{ij} + f_{jk} \quad \text{jeweils auf } U_i \cap U_j \cap U_k \quad \text{für } i, j, k \in I \quad (\text{KZB})$$

erfüllt. Sie impliziert (Übungsaufgabe: warum?)

$$f_{ii} = 0 \quad \text{und} \quad f_{ji} = -f_{ij} \quad \text{für } i, j \in I .$$

Die Elemente von

$$B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \text{im}(\delta^0) \subset C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

heißen *(1-)Koränder* [1-coboundaries]. Ein $(f_{ij})_{i,j \in I} \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ ist also genau dann ein Korand (man sagt auch: (f_{ij}) *spaltet* [splits]), wenn es eine 0-Kokette $(g_i)_{i \in I}$ gibt, so dass

$$f_{ij} = g_i - g_j \quad \text{jeweils auf } U_i \cap U_j \quad \text{für } i, j \in I$$

gilt.

4.18 Aufgabe. Show $B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, i.e. that every coboundary is a cocycle.

4.19 Definition. Die Quotientengruppe

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) / B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

heißt *(erste) Kohomologiegruppe* [(1st) cohomology group] mit Koeffizienten in \mathcal{F} bezüglich der Überlagerung \mathfrak{U} . Die Elemente von $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ heißen *Kohomologieklassen* [cohomology classes]. Zwei Kozykel in $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ heißen *kohomolog* [cohomologous], wenn sie zur selben Kohomologieklass in $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ gehören; dies ist also genau dann der Fall, wenn ihre Differenz ein Korand in $B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ ist.

In der folgenden Aussage und der anschließenden Übungsaufgabe wenden wir die bisher definierten Begriffe in konkreten Situationen an.

4.20 Aussage. Sei X eine Riemannsche Fläche, \mathcal{E} die Garbe der glatten Funktionen auf X , und $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Dann gilt $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E}) = 0$.

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E}) = B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$, d.h. also, dass es zu jedem Kozykel $(f_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$ ein $(g_i)_{i \in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$ gibt, so dass $f_{ij} = g_i - g_j$ für alle $i, j \in I$ gilt.

Um die g_i zu konstruieren, verwenden wir, dass nach Satz 1.31 eine Zerlegung der Eins $(\psi_i)_{i \in I}$ zu \mathfrak{U} existiert. Für $i, k \in I$ ist die glatte Funktion $\psi_k f_{ik}$ zunächst auf $U_i \cap U_k$ definiert. Weil der Träger von ψ_k in U_k enthalten ist, lässt sich diese Funktion aber durch Null glatt auf ganz U_i fortsetzen; auf diese Weise fassen wir $\psi_k f_{ik}$ als Element von $\mathcal{E}(U_i)$ auf. Wir definieren nun

$$g_i = \sum_{k \in I} \psi_k f_{ik}.$$

Wegen der lokalen Endlichkeit der Zerlegung der Eins wird hierdurch ein Element $g_i \in \mathcal{E}(U_i)$ definiert, d.h. wir erhalten $(g_i)_{i \in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$. Nun gilt für $i, j \in I$ jeweils auf $U_i \cap U_j$:

$$g_i - g_j = \sum_{k \in I} \psi_k f_{ik} - \sum_{k \in I} \psi_k f_{jk} = \sum_{k \in I} \psi_k (f_{ik} - f_{jk}) \stackrel{\text{(KZB)}}{=} \sum_{k \in I} \psi_k f_{ij} = f_{ij}.$$

Damit ist $(f_{ij}) = \delta^0((g_i)) \in B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$. □

4.21 Aufgabe. Suppose that X is a simply connected Riemann surface and \mathfrak{U} an open covering of X . Show the following:

(a) $H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C}) = 0$.

[Hint. Due to Aussage 4.20 one has $Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C}) \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E}) = B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$.]

(b) $H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = 0$.

[Hint. For $(a_{jk}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$, consider $\exp(2\pi i a_{jk})$ and use (a).]

Here \mathbb{C} resp. \mathbb{Z} denotes the sheaf of locally constant functions on X with values in the complex numbers resp. in the integers, see Beispiel 4.4(b).

Die Gruppe $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ hängt von der Wahl der Überdeckung \mathfrak{U} ab. Von dieser Abhängigkeit wollen wir uns nun befreien, um eine Version $H^1(X, \mathcal{F})$ der Kohomologiegruppe zu erhalten, die nur noch vom topologischen Raum X und der Garbe \mathcal{F} abhängt.

Dazu untersuchen wir im Folgenden das Verhalten der Gruppe $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, wenn wir die Überdeckung \mathfrak{U} verfeinern. Dabei heißt eine offene Überdeckung $\mathfrak{V} = (V_k)_{k \in K}$ von X *feiner* als eine andere offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X , wenn es zu jedem $k \in K$ ein $i \in I$ mit $V_k \subset U_i$ gibt. Ist dies der Fall, so schreiben wir auch $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$. Das bedeutet also, dass es eine *Verfeinerungsabbildung* [refining mapping] $\tau : K \rightarrow I$ gibt, so dass $V_k \subset U_{\tau(k)}$ für alle $k \in K$ gilt.

4.22 Aussage. Sei X ein topologischer Raum, \mathcal{F} eine Garbe von abelschen Gruppen auf X , und $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ und $\mathfrak{V} = (V_k)_{k \in K}$ zwei offene Überdeckungen von X mit $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$.

(a) Sei $\tau : K \rightarrow I$ eine Verfeinerungsabbildung, d.h. es gelte $V_k \subset U_{\tau(k)}$ für alle $k \in K$. Für $(f_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ definieren wir $\theta_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}((f_{ij})) = (\tilde{f}_{k\ell})_{k,\ell \in K}$ mit

$$\tilde{f}_{k\ell} = f_{\tau(k), \tau(\ell)}|_{V_k \cap V_\ell} \quad \text{für } k, \ell \in K.$$

Die so definierte Abbildung $\theta_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}}$ bildet Kozykel bezüglich \mathfrak{U} auf Kozykel bezüglich \mathfrak{W} und Koränder bezüglich \mathfrak{U} auf Koränder bezüglich \mathfrak{W} ab. Sie induziert daher einen Gruppen-Homomorphismus

$$\theta_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{F}).$$

- (b) Die in (a) konstruierte Abbildung $\theta_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$ ist unabhängig von der Wahl der Verfeinerungsabbildung τ .
- (c) Die Abbildung $\theta_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$ ist injektiv.
- (d) Ist \mathfrak{W} eine weitere offene Überdeckung von X mit $\mathfrak{W} < \mathfrak{V} < \mathfrak{U}$, so gilt

$$\theta_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}} = \theta_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{V}} \circ \theta_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}.$$

Beweis. Für (a). Die Kozykelbedingung (KZB) wird durch die Einschränkung auf $V_k \cap V_\ell$ offenbar jeweils erhalten, deshalb bildet $\theta_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}}$ Kozykel in $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ auf Kozykel in $Z^1(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$ ab. Ist $(f_{ij})_{i,j \in I} \in B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ ein Korand bezüglich \mathfrak{U} , so gibt es per Definition ein $(g_i)_{i \in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ mit $f_{ij} = g_i - g_j$ für $i, j \in I$. Mit $\tilde{g}_k = g_{\tau(k)}|_{V_k}$ ist dann $(\tilde{g}_k)_{k \in K} \in C^0(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$, und für $k, \ell \in K$ ist

$$\tilde{g}_k - \tilde{g}_\ell = (g_{\tau(k)} - g_{\tau(\ell)})|_{V_k \cap V_\ell} = f_{\tau(k), \tau(\ell)}|_{V_k \cap V_\ell} = \tilde{f}_{k\ell}.$$

Also ist $(\tilde{f}_{k\ell}) \in B^1(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$.

Für (b). Seien $\tau, \hat{\tau} : K \rightarrow I$ zwei Verfeinerungsabbildungen zu $\mathfrak{W} < \mathfrak{U}$, d.h. für $k \in K$ gilt $V_k \subset U_{\tau(k)}, U_{\hat{\tau}(k)}$. Sei $(f_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ gegeben, und wir definieren $(\tilde{f}_{k\ell})_{k,\ell \in K}, (\hat{f}_{k\ell})_{k,\ell \in K} \in Z^1(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$ durch

$$\tilde{f}_{k\ell} = f_{\tau(k), \tau(\ell)}|_{V_k \cap V_\ell} \quad \text{bzw.} \quad \hat{f}_{k\ell} = f_{\hat{\tau}(k), \hat{\tau}(\ell)}|_{V_k \cap V_\ell} \quad \text{für } k, \ell \in K.$$

Wir haben zu zeigen, dass diese beiden Kozykel zueinander kohomolog sind, also zum selben Element von $H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$ gehören. Für $k \in K$ gilt $V_k \subset U_{\tau(k)} \cap U_{\hat{\tau}(k)}$ und deshalb können wir $(h_k)_{k \in K} \in C^0(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$ durch

$$h_k = f_{\tau(k), \hat{\tau}(k)}|_{V_k} \quad \text{für } k \in K$$

definieren. Dann gilt für $k, \ell \in K$ auf $V_k \cap V_\ell$ aufgrund der Kozykelbedingung (KZB)

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{k\ell} - \hat{f}_{k\ell} &= f_{\tau(k), \tau(\ell)} - f_{\hat{\tau}(k), \hat{\tau}(\ell)} = f_{\tau(k), \tau(\ell)} + f_{\tau(\ell), \hat{\tau}(k)} - f_{\tau(\ell), \hat{\tau}(k)} - f_{\hat{\tau}(k), \hat{\tau}(\ell)} \\ &\stackrel{\text{(KZB)}}{=} f_{\tau(k), \hat{\tau}(k)} - f_{\tau(\ell), \hat{\tau}(\ell)} = h_k - h_\ell. \end{aligned}$$

Somit ist $(\tilde{f}_{k\ell} - \hat{f}_{k\ell})_{k,\ell} = \delta^0((h_k)_k) \in B^1(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$.

Für (c). Wir haben zu zeigen, dass der Kern des Homomorphismus $\theta_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}}$ trivial ist. Dazu sei $(f_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ gegeben, so dass $(\tilde{f}_{k\ell})_{k,\ell \in K} \in B^1(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$ ist. In dieser Situation ist zu zeigen, dass $(f_{ij})_{i,j \in I} \in B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ ist.

Wegen der Voraussetzung $(\tilde{f}_{k\ell})_{k,\ell \in K} \in B^1(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$ existiert $(g_k)_{k \in K} \in C^0(\mathfrak{W}, \mathcal{F})$ mit $\tilde{f}_{k\ell} = g_k - g_\ell$ für $k, \ell \in K$. Sei $i \in I$. Dann gilt für beliebige $k, \ell \in K$ auf $U_i \cap V_k \cap V_\ell$:

$$g_k - g_\ell = \tilde{f}_{k\ell} = f_{\tau(k), \tau(\ell)} \stackrel{\text{(KZB)}}{=} f_{\tau(k), i} + f_{i, \tau(\ell)} = f_{i, \tau(\ell)} - f_{i, \tau(k)}$$

und somit

$$f_{i, \tau(k)} + g_k = f_{i, \tau(\ell)} + g_\ell.$$

Wegen dem Garbenaxiom (LG), angewendet auf der offenen Menge $U_i = \bigcup_{k \in K} (U_i \cap V_k)$ existiert daher ein $h_i \in \mathcal{F}(U_i)$, mit

$$h_i|_{U_i \cap V_k} = f_{i,\tau(k)} + g_k \quad \text{für alle } k \in K.$$

Hierdurch wird $(h_i)_{i \in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ definiert. Sei nun $i, j \in I$ gegeben. Dann gilt für alle $k \in K$ auf $(U_i \cap U_j) \cap V_k$:

$$h_i - h_j = (f_{i,\tau(k)} + g_k) - (f_{j,\tau(k)} + g_k) = f_{i,\tau(k)} - f_{j,\tau(k)} \stackrel{\text{(KZB)}}{=} f_{ij}.$$

Wegen dem Garbenaxiom (GL) folgt, dass $h_i - h_j = f_{ij}$ auf ganz $U_i \cap U_j$ gilt. Somit ist $(f_{ij}) = \delta^0((h_i)) \in B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

Für (d). Sei τ_1 bzw. τ_2 eine Verfeinerungsabbildung zu $\mathfrak{W} < \mathfrak{V}$ bzw. zu $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$. Dann ist $\tau_2 \circ \tau_1$ eine Verfeinerungsabbildung zu $\mathfrak{W} < \mathfrak{U}$. Wegen (b) können wir diese Verfeinerungsabbildungen zur Definition der Abbildungen θ_*^* verwenden, und dann ist die behauptete Gleichung nach der Definition aus (a) offensichtlich. \square

Nach dieser Vorarbeit können wir die Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{F})$ als "induktiver Grenzwert" der Gruppen $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ definieren, wobei \mathfrak{U} alle offenen Überdeckungen von X durchläuft. Dafür definieren wir auf der disjunkten Vereinigung

$$\dot{\bigcup}_{\mathfrak{U}} H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

(\mathfrak{U} durchläuft auch hier alle offenen Überdeckungen von X) eine Äquivalenzrelation \sim : Zwei Kohomologieklassen $\xi \in H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ und $\eta \in H^1(\mathfrak{U}', \mathcal{F})$ sollen äquivalent sein ($\xi \sim \eta$), wenn es eine gemeinsame Verfeinerung \mathfrak{V} von \mathfrak{U} und \mathfrak{U}' (d.h. eine offene Überdeckung \mathfrak{V} von X mit $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}'$) gibt, so dass $\theta_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}(\xi) = \theta_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}'}(\eta) \in H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ gilt. Dann definieren wir die erste Kohomologiegruppe von X mit Koeffizienten in \mathcal{F} als

$$H^1(X, \mathcal{F}) = \left(\dot{\bigcup}_{\mathfrak{U}} H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \right) / \sim.$$

Die Addition von $H^1(X, \mathcal{F})$ wird "repräsentantenweise" definiert, genauer gesagt: Seien $x, y \in H^1(X, \mathcal{F})$ gegeben. Dann wählen wir Repräsentanten $\xi \in H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ von x bzw. $\eta \in H^1(\mathfrak{U}', \mathcal{F})$ von y . Weiter wählen wir eine gemeinsame Verfeinerung \mathfrak{V} der offenen Überdeckungen \mathfrak{U} und \mathfrak{U}' . Wir definieren dann $x + y \in H^1(X, \mathcal{F})$ als die \sim -Äquivalenzklasse von $\theta_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}(\xi) + \theta_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}'}(\eta) \in H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$. Man sieht leicht, dass diese Definition von den getroffenen Wahlen unabhängig ist, und dass hierdurch $H^1(X, \mathcal{F})$ eine abelsche Gruppe wird.

Wenn die Garbe \mathcal{F} zusätzliche Struktur besitzt, es sich also beispielsweise um eine Garbe von Ringen, Vektorräumen, ... handelt, so erhalten in entsprechender Weise auch die Kohomologiegruppen $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ und dann auch $H^1(X, \mathcal{F})$ die entsprechende Struktur, werden also zu Ringen, Vektorräumen, ...

Indem jedem Element von $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ die entsprechende Äquivalenzklasse in $H^1(X, \mathcal{F})$ zugeordnet wird, erhalten wir eine Abbildung

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}).$$

Diese ist wegen Aussage 4.22 injektiv. Daraus folgt sofort die folgende Aussage:

4.23 Aussage. Sei X ein topologischer Raum und \mathcal{F} eine Garbe von abelschen Gruppen auf X . Dann gilt $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ genau dann, wenn $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ für jede offene Überdeckung \mathfrak{U} von X ist.

Durch Kombination dieser Aussage mit Aussage 4.20 und Aufgabe 4.21 ergibt sich ohne Weiteres:

4.24 Aussage. Sei X eine Riemannsche Fläche, und \mathcal{E} die Garbe der glatten Funktionen auf X .

(a) Es gilt $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$.

(b) Wenn X einfach zusammenhängend ist, so gilt $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$ und $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$.

Zum Abschluss des Abschnitts definieren wir noch "nullte" Kozykel, Koränder und Kohomologieklassen, hauptsächlich um spätere Notationen zu vereinheitlichen: Für eine offene Überdeckung \mathfrak{U} des topologischen Raums X definieren wir:

$$\begin{aligned} Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) &:= \ker(\delta^0 : C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})) \\ B^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) &:= 0 \\ H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) &:= Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) / B^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Nach Definition ist eine 0-Kokette $(f_i)_{i \in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ also genau dann ein 0-Kozykel, wenn jeweils $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ für $i, j \in I$ gilt. Nach dem Garbenaxiom (LG) bedeutet das, dass sich die f_i zu einem globalen Schnitt $f \in \mathcal{F}(X)$ zusammensetzen. Deshalb gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X).$$

Die Kohomologiegruppen $H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ sind also von der Wahl der Überdeckung \mathfrak{U} unabhängig. Deshalb können wir einfach definieren:

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X).$$

4.4 Der Satz von Leray

Die Konstruktion der Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{F})$ aus dem vorherigen Abschnitt ist kompliziert, vor allem weil wir einen induktiven Grenzwert über alle offenen Überdeckungen des topologischen Raums X betrachten mussten. Der folgende Satz von Leray zeigt, dass es in bestimmten Fällen leichter geht, dass man nämlich $H^1(X, \mathcal{F})$ mittels einer einzigen, "speziell gewählten" Überdeckung berechnen kann. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung von Aussage 4.23.

4.25 Satz. (Leray) Sei X ein topologischer Raum und \mathcal{F} eine Garbe abelscher Gruppen auf X . Sei weiter $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X , so dass

$$H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{für alle } i \in I$$

gilt. Dann ist

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

Eine derartige offene Überdeckung \mathfrak{U} heißt *Leray-Überdeckung* [Leray covering] (erster Ordnung) für die Garbe \mathcal{F} .

Die folgende Aussage ist ein Beispiel für eine Anwendung des Satz von Leray:

4.26 Aussage. $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Beweis. Sei $U_1 = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+$ und $U_2 = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$. Dann ist $\mathfrak{U} = (U_1, U_2)$ eine offene Überdeckung von \mathbb{C}^* . Die U_i sind sternförmig, und deshalb einfach zusammenhängend. Nach Aussage 4.24(b) gilt deshalb $H^1(U_i, \mathbb{Z}) = 0$. Also ist \mathfrak{U} eine Leray-Überdeckung für $(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z})$. Nach dem Satz von Leray ist somit $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) \cong H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$.

Jeder Kozykel $(f_{ij})_{i,j=1,2} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$ erfüllt wegen der Kozykelbedingung $f_{11} = f_{22} = 0$ und $f_{21} = -f_{12}$, ist also durch $f_{12} \in \mathbb{Z}(U_1 \cap U_2)$ eindeutig bestimmt. Somit gilt $Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}(U_1 \cap U_2)$. Der Schnitt $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ hat zwei Zusammenhangskomponenten (nämlich $\{\text{Im}(z) > 0\}$ und $\{\text{Im}(z) < 0\}$); in diesem Sinn ist $\mathbb{Z}(U_1 \cap U_2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Andererseits sind die U_i selbst zusammenhängend, und deshalb ist $C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Bezüglich dieser Isomorphismen wird der Randoperator $\delta^0 : C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \rightarrow B^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$ durch

$$\delta^0 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (b_1, b_2) \mapsto (b_2 - b_1, b_2 - b_1)$$

gegeben. Somit ist ein Element $(a_1, a_2) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ genau dann ein Korand, wenn $a_1 = a_2$ ist, d.h. $B^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$ ist isomorph zu $\Delta := \{(a, a) \mid a \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Somit ist $H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$ isomorph zu $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\Delta \cong \mathbb{Z}$. \square

4.27 Aufgabe. Show $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$.

Beweis des Satzes von Leray 4.25. Sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine Leray-Überdeckung für \mathcal{F} . Es genügt zu zeigen, dass für jede feinere Überdeckung $\mathfrak{V} = (V_k)_{k \in K} < \mathfrak{U}$ von X die Abbildung $\theta_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ aus Aussage 4.22 ein Isomorphismus ist. Weil $\theta_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}$ nach Aussage 4.22(c) in jedem Fall injektiv ist, bleibt nur die Surjektivität zu zeigen.

Dafür sei ein $(f_{k\ell}) \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ vorgegeben. Wir haben zu zeigen, dass $(f_{k\ell})$ kohomolog zu einem Kozykel im Bild von $\theta_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}$ ist, das bedeutet wegen der Definition von $\theta_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}$, dass es einen Kozykel $(F_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ gibt, so dass

$$(F_{\tau(k), \tau(\ell)}) - (f_{k\ell}) \in B^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \quad (\diamond)$$

ist, wobei $\tau : K \rightarrow I$ eine Verfeinerungsabbildung ist (d.h. jeweils $V_k \subset U_{\tau(k)}$ gilt).

Sei $i \in I$ fest. Dann ist $(U_i \cap V_k)_{k \in K}$ eine offene Überdeckung von U_i , die wir kurz mit $U_i \cap \mathfrak{V}$ bezeichnen. Nach Voraussetzung ist $H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$ und deshalb auch $H^1(U_i \cap \mathfrak{V}, \mathcal{F}) = 0$ nach Aussage 4.23. Also ist $(f_{k\ell}|_{U_i \cap V_k \cap V_\ell})_{k, \ell \in K} \in Z^1(U_i \cap \mathfrak{V}, \mathcal{F}) = B^1(U_i \cap \mathfrak{V}, \mathcal{F})$, d.h. es existieren Elemente $g_{i,k} \in \mathcal{F}(U_i \cap V_k)$ mit

$$f_{k\ell}|_{U_i \cap V_k \cap V_\ell} = g_{i,k} - g_{i,\ell} \quad \text{für } k, \ell \in K.$$

Sind nun $i, j \in I$ gegeben, so gilt für $k, \ell \in K$ auf $(U_i \cap U_j) \cap V_k \cap V_\ell$

$$g_{i,k} - g_{i,\ell} = f_{k\ell}|_{U_i \cap U_j \cap V_k \cap V_\ell} = g_{j,k} - g_{j,\ell}$$

und somit

$$g_{j,\ell} - g_{i,\ell} = g_{j,k} - g_{i,k}.$$

Wegen des Garbenaxioms (LG) (angewendet für die Überdeckung $(U_i \cap U_j) \cap \mathfrak{V}$ von $U_i \cap U_j$) existiert daher ein Schnitt $F_{i,j} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$, so dass für alle $k \in K$ gilt:

$$F_{i,j} = g_{j,k} - g_{i,k} \quad \text{auf } (U_i \cap U_j) \cap V_k.$$

Diese Gleichung zeigt auch, dass (F_{ij}) die Kozykel-Bedingung erfüllt, und deshalb gilt $(F_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

Wir zeigen nun, dass mit dieser Wahl von (F_{ij}) die Bedingung (\diamond) erfüllt ist. Dazu setzen wir $h_k = g_{\tau(k),k}|_{V_k} \in \mathcal{F}(V_k)$ für $k \in K$. Dann gilt für $k, \ell \in K$ auf $V_k \cap V_\ell$

$$F_{\tau(k),\tau(\ell)} - f_{k\ell} = (g_{\tau(\ell),k} - g_{\tau(k),k}) - (g_{\tau(\ell),k} - g_{\tau(\ell),\ell}) = g_{\tau(\ell),\ell} - g_{\tau(k),k} = h_\ell - h_k$$

und somit $(F_{\tau(k),\tau(\ell)} - f_{k,\ell})_{k,\ell \in K} = \delta^0((h_k)_{k \in K}) \in B^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$. \square

4.5 Linienbündel auf Riemannschen Flächen

Ein Linienbündel auf einer Riemannschen Fläche X ist eine "Zuordnung", die jedem Punkt $x \in X$ eine "Linie", d.h. einen komplex-1-dimensionalen Vektorraum E_x zuordnet. Wir wollen fordern, dass die Zuordnung $x \mapsto E_x$ in einem noch zu definierendem Sinne holomorph ist, und sprechen dann von einem holomorphen Linienbündel. Solche Linienbündel treten bei vielen Anwendungen der Theorie Riemannscher Flächen auf, u.a. auch in der Spektraltheorie integrierbarer Systeme.

4.28 Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche, E ein topologischer Raum, und $\pi : E \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Weiter sei für jedes $x \in X$ die *Faser* [fibre] $E_x = \pi^{-1}[\{x\}]$ mit der Struktur eines komplex-1-dimensionalen Vektorraums versehen. $\pi : E \rightarrow X$ oder einfach E heißt ein *Linienbündel über X* [line bundle over X], wenn es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subset X$ von x und einen Homöomorphismus

$$h : E_U := \pi^{-1}[U] \rightarrow U \times \mathbb{C}$$

gibt, so dass gilt:

(a) h ist *fasertreu*, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E_U & \xrightarrow{h} & U \times \mathbb{C} \\ \pi|_{E_U} \downarrow & \swarrow \text{pr}_U & \\ U & & \end{array}$$

kommutiert.

(b) Für $x \in U$ ist $\text{pr}_{\mathbb{C}} \circ h|_{E_x} : E_x \rightarrow \mathbb{C}$ jeweils ein Vektorraum-Isomorphismus.

Ein derartiges h heißt eine *lokale Trivialisierung* [local trivialization] des Linienbündels π . Eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X zusammen mit lokalen Trivialisierungen h_i auf U_i (für jedes $i \in I$) heißt ein *Atlas* [atlas] des Linienbündels π .

4.29 Beispiel. Consider $\mathbb{C}P^1$. Each point of this space represents a line through the origin of \mathbb{C}^2 . Therefore we define the space

$$E = \{(\ell, v) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2 \mid v \in \ell\}.$$

It has a natural projection onto $\mathbb{C}P^1$ and is in fact a line bundle, called the *tautological bundle*. It trivialises over the usual atlas $\{U_0, U_1\}$ with

$$\begin{aligned} h_0([1 : z], (v_0, zv_0)) &= (z, v_0), \\ h_1([z : 1], (zv_1, v_1)) &= (z, v_1). \end{aligned}$$

4.30 Aussage. Sei X eine Riemannsche Fläche, $\pi : E \rightarrow X$ ein Linienbündel über X , und $(U_i, h_i)_{i \in I}$ ein Atlas von π . Für $i, j \in I$ gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Funktion

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^*$$

so dass für $(x, v) \in (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}$ gilt:

$$h_j(x, g_{ij}(x)v) = h_i(x, v).$$

Für $i, j, k \in I$ gilt auf $U_i \cap U_j \cap U_k$ die Kozykel-Bedingung (bezüglich der multiplikativ geschriebenen, abelschen Gruppe \mathbb{C}^*)

$$g_{ij} \cdot g_{jk} = g_{ik}.$$

Die g_{ij} heißen *Übergangsfunktionen* [transition functions] zum Atlas (U_i, h_i) .

Beweis. Sei $x \in U_i \cap U_j$. Weil $h_i(x, \cdot)$ und $h_j(x, \cdot)$ invertierbare lineare Abbildungen $E_x \rightarrow \mathbb{C}$ sind, gibt es eine Zahl $g_{ij}(x) \in \mathbb{C}^*$ mit $h_i(x, \cdot) = g_{ij}(x) \cdot h_j(x, \cdot) = h_j(x, g_{ij}(x) \cdot \cdot)$. Die dadurch definierte Funktion $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}$ hängt offenbar stetig von $x \in U_i \cap U_j$ ab. Für $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ und beliebiges $v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$h_k(x, g_{ik}(x)v) = h_i(x, v) = h_j(x, g_{ij}(x)v) = h_k(x, g_{jk}(x)g_{ij}(x)v)$$

und somit $g_{ik} = g_{ij} g_{jk}$. □

4.31 Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche. Dann heißt ein Linienbündel $\pi : E \rightarrow X$ über X *holomorph* [holomorphic], wenn es einen Atlas für π gibt, so dass die entsprechenden Übergangsfunktionen (Aussage 4.30) holomorph sind. Ein solcher Atlas heißt *holomorpher Atlas* für π .

4.32 Beispiel. Choose any point p in a Riemann surface X , and let z be a local coordinate centered on p in a neighbourhood U_0 . Let $U_1 = X \setminus \{p\}$. Then we can define a line bundle $L_{n,p}$ in the following way. It is trivial over U_0 and U_1 and has transition functions $g_{00} = g_{11} = 1$, $g_{01} = g_{10}^{-1} = z^n$. These are holomorphic line bundles.

Sei X eine Riemannsche Fläche und $\pi : E \rightarrow X$ ein holomorphes Linienbündel mit holomorphem Atlas $(U_i, h_i)_{i \in I}$ zur offenen Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X . Seien weiter $(g_{ij})_{i,j \in I}$ die zugehörigen Übergangsfunktionen nach Aussage 4.30. Dann ist $(g_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*)$. Dabei ist \mathcal{O}^* die Garbe der nullstellenfreien holomorphen Funktionen auf X . Als Gruppenoperation für diese Garbe von abelschen Gruppen verwenden wir dabei die punktweise Multiplikation(!)

holomorpher Funktionen. Durch den Atlas wird daher ein Element der Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ bestimmt. Übungsaufgabe: Dieses Element von $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ hängt nicht von der Wahl des holomorphen Atlas ab, und zwei verschiedene holomorphe Linienbündel induzieren genau dann dasselbe Element von $H^1(X, \mathcal{O}^*)$, wenn sie zueinander isomorph (fasertreu biholomorph äquivalent) sind. Das zeigt: Die Menge der Isomorphieklassen von holomorphen Linienbündeln auf X entspricht der Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{O}^*)$. Die Gruppe $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ wird als *Picard-Varietät* [Picard variety] bezeichnet.

4.33 Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche und $\pi : E \rightarrow X$ ein Linienbündel.

- (a) Ein *Schnitt* [section] von π ist eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow E$ mit $\pi \circ f = \text{id}_X$. Also gilt $f(x) \in E_x$ für jedes $x \in X$.
- (b) Sei nun π ein holomorphes Linienbündel und $(U_i, h_i)_{i \in I}$ ein holomorpher Atlas von π . Dann heißt ein Schnitt $f : X \rightarrow E$ von π *holomorph*, wenn für jedes $i \in I$ die Funktion $\text{pr}_{\mathbb{C}} \circ h_i \circ f|_{U_i} : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist.

4.34 Beispiel. (Aus der Spektraltheorie integrierbarer Systeme.) Es sei X entweder \mathbb{C} oder \mathbb{C}^* und es sei eine matrixwertige, (komponentenweise) holomorphe Funktion

$$M = M(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) \\ \gamma(\lambda) & \delta(\lambda) \end{pmatrix} : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$$

gegeben. Die Eigenwerte μ von $M(\lambda)$ werden durch die Gleichung

$$\mu^2 - \Delta(\lambda)\mu + 1 = 0 \quad \text{mit} \quad \Delta(\lambda) = \text{tr}(M(\lambda)) = \alpha(\lambda) + \delta(\lambda)$$

bestimmt; deshalb gilt für $\nu = \mu - \frac{1}{2}\Delta(\lambda)$ die Gleichung $\nu^2 = \frac{1}{4}\Delta(\lambda)^2 - 1 =: a(\lambda)$. Wir wollen nun voraussetzen, dass $a(\lambda)$ ein Polynom in λ ist, das nur einfache Nullstellen besitzt. Die um $-\frac{1}{2}\Delta(\lambda)$ verschobenen Eigenwerte ν von $M(\lambda)$ entsprechen also den Punkten der komplexen Kurve

$$\Sigma^\circ = \{(\lambda, \nu) \in X \times \mathbb{C} \mid \nu^2 = a(\lambda)\}.$$

Dann haben wir für $X = \mathbb{C}$ die Situation von Section 2.3. Dort wurde gezeigt, dass man durch Hinzufügung von zwei bzw. einem Punkt zu Σ° über $\lambda = \infty$ eine kompakte Riemannsche Fläche Σ erhält, und dass diese hyperelliptisch ist. Im Fall $X = \mathbb{C}^*$ kann man Σ° analog kompaktifizieren, indem man außerdem Punkt(e) über $\lambda = 0$ hinzufügt. Auch hier erhält man eine hyperelliptische Fläche Σ . Sie heißt die *multiplier curve* oder *Spektralkurve*[‡] zu $M(\lambda)$. Ein Punkt von Σ ist also genau dann ein Verzweigungspunkt der Funktion $X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, $(\lambda, \nu) \mapsto \lambda$, wenn für diesen Wert $M(\lambda)$ nur einen Eigenwert (der arithmetischen Vielfachheit 2) hat.

Ein Vektor $(v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2$ ist genau dann Eigenvektor von $M(\lambda)$ zum Eigenwert $\mu = \nu + \frac{1}{2}\Delta(\lambda)$, wenn

$$(\alpha(\lambda) - \mu)v_1 + \beta(\lambda)v_2 = 0 \quad \text{oder gleichwertig} \quad \gamma(\lambda)v_1 + (\delta(\lambda) - \mu)v_2 = 0$$

gilt. Wir setzen nun weiter voraus, dass $\mu - a(\lambda)$ und $b(\lambda)$ keine gemeinsamen Nullstellen besitzen. Das bedeutet insbesondere, dass an den Nullstellen von $a(\lambda)$ wir $\beta(\lambda) \neq 0$ haben, was bedeutet, dass $M(\lambda)$ an diesen Stellen ein nicht-triviales Jordankästchen ist, d.h. dass der

[‡]Dass die Begriffe "multiplier curve" und "Spektralkurve" in dieser Situation gleichwertig sind, liegt an unserer Voraussetzung, dass $a(\lambda)$ ein Polynom ohne mehrfache Nullstellen sein soll. Im allgemeinen Fall, wo Σ° Singularitäten besitzen kann, unterscheiden sich diese beiden Begriffe voneinander.

einzigem Eigenwert μ von $M(\lambda)$ dann die geometrische Vielfachheit 1 besitzt. Unter dieser Voraussetzung ist das "holomorphe Vektorfeld" auf Σ

$$\Sigma \rightarrow \mathbb{C}^2, (\lambda, \nu) \mapsto (\beta(\lambda), \nu + \frac{1}{2}(\delta(\lambda) - \alpha(\lambda)))$$

nullstellenfrei, es ordnet jedem $(\lambda, \nu) \in \Sigma$ einen Eigenvektor von $M(\lambda)$ zum Eigenwert $\mu = \nu + \frac{1}{2}\Delta(\lambda)$ zu. Das zeigt, dass durch

$$\pi : E \rightarrow \Sigma, ((\lambda, \nu), v) \mapsto (\lambda, \nu) \quad \text{mit} \quad E = \bigcup_{(\lambda, \nu) \in \Sigma} \{(\lambda, \nu)\} \times \ker(M(\lambda) - (\nu + \frac{1}{2}\Delta(\lambda)))$$

ein holomorphes Linienbündel auf Σ gegeben wird, das *Eigenbündel* zu $M(\lambda)$.

Das Paar (Σ, π) nennt man auch *Spektraldaten* der durch $M(\lambda)$ beschriebenen Lösung eines integrablen Systems.

Chapter 5

Kohomologie von Riemannschen Flächen

5.1 Das Lemma von Dolbeault

Ein Schlüssel für das Verständnis der globalen Struktur einer Riemannschen Fläche X ist die Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{O})$. Um diese mithilfe des Satzes von Leray berechnen zu können, benötigen wir eine Leray-Überdeckung von X , d.h. eine Überdeckung von X aus offenen Teilmengen U mit $H^1(U, \mathcal{O}) = 0$. Aus diesem Grund sind wir an Flächen interessiert, deren erste Kohomologiegruppe mit Koeffizienten in \mathcal{O} verschwindet. In diesem Abschnitt zeigen wir mittels des Lemmas von Dolbeault, dass dies auf alle einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen zutrifft.

5.1 Theorem. (Lemma von Dolbeault.) Sei $X = B(0, R) \subset \mathbb{C}$ eine Kreisscheibe mit Radius $0 < R \leq \infty$ (d.h. $R = \infty$ und damit $X = \mathbb{C}$ ist zugelassen), und $g \in \mathcal{E}(X)$ gegeben. Dann existiert ein $f \in \mathcal{E}(X)$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g.$$

Natürlich ist die Funktion f im Lemma von Dolbeault nicht eindeutig bestimmt: Ist $f \in \mathcal{E}(X)$ eine Lösung von $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$, so ist eine andere Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{E}(X)$ genau dann eine weitere Lösung, wenn $\tilde{f} - f$ holomorph ist.

Wir werden das Lemma von Dolbeault später zum Theorem von Dolbeault verallgemeinern, das sich auf beliebige Riemannschen Flächen X bezieht.

Bevor wir das Lemma von Dolbeault beweisen, schauen wir uns einige Anwendungen an:

5.2 Aufgabe. Suppose $X = B(0, R)$ with $0 < R \leq \infty$ and let $g \in \mathcal{E}(X)$ be given. Use Dolbeault's Lemma to show that there exists $f \in \mathcal{E}(X)$ so that $\Delta f = g$. Here Δ denotes the Laplace operator,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}},$$

compare Aussage 3.1.

5.3 Satz. (a) Für $X = B(0, R)$ mit $0 < R \leq \infty$ gilt $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$.

(b) Für die Riemannsche Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$ gilt $H^1(\widehat{\mathbb{C}}, \mathcal{O}) = 0$.

Beweis. Für (a). Wir verwenden Aussage 4.23. Sei also $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von X und $(f_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ ein diesbezüglicher Kozykel. Wir haben zu zeigen, dass $(f_{ij}) \in B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ ist, d.h. dass es $(g_i)_{i \in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ mit $f_{ij} = g_i - g_j$ für alle $i, j \in I$ gibt.

Offenbar ist insbesondere $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$. Weil $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E}) = 0$ nach Aussage 4.20 ist, ist $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E}) = B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$, also gibt es $(\tilde{g}_i)_{i \in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$ mit $f_{ij} = \tilde{g}_i - \tilde{g}_j$ für alle $i, j \in I$. Weil f_{ij} jeweils holomorph ist, ist $0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_{ij} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tilde{g}_i - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tilde{g}_j$ und somit $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tilde{g}_i = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tilde{g}_j$ auf $U_i \cap U_j$. Nach dem Garbenaxiom (GL) folgt, dass es eine globale Funktion $h \in \mathcal{E}(X)$ mit $h|_{U_i} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tilde{g}_i$ für alle $i \in I$ gibt. Nach dem Lemma von Dolbeault, Theorem 5.1, existiert $g \in \mathcal{E}(X)$ mit $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g = h$.

Wir definieren nun

$$g_i = \tilde{g}_i - g|_{U_i}.$$

Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_i = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tilde{g}_i - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g|_{U_i} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tilde{g}_i - h|_{U_i} = 0,$$

also ist g_i holomorph und somit $(g_i)_{i \in I} \in C^0(X, \mathcal{O})$. Außerdem hat man $g_i - g_j = \tilde{g}_i - \tilde{g}_j = f_{ij}$, und somit ist $(f_{ij}) \in B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$.

Für (b). Wir verwenden den Satz 4.25 von Leray. $\mathfrak{U} = (U_1, U_2)$ mit $U_1 = \mathbb{C}$ und $U_2 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ ist eine offene Überdeckung von $\widehat{\mathbb{C}}$. Nach (a) ist $H^1(U_1, \mathcal{O}) = 0$, und weil U_2 durch $z \mapsto \frac{1}{z}$ biholomorph zu \mathbb{C} ist, ist ebenfalls $H^1(U_2, \mathcal{O}) = 0$. \mathfrak{U} ist also eine Leray-Überdeckung, weswegen nach dem Satz von Leray $H^1(\widehat{\mathbb{C}}, \mathcal{O}) = H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ ist.

Also genügt zu zeigen, dass jeder Kozykel $(f_{ij})_{i,j=1,2} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ spaltet. Wegen der Kozykelbedingung genügt es, Funktionen $g_i \in \mathcal{O}(U_i)$ zu finden, so dass

$$f_{12} = g_1 - g_2 \quad \text{auf } U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^*$$

gilt. Zu diesem Zweck sei

$$f_{12}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

die Laurent-Reihenentwicklung von f_{12} auf \mathbb{C}^* . Wir definieren

$$g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{und} \quad g_2(z) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n.$$

Dann ist $g_i \in \mathcal{O}(U_i)$ und $g_1 - g_2 = f_{12}$. □

5.4 Korollar. Ist X eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche, so ist $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$.

Beweis. Wegen dem Riemannschen Abbildungssatz (Theorem 3.42) ist X entweder zu $\widehat{\mathbb{C}}$, oder zu $\mathbb{C} = B(0, \infty)$ oder zu $\mathbb{D} = B(0, 1)$ biholomorph äquivalent. Deshalb folgt die Behauptung aus Satz 5.3. □

Zum Beweis des Lemmas von Dolbeault betrachten wir zunächst den Fall, dass die gegebene Funktion g kompakten Träger hat. Dann können wir sie durch Null auf ganz \mathbb{C} fortsetzen. Das folgende Lemma beschreibt, wie man in diesem Fall die gesuchte Funktion f explizit als Integral konstruiert.

5.5 Lemma. Sei $g \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ gegeben mit kompaktem Träger. Dann existiert ein $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g.$$

Beweis. Wir definieren die Funktion f durch das Flächenintegral

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{g(z)}{z - \zeta} dz \wedge d\bar{z}.$$

Weil der Nenner des Integranden in $z = \zeta$ eine Nullstelle hat, ist nicht selbstverständlich, dass dieses Integral endlich ist. Jedoch gilt mit Uparametrisierung in Polarkoordinaten

$$\int_{\mathbb{D}} \left| \frac{1}{z} \right| dz \wedge d\bar{z} = \int_{r=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left| \frac{1}{re^{i\varphi}} \right| r dr d\varphi = \int_{r=0}^1 1 dr \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 d\varphi = 1 \cdot 2\pi = 2\pi < \infty.$$

Weil die glatte Funktion g in der Nähe von $z = \zeta$ lokal beschränkt ist, folgt aus dieser Rechnung, dass das obige Integral endlich ist. Es folgt auch, dass das Integral vom Parameter ζ glatt abhängt, also ist f eine glatte Funktion auf \mathbb{C} , und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \frac{g(z)}{z - \zeta} dz \wedge d\bar{z} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{A_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \frac{g(\zeta + z)}{z} dz \wedge d\bar{z},$$

wobei wir $A_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid \varepsilon \leq |z| \leq R\}$ setzen und $R > 0$ so groß wählen, dass der Träger von g in $B(\zeta, R)$ enthalten ist. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \frac{g(\zeta + z)}{z} = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} g(\zeta + z) = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g(\zeta + z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{g(\zeta + z)}{z}$$

und daher

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta + z) \frac{1}{z} dz \wedge d\bar{z} = -d\omega \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{1}{2\pi i} \frac{g(\zeta + z)}{z} dz$$

(für $z \neq 0$; in der Definition von ω wird ζ als Konstante angesehen.) Mit dem Satz von Stokes 1.33 ergibt sich also

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{A_\varepsilon} d\omega = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial A_\varepsilon} \omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \omega.$$

Das letzte Integral rechnen wir wieder mit Polarkoordinaten $z = \varepsilon e^{i\varphi}$ für $\partial B(0, \varepsilon) = \{|z| = \varepsilon\}$ aus:

$$\int_{\partial B(0, \varepsilon)} \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{g(\zeta + \varepsilon e^{i\varphi})}{\varepsilon e^{i\varphi}} \varepsilon i e^{i\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} g(\zeta + \varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Das letzte Integral berechnet den Mittelwert der Funktion $z \mapsto g(\zeta + z)$ auf dem Kreis $\partial B(0, \varepsilon)$. Da diese Funktion stetig ist, konvergiert dieser Mittelwert für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen $g(\zeta)$, und somit ist $\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = g(\zeta)$. \square

In der allgemeinen Situation des Lemmas von Dolbeault konvergiert das Integral aus dem Beweis von Lemma 5.5 leider nicht notwendigerweise. Wir verwenden daher einen Ausschöpfungsprozess, um das allgemeine Lemma von Dolbeault auf Lemma 5.5 zurückzuführen. Die Beweisidee ähnelt dabei dem üblichen Beweis des Satzes von Arzelà-Ascoli aus der Funktionalanalysis.

Beweis des Lemmas von Dolbeault, Theorem 5.1. Sei also $X = B(0, R)$ und $g \in \mathcal{E}(X)$. Wir wählen eine Folge von Radien $0 < R_0 < R_1 < \dots < R_n < \dots < R$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = R$, und setzen $X_n = B(0, R_n)$. Dann gibt es glatte Funktionen $\psi_n \in \mathcal{E}(X)$, so dass $\psi_n|_{X_n} = 1$ ist, und der Träger $\text{supp}(\psi_n)$ kompakt und in X_{n+1} enthalten ist. Die Funktionen $\psi_n g$ verschwinden außerhalb von X_{n+1} , und lassen sich daher durch Null auf ganz \mathbb{C} fortsetzen. So aufgefasst, haben diese Funktionen kompakten Träger. Deshalb existieren nach Lemma 5.5 Funktionen $f_n \in \mathcal{E}(X)$ mit

$$\frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}} = \psi_n g. \quad (\spadesuit)$$

Wir modifizieren die Folge (f_n) jetzt so, dass sie lokal gleichmäßig auf ganz X gegen ein $f \in \mathcal{E}(X)$ konvergiert, für das $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$ gilt. Genauer gesagt, werden wir induktiv eine weitere Folge (\tilde{f}_n) von Funktionen $\tilde{f}_n \in \mathcal{E}(X)$ definieren, so dass für alle $n \geq 1$ die folgenden beiden Bedingungen gelten:

- (i) $\frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial \bar{z}} = g$ auf X_n ,
- (ii) $\|\tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n\|_{X_{n-1}, \infty} \leq 2^{-n}$, wobei $\|h\|_{X_{n-1}, \infty} = \sup_{x \in X_{n-1}} |f(x)|$ die Supremumsnorm auf X_{n-1} bezeichnet.

Dazu setzen wir als erstes $\tilde{f}_1 = f_1$. Sind $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ schon konstruiert, so gilt wegen (\spadesuit) und (i)

$$\frac{\partial f_{n+1}}{\partial \bar{z}} = \psi_{n+1} g = g = \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial \bar{z}} \quad \text{auf } X_n$$

und somit $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f_{n+1} - \tilde{f}_n) = 0$ auf X_n , d.h. $f_{n+1} - \tilde{f}_n$ ist auf X_n holomorph. Die Kreisscheibe X_{n-1} ist in X_n relativ kompakt, und deshalb lässt sich die genannte Funktion dort bezüglich der Supremumsnorm beliebig gut durch ein Taylor-Polynom hinreichend hoher Ordnung approximieren. Also existiert ein Polynom $P = P(z)$, so dass

$$\|(f_{n+1} - \tilde{f}_n) - P\|_{X_{n-1}, \infty} \leq 2^{-n}$$

ist. Wir definieren $\tilde{f}_{n+1} = f_{n+1} - P$. Dann gilt (ii), und außerdem (i) wegen

$$\frac{\partial \tilde{f}_{n+1}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial P}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \bar{z}} = \psi_{n+1} g = g \quad \text{auf } X_n.$$

Nachdem die Folge $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstruiert ist, können wir die Funktion f durch

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(z)$$

definieren. Weil jedes $z \in X$ eine Umgebung besitzt, die in allen bis auf endlich vielen X_n enthalten ist, folgt aus (ii), dass dieser Grenzwert zumindest als lokal gleichmäßiger (insbesondere punktwiser) Grenzwert existiert. Deshalb wird durch ihn eine stetige Funktion f auf X definiert. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ fest. Dann gilt

$$f = \tilde{f}_n + F_n \quad \text{mit} \quad F_n = \sum_{k=n}^{\infty} (\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k) \quad \text{auf } X_n.$$

Dabei gilt wegen (i) für jedes $k \geq n$: $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k) = 0$ auf X_n , also ist $\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k$ dort holomorph. Wegen (ii) konvergiert die unendliche Reihe F_n lokal gleichmäßig, nach dem Satz von Harnack (Satz 3.12(a)) ist F_n daher ebenfalls holomorph. Somit gilt auf X_n nach (i): $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \tilde{f}_n + F_n}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial \bar{z}} = g$. \square

5.2 L^2 -Integration auf Riemannschen Flächen

Zur Vorbereitung auf das Folgende müssen wir uns über quadratische Flächen-Integration (L^2 -Integration) von holomorphen Funktionen auf Riemannschen Flächen X unterhalten.

Schauen wir zunächst die Situation auf offenen Teilmengen $D \subset \mathbb{C}$ an:

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(D)$ eine holomorphe Funktion. Dann definieren wir die L^2 -Norm [L^2 norm] von f auf D als

$$\|f\|_{L^2(D)} := \left(\int_D |f(z)|^2 dx \wedge dy \right)^{1/2} \in [0, \infty].$$

Wenn $\|f\|_{L^2(D)} < \infty$ ist, so sagen wir, dass f L^2 -integrierbar oder *quadrat-integrierbar* [L^2 integrable, square integrable] ist. Wir bezeichnen den normierten Vektorraum der quadrat-integrierbaren holomorphen Funktionen auf D mit $L^2(D, \mathcal{O})$. Wir werden in einem Augenblick zeigen, dass $L^2(D, \mathcal{O})$ ein Banachraum, sogar ein Hilbertraum ist.

Wenn D ein beschränktes Gebiet ist, d.h. $\text{vol}(D) := \int_D dx \wedge dy < \infty$, dann gilt offenbar für jede beschränkte Funktion $f \in \mathcal{O}(D)$

$$\|f\|_{L^2(D)} \leq \sqrt{\text{vol}(D)} \cdot \|f\|_{D, \infty},$$

wobei $\|f\|_{D, \infty}$ wieder die Supremumsnorm auf D bezeichnet. Außerdem gilt für $f, g \in L^2(D, \mathcal{O})$ mit

$$\langle f, g \rangle := \int_D f(z) \overline{g(z)} dx \wedge dy$$

die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{L^2(D)} \cdot \|g\|_{L^2(D)},$$

weswegen $\langle f, g \rangle$ tatsächlich endlich ist. Daher wird durch $\langle f, g \rangle$ ein Skalarprodukt auf $L^2(D, \mathcal{O})$ erklärt. Damit wissen wir insbesondere, wann zwei Funktionen in $L^2(D, \mathcal{O})$ zueinander orthogonal sind.

5.6 Beispiel. Sei $D = B(a, r)$ eine Kreisscheibe mit $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Mit Hilfe von Polarkoordinaten kann man leicht nachrechnen, dass die Monome $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\psi_n(z) = (z - a)^n$$

paarweise orthogonal in $L^2(B, \mathcal{O})$ sind und dass

$$\|\psi_n\|_{L^2(D)} = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} \cdot r^{n+1}$$

gilt. Ist nun $f \in L^2(D, \mathcal{O})$, und ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(z) \quad \text{mit} \quad c_n \in \mathbb{C}$$

die Potenzreihenentwicklung von f um den Mittelpunkt a von D , so gilt deshalb

$$\|f\|_{L^2(D)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{n+1} r^{2n+2} |c_n|^2.$$

Aus der folgenden Aussage wird sich unter anderem ergeben, dass $L^2(D, \mathcal{O})$ ein Hilbertraum ist:

5.7 Aussage. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $r > 0$ und

$$D_r := \{z \in D \mid B(z, r) \subset D\}$$

die Menge der Punkte in D , die vom Rand von D einen Abstand $\geq r$ haben. Dann gilt für $f \in L^2(D, \mathcal{O})$:

$$\|f\|_{D_r, \infty} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot r} \|f\|_{L^2(D)}.$$

Beweis. Sei $a \in D_r$ und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ die Potenzreihenentwicklung von f um a . Mit Beispiel 5.6 ergibt sich

$$|f(a)|^2 = |c_0|^2 = \frac{1}{\pi r^2} \cdot \frac{\pi}{0+1} r^{2 \cdot 0+2} |c_0|^2 \leq \frac{1}{\pi r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{n+1} r^{2n+2} |c_n|^2 = \frac{1}{\pi r^2} \|f\|_{L^2(D)}^2$$

und somit, da $a \in D_r$ beliebig war, die Behauptung. \square

5.8 Korollar. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Dann ist $L^2(D, \mathcal{O})$ ein Hilbertraum.

Beweis. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^2(D, \mathcal{O})$. Weil jedenfalls $L^2(D, \mathbb{C})$, der Raum aller quadrat-integrierbaren Funktionen auf D , ein Banachraum ist, konvergiert f_n bezüglich der L^2 -Norm gegen eine Funktion f . Weil jede kompakte Teilmenge $K \subset D$ in D_r für ein $r > 0$ enthalten ist, folgt aus Aussage 5.7, dass die Konvergenz von (f_n) gegen f kompakt gleichmäßig ist. Daher ist die Grenzfunktion f holomorph, also $f \in L^2(D, \mathcal{O})$. \square

Die folgende Aussage ist in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung des Lemmas von Schwarz:

5.9 Aussage. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $D' \subset\subset D$ eine relativ-kompakte, offene Teilmenge von D , und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein (abgeschlossener) Untervektorraum $A \subset L^2(D, \mathcal{O})$ von endlicher Kodimension, so dass

$$\|f\|_{L^2(D')} \leq \varepsilon \cdot \|f\|_{L^2(D)} \quad \text{für alle } f \in A \text{ gilt.}$$

Beweis. Wegen $D' \subset\subset D$ gibt es $r > 0$ und endlich viele Punkte $a_1, \dots, a_k \in D$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $B(a_j, r) \subset D$ für alle $j \in \{1, \dots, k\}$.

(b) $D' \subset \bigcup_{j=1}^k B(a_j, r/2)$.

Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $k \cdot 2^{-(n+1)} \leq \varepsilon$ ist. Dann sei A der Vektorraum aller Funktionen $f \in L^2(D, \mathcal{O})$, die in den Punkten a_j jeweils eine Nullstelle mindestens der Ordnung n haben. Dies ist ein Untervektorraum von $L^2(D, \mathcal{O})$, dessen Kodimension $\leq k \cdot n < \infty$ ist. Weil die Kodimension endlich ist, ist A abgeschlossen in $L^2(D, \mathcal{O})$.

Sei nun $f \in A$. Wir entwickeln f um a_j in Potenzreihe als $f(z) = \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu (z - a_j)^\nu$. Nach Beispiel 5.6 gilt dann

$$\|f\|_{L^2(B(a_j, r))}^2 = \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\pi}{\nu+1} r^{2\nu+2} |c_\nu|^2$$

bzw.

$$\|f\|_{L^2(B(a_j, r/2))}^2 = \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\pi}{\nu+1} (r/2)^{2\nu+2} |c_\nu|^2 \leq 2^{-2(n+1)} \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\pi}{\nu+1} r^{2\nu+2} |c_\nu|^2 \leq 2^{-2(n+1)} \|f\|_{L^2(B(a_j, r))}^2$$

und somit

$$\|f\|_{L^2(B(a_j, r/2))} \leq 2^{-(n+1)} \cdot \|f\|_{L^2(B(a_j, r))}.$$

Wegen der Eigenschaften (a) und (b) gilt

$$\|f\|_{L^2(B(a_j, r))} \leq \|f\|_{L^2(D)} \quad \text{und} \quad \|f\|_{L^2(D')} \leq \sum_{j=1}^k \|f\|_{L^2(B(a_j, r/2))}.$$

Somit ist insgesamt

$$\|f\|_{L^2(D')} \leq \sum_{j=1}^k \|f\|_{L^2(B(a_j, r/2))} \leq 2^{-(n+1)} \sum_{j=1}^k \|f\|_{L^2(B(a_j, r))} \leq 2^{-(n+1)} \cdot k \cdot \|f\|_{L^2(D)} \leq \varepsilon \cdot \|f\|_{L^2(D)}. \quad \square$$

Wir möchten eine L^2 -Norm auch auf Riemannschen Flächen einführen. Leider ist das global nicht auf koordinatenunabhängige Weise möglich, weil das Flächenintegral $\int f(z)^2 dz \wedge d\bar{z}$ nicht koordinatenunabhängig ist. Wir führen die L^2 -Norm daher für lokal definierte Objekte, nämlich für Koketten ein.

Sei X eine Riemannsche Fläche. Wir wählen endlich viele Karten (U_i^*, z_i) von X ($i \in \{1, \dots, n\}$), so dass das Bild $z_i[U_i] \subset \mathbb{C}$ jeweils eine Kreisscheibe ist. Man beachte, dass wir nicht fordern, dass $\mathfrak{U}^* = (U_i^*)_{i=1, \dots, n}$ ganz X überdeckt. Weiter wählen wir offene Umgebungen $U_i \subset U_i^*$, und betrachten die offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i=1, \dots, n}$ des Raums $|\mathfrak{U}| := \bigcup_{i=1}^n U_i$.

In dieser Situation definieren wir auf den abelschen Gruppen von Koketten $C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ ($q \in \{0, 1\}$) bezüglich der offenen Überdeckung \mathfrak{U} L^2 -Normen, indem wir definieren:

$$\text{für } \eta = (f_i)_{i \in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}): \quad \|\eta\|_{L^2(\mathfrak{U})}^2 := \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^2(U_i)}^2 := \sum_{i=1}^n \|f_i \circ z_i^{-1}\|_{L^2(z_i[U_i])}^2$$

$$\text{für } \xi = (f_{ij})_{i,j \in I} \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}): \quad \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{U})}^2 := \sum_{i,j=1}^n \|f_{ij}\|_{L^2(U_i \cap U_j)}^2 := \sum_{i,j=1}^n \|f_{ij} \circ z_i^{-1}\|_{L^2(z_i[U_i \cap U_j])}^2.$$

Die L^2 -Norm von Koketten wird also mithilfe der gewählten Karten z_i definiert. Wir bezeichnen den Unterraum von $C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ der q -Koketten mit endlicher L^2 -Norm mit $C_{L^2}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Diese Unterräume sind analog wie $L^2(D, \mathcal{O})$ Hilberträume. Die Koketten in $C_{L^2}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, die Kozykel sind, bilden einen abgeschlossenen Untervektorraum von $C_{L^2}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, den wir mit $Z_{L^2}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ bezeichnen.

5.3 Das Geschlecht Riemannscher Flächen

Sei X eine Riemannsche Fläche und \mathcal{O} die Garbe der holomorphen Funktionen auf X . Weil \mathcal{O} eine Garbe von Vektorräumen ist, trägt auch die erste Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{O})$ die Struktur eines Vektorraums. Aus dieser Kohomologiegruppe werden wir wichtige Informationen über die Existenz von meromorphen Funktionen auf X herleiten.

5.10 Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche, und \mathcal{O} die Garbe der holomorphen Funktionen auf X . Wenn der Vektorraum $H^1(X, \mathcal{O})$ endlich-dimensional ist, so sagt man, dass X *endliches Geschlecht* [finite genus] hat. In diesem Fall heißt die Zahl $g := \dim H^1(X, \mathcal{O})$ das *Geschlecht* [genus] der Riemannschen Fläche X .

Man kann zeigen, dass für kompakte Riemannsche Flächen X diese Definition des Geschlechts mit der Definition aus der Differentialtopologie bzw. der simplizialen Homologie übereinstimmt (man wähle eine Triangulierung von X und zähle die Ecken E , die Kanten K und die Flächen F , dann ist $E - K + F = \text{Euler-Charakteristik} = 2 - 2g$).

5.11 Beispiel. In Korollar 5.4 haben wir letztlich aus dem Lemma von Dolbeault gefolgert, dass einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen das Geschlecht 0 haben. Insbesondere hat die (kompakte) Riemannsche Zahlenkugel das Geschlecht Null.

5.12 Theorem. Kompakte Riemannsche Flächen X haben endliches Geschlecht, mit anderen Worten: $\dim H^1(X, \mathcal{O}) < \infty$.

Der Beweis dieses Theorems erfordert etwas Aufwand und zwei Lemmata.

Es seien $\mathfrak{U} = (U_i)_{1 \leq i \leq n}$ und $\mathfrak{V} = (V_i)_{1 \leq i \leq n}$ zwei Familien von offenen Mengen in der Riemannschen Fläche X derselben endlichen Anzahl n . (In der Regel werden \mathfrak{U} bzw. \mathfrak{V} hier keine Überdeckungen von X sein.) Wir schreiben $\mathfrak{V} \ll \mathfrak{U}$, wenn für jedes i gilt: $V_i \subset\subset U_i$, d.h. wenn V_i jeweils eine relativ-kompakte Teilmenge von U_i ist. In dieser Situation erhält man durch Einschränkung eine kanonische Einschränkungsabbildung $C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \rightarrow C^q(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$. Diese Abbildung erhält Kozykel und Koränder, und führt daher auch zu einer Einschränkungsabbildung der Kohomologiegruppen $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$. Wir fassen also im Folgenden Koketten, Kozykel, Koränder, Kohomologieklassen bezüglich \mathfrak{U} bei Bedarf auch als Koketten, Kozykel, Koränder, Kohomologieklassen bezüglich \mathfrak{V} auf. Dabei gilt $\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})} < \infty$ für jedes $\xi \in C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, $q \in \{0, 1\}$, und somit $C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \subset C_{L^2}^q(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$.

Wegen Aussage 5.9 gibt es in dieser Situation zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Untervektorraum $A \subset Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ von endlicher Kodimension, so dass gilt:

$$\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})} \leq \varepsilon \cdot \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{U})} \quad \text{für jedes } \xi \in A. \quad (\diamond)$$

5.13 Lemma. Sei X eine Riemannsche Fläche und $\mathfrak{U}^* = (U_i^*, z_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine endliche Familie von Kartenumgebungen von X , so dass das Bild $z_i[U_i]$ jeweils eine Kreisscheibe in \mathbb{C} ist (wie am Ende von Abschnitt 5.2). Es seien $\mathfrak{U} = (U_i)_{1 \leq i \leq n}$, $\mathfrak{V} = (V_i)_{1 \leq i \leq n}$ und $\mathfrak{W} = (W_i)_{1 \leq i \leq n}$ weitere Familien von offenen Mengen mit $\mathfrak{W} \ll \mathfrak{V} \ll \mathfrak{U} \ll \mathfrak{U}^*$. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass es für jedes $\xi \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ Elemente $\zeta \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ und $\eta \in C_{L^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ gibt, so dass

$$\zeta = \xi + \delta^0(\eta) \quad \text{in } Z_{L^2}^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O}) \quad (\circ 1)$$

und

$$\max(\|\zeta\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta\|_{L^2(\mathfrak{W})}) \leq C \cdot \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})} \quad (\circ 2)$$

gilt.

Beweis von Lemma 5.13. Wir führen den Beweis in zwei Schritten.

1. Schritt. Sei $\xi = (f_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ gegeben. Dann konstruieren wir $\zeta \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ und $\eta \in C_{L^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ gibt, so dass die Bedingung (o1) gilt. Sei \mathcal{E} die Garbe der glatten Funktionen. Nach Aussage 4.20 (angewendet auf die Riemannsche Fläche $|\mathfrak{V}| = \bigcup_{i=1}^n V_i$) ist $H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{E}) = 0$, deshalb existiert eine Kokette $(g_i)_{1 \leq i \leq n} \in C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{E})$ mit

$$f_{ij} = g_j - g_i \quad \text{auf } V_i \cap V_j.$$

Weil f_{ij} holomorph ist, gilt $0 = d''f = d''g_j - d''g_i$ jeweils auf $V_i \cap V_j$. Nach dem Garbenaxiom (LG) (angewendet auf die Garbe der glatten 1-Formen vom Typ $(0, 1)$ auf $|\mathfrak{V}|$) fügen sich die $d''g_i$ zu einer glatten Differentialform ω vom Typ $(0, 1)$ auf $|\mathfrak{V}|$ mit $\omega|_{V_i} = d''g_i$ zusammen. Wegen $\mathfrak{W} \ll \mathfrak{V}$, ist auch $|\mathfrak{W}|$ relativ-kompakt in $|\mathfrak{V}|$, und daher existiert eine glatte Funktion ψ auf X mit $\psi|_{|\mathfrak{W}|} = 1$ und $\text{supp}(\psi) \subset |\mathfrak{V}|$. Indem wir $\psi\omega$ durch Null fortsetzen, können wir $\psi\omega$ als eine glatte Differentialform vom Typ $(0, 1)$ auf $|\mathfrak{U}^*|$ auffassen. Weil die U_i^* jeweils mittels der Karte z_i biholomorph zu Kreisscheiben in \mathbb{C} sind, existieren nach dem Lemma von Dolbeault (Theorem 5.1) Funktionen $h_i \in \mathcal{E}(U_i^*)$, so dass $d''h_i = \psi\omega$ auf U_i^* gilt. Wir setzen nun $F_{ij} = h_j - h_i$ auf $U_i^* \cap U_j^*$. Dann gilt

$$d''F_{ij} = d''h_j - d''h_i = \psi\omega - \psi\omega = 0 \quad \text{auf } U_i^* \cap U_j^*.$$

Also ist $F_{ij} \in \mathcal{O}(U_i^* \cap U_j^*)$. Wir definieren nun

$$\zeta = (F_{ij}|_{U_i \cap U_j})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Offenbar erfüllt ζ die Kozykelbedingung, und wegen $\mathfrak{U} \ll \mathfrak{U}^*$ ist ζ außerdem quadratintegrierbar. Also gilt $\zeta \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Es gilt jeweils

$$d''h_i = \psi\omega = \omega = d''g_i \quad \text{auf } W_i,$$

also ist $h_i - g_i$ holomorph auf W_i . Wegen $W_i \subset \subset V_i$ ist $h_i - g_i$ außerdem beschränkt auf W_i , und daher ist

$$\eta = (h_i - g_i|_{W_i})_{1 \leq i \leq n} \in C_{L^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O}).$$

Nun gilt

$$F_{ij} - f_{ij} = (h_j - h_i) - (g_j - g_i) = (h_j - g_j) - (h_i - g_i) \quad \text{auf } W_i \cap W_j$$

und damit $\zeta - \xi = \delta^0(\eta)$. Daher gilt (o1).

2. Schritt. Wir zeigen nun, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass auch die Abschätzung (o2) gilt. Dazu betrachten wir den Hilbertraum

$$H = Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \times Z_{L^2}^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}) \times C_{L^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$$

mit der Norm $\|\cdot\|_H$, die durch

$$\|(\zeta, \xi, \eta)\|_H^2 = \|\zeta\|_{L^2(\mathfrak{U})}^2 + \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})}^2 + \|\eta\|_{L^2(\mathfrak{W})}^2 \quad \text{für } (\zeta, \xi, \eta) \in H$$

charakterisiert ist. Wir betrachten außerdem die Teilmenge

$$L = \{ (\zeta, \xi, \eta) \in H \mid \zeta = \xi + \delta^0(\eta) \text{ in } Z_{L^2}^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O}) \}.$$

L ist ein abgeschlossener Unterraum von H und deshalb selber ein Hilbertraum (mit der Einschränkung der Norm $\|\cdot\|_H$ auf L). Aus dem 1. Schritt ergibt sich, dass die stetige, lineare Abbildung

$$\pi : L \rightarrow Z_{L^2}^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}), (\zeta, \xi, \eta) \mapsto \xi$$

surjektiv ist. Nach dem Satz von der offenen Abbildung aus der Funktionalanalysis ist die Abbildung π daher offen. Das bedeutet, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für jedes $x = (\zeta, \xi, \eta) \in L$ gilt: $\|x\|_H \leq C \cdot \|\pi(x)\|_{L^2(\mathfrak{V})}$. Damit gilt dann

$$\max(\|\zeta\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta\|_{L^2(\mathfrak{W})}) \leq \|(\zeta, \xi, \eta)\|_H \leq C \cdot \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})}$$

und damit (o2). □

Mit dem folgenden Lemma befreien wir uns von der Einschränkung auf quadrat-integrierbare Kozykel aus Lemma 5.13. Es besagt, dass in der Situation von Lemma 5.13 der Bildvektorraum der kanonischen Einschränkungabbildung

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$$

endlich-dimensional ist.

5.14 Lemma. Unter denselben Voraussetzungen wie in Lemma 5.13 gibt es einen endlich-dimensionalen Vektorraum $S \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, so dass gilt: Für jedes $\xi \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ gibt es Elemente $\sigma \in S$ und $\eta \in C^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ mit

$$\sigma = \xi + \delta^0(\eta) \quad \text{in } Z^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O}).$$

Beweis. Sei $C > 0$ die Konstante aus Lemma 5.13 und $\varepsilon := \frac{1}{2C}$. Nach (\diamond) gibt es einen Untervektorraum $A \subset Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ von endlicher Kodimension, so dass

$$\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq \varepsilon \cdot \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{U})} \quad \text{für jedes } \xi \in A \text{ gilt.}$$

Wir wählen S als das Orthokomplement von A im Hilbertraum $Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Dann ist S ein endlich-dimensionaler Vektorraum, der komplementär zu A ist, d.h. es gilt $A + S = Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ und $A \cap S = \{0\}$.

Sei nun $\xi \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ vorgegeben. Wegen $\mathfrak{W} \ll \mathfrak{U}$ ist $M := \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{W})} < \infty$ und somit $\xi \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Nach Lemma 5.13 existieren daher $\zeta_0 \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ und $\eta_0 \in C_{L^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ mit

$$\zeta_0 = \xi + \delta^0(\eta_0) \text{ in } Z_{L^2}^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O}) \quad \text{sowie} \quad \|\zeta_0\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta_0\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq CM.$$

Wegen der Konstruktion von S gibt es eine eindeutige (orthogonale) Zerlegung von $\zeta_0 \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$

$$\zeta_0 = \xi_0 + \sigma_0 \quad \text{mit} \quad \xi_0 \in A, \sigma_0 \in S.$$

Wir konstruieren hiervon ausgehend nun induktiv Folgen von Elementen

$$\zeta_\nu \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \quad \eta_\nu \in C_{L^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O}) \quad \xi_\nu \in A \quad \sigma_\nu \in S$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) $\zeta_\nu = \xi_{\nu-1} + \delta^0(\eta_\nu)$ in $Z_{L^2}^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$
- (2) $\zeta_\nu = \xi_\nu + \sigma_\nu$ (die eindeutige orthogonale Zerlegung von $\zeta_\nu \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$)
- (3) $\|\zeta_\nu\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta_\nu\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq 2^{-\nu} \cdot CM$

Nehmen wir dafür an, dass die Elemente für ein ν schon konstruiert sind. Wir konstruieren dann die entsprechenden Elemente für $\nu + 1$. Weil (2) eine orthogonale Zerlegung von ζ_ν ist, gilt nach (3)

$$\|\xi_\nu\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq \|\zeta_\nu\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq 2^{-\nu} \cdot CM$$

und daher wegen der Wahl von A und ε

$$\|\xi_\nu\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq \varepsilon \cdot \|\xi_\nu\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq \varepsilon \cdot 2^{-\nu} CM = 2^{-(\nu+1)} M.$$

Nach Lemma 5.13 existieren daher $\zeta_{\nu+1} \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ und $\eta_{\nu+1} \in C_{L^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ mit

$$\zeta_{\nu+1} = \xi_\nu + \delta^0(\eta_{\nu+1}) \text{ in } Z_{L^2}^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O}) \quad \text{sowie} \quad \|\zeta_{\nu+1}\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta_{\nu+1}\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq 2^{-(\nu+1)} CM.$$

Wir nehmen nun die eindeutige orthogonale Zerlegung $\zeta_{\nu+1} = \xi_{\nu+1} + \sigma_{\nu+1}$ von $\zeta_{\nu+1} \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ mit $\xi_{\nu+1} \in A$ und $\sigma_{\nu+1} \in S$, womit der Induktionsschritt der Konstruktion abgeschlossen ist.

Nach (2) und (1) gilt

$$\xi_\nu + \sigma_\nu = \xi_{\nu-1} + \delta^0(\eta_\nu)$$

und deshalb für gegebenes $k \in \mathbb{N}$

$$\xi_k + \sum_{\nu=0}^k \sigma_\nu = \xi_{k-1} + \delta^0(\eta_k) + \sum_{\nu=0}^{k-1} \sigma_\nu = \xi_{k-2} + \delta^0(\eta_{k-1} + \eta_k) + \sum_{\nu=0}^{k-2} \sigma_\nu = \dots = \xi + \delta^0\left(\sum_{\nu=0}^k \eta_\nu\right) \quad (\clubsuit)$$

in $Z_{L^2}^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$. Andererseits konvergieren wegen (3) die Reihen

$$\sigma = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_\nu \in S \quad \text{und} \quad \eta = \sum_{\nu=0}^{\infty} \eta_\nu \in C_{L^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$$

absolut in den jeweiligen Banachräumen. Außerdem gilt $\|\xi_k\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq \|\zeta_k\|_{L^2(\mathfrak{U})} \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$, und somit ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = 0$. Also folgt aus (\clubsuit) : $\sigma = \xi + \delta^0(\eta)$, was zu zeigen war. \square

Sei X ein topologischer Raum, \mathcal{F} eine Garbe abelscher Gruppen auf X , und $Y \subset X$ eine offene Teilmenge. Für jede offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X ist $\mathfrak{U} \cap Y := (U_i \cap Y)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von Y . Der Einschränkungshomomorphismus $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow Z^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{F})$ bildet Koränder auf Koränder ab, und induziert daher einen Einschränkungshomomorphismus $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{F})$. Indem man hiervon den induktiven Grenzwert (wie in Abschnitt 4.3) bildet, erhält man einen Einschränkungshomomorphismus $H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{F})$.

5.15 Satz. Sei X eine Riemannsche Fläche und $Y \subset\subset X$ eine relativ-kompakte, offene Teilmenge. Dann ist das Bild des Einschränkungshomomorphismus

$$H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O})$$

endlich-dimensional.

Beweis. Wir wählen eine endliche Familie von Karten $\mathfrak{U}^* = (U_i^*, z_i)_{i=1, \dots, n}$ sowie Familien offener Teilmengen $\mathfrak{W} \ll \mathfrak{V} \ll \mathfrak{U} \ll \mathfrak{U}^*$, so dass $Y \subset |\mathfrak{W}|$ und alle $z_i[U_i^*]$, $z_i[U_i]$ und $z_i[W_i]$ Kreisscheiben in \mathbb{C} sind.

Weil die U_i und die W_i zu Kreisscheiben biholomorph sind, gilt $H^1(U_i, \mathcal{O}) = 0$ und $H^1(W_i, \mathcal{O}) = 0$ nach Satz 5.3(a). Also sind \mathfrak{U} und \mathfrak{W} Leray-Überdeckungen von $|\mathfrak{U}|$ bzw. von $|\mathfrak{W}|$ bezüglich \mathcal{O} . Nach dem Satz von Leray (Satz 4.25) folgt

$$H^1(|\mathfrak{U}|, \mathcal{O}) = H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \quad \text{und} \quad H^1(|\mathfrak{W}|, \mathcal{O}) = H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O}).$$

Der Einschränkungshomomorphismus $H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O})$ kann wie folgt "faktoriert" (als Komposition von Einschränkungshomomorphismen geschrieben) werden:

$$H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(|\mathfrak{U}|, \mathcal{O}) = H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O}) = H^1(|\mathfrak{W}|, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O}).$$

Aus Lemma 5.14 folgt, dass das Bild des Einschränkungshomomorphismus $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ endlich-dimensional ist. Daher hat auch $H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O})$ endlich-dimensionales Bild. \square

Beweis von Theorem 5.12. Weil die Riemannsche Fläche X kompakt ist, kann in Satz 5.15 $Y = X$ gewählt werden. \square

5.4 Von der Existenz meromorpher Funktionen

Die Endlichkeitsaussagen aus dem vorherigen Abschnitt haben Folgen für die Existenz (nicht-konstanter) meromorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen.

5.16 Satz. Sei X eine Riemannsche Fläche, $Y \subset\subset X$ eine relative-kompakte, offene Teilmenge, und $a \in Y$. Dann existiert eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(Y)$ die in a einen Pol hat und auf $Y \setminus \{a\}$ holomorph ist.

Beweis. Nach Satz 5.15 ist die Dimension k des Bildes des Einschränkungshomomorphismus $H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O})$ endlich. Wir wählen eine holomorphe Karte (U_1, z) von X mit $a \in U_1 \subset Y$ und $z(a) = 0$. Außerdem setzen wir $U_2 = X \setminus \{a\}$. Dann ist $\mathfrak{U} = (U_1, U_2)$ eine offene Überdeckung von X . Wir betrachten für $j = 1, \dots, k+1$ den Kozykel $\zeta_j \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, der auf $U_1 \cap U_2 = U_1 \setminus \{a\}$ durch die dort holomorphe Funktion z^{-j} gegeben wird (und ansonsten die Kozykelbedingung erfüllt). Weil das Bild von $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O})$ eine Dimension $\leq k$ hat, sind die Kohomologieklassen zu $\zeta_j|_Y$ in $H^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O})$ mit $j \in \{1, \dots, k+1\}$ linear abhängig. Also existieren Zahlen $c_1, \dots, c_{k+1} \in \mathbb{C}$ (nicht alle Null) und eine Kokette $\eta = (f_1, f_2) \in C^0(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O})$ mit

$$\sum_{j=1}^{k+1} c_j \zeta_j = \delta^0(\eta) \quad \text{in } Z^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O}),$$

also

$$\sum_{j=1}^{k+1} c_j z^{-j} = f_2 - f_1 \quad \text{auf } U_1 \cap U_2 \cap Y.$$

Nach dem Garbenaxiom (LG) für die Garbe \mathcal{M} der meromorphen Funktionen auf Y existiert also eine Funktion $f \in \mathcal{M}(Y)$, die auf $U_1 \cap Y$ mit $f_1 + \sum_{j=1}^{k+1} c_j z^{-j}$ übereinstimmt, und auf $U_2 \cap Y = Y \setminus \{a\}$ mit f_2 übereinstimmt. Wegen der ersten Übereinstimmung hat f in a einen Pol, und wegen der zweiten Übereinstimmung ist f auf $Y \setminus \{a\}$ holomorph. Also hat f die gewünschten Eigenschaften. \square

5.17 Korollar. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Es seien paarweise verschiedene Punkte $a_1, \dots, a_n \in X$ und Zahlen $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ gegeben. Dann gibt es eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ mit $f(a_i) = c_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$.

Beweis. Weil X kompakt ist, kann in Satz 5.16 $Y = X$ gewählt werden. Danach existiert für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ eine meromorphe Funktion $f_i \in \mathcal{M}(X)$, die einen Pol in a_i hat, aber in allen anderen Punkten holomorph ist. Wir wählen ein $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \{f_i(a_j) - f_i(a_k) \mid j, k \neq i\}$. Für $j \neq i$ betrachten wir dann die meromorphe Funktion

$$g_{ij} = \frac{f_i - f_i(a_j)}{f_i - f_i(a_j) + \lambda_i} \in \mathcal{M}(X).$$

Sie ist in allen a_k mit $k \in \{1, \dots, n\}$ holomorph, und es gilt $g_{ij}(a_i) = 1$ und $g_{ij}(a_j) = 0$. Daher ist

$$h_i = \prod_{j \neq i} g_{ij}$$

holomorph in allen a_k mit $h_i(a_k) = \delta_{ik}$, und deshalb hat

$$f = \sum_{i=1}^n c_i h_i$$

die gewünschten Eigenschaften. \square

5.5 Die exakte Kohomologiesequenz

Um die Struktur von Kohomologiegruppen besser zu verstehen, wollen wir aus kurzen exakten Sequenzen von Garben (siehe Definition 4.12) exakte Sequenzen der zugehörigen Kohomologiegruppen konstruieren. Konkret: Sei X ein topologischer Raum, \mathcal{F} , \mathcal{G} und \mathcal{H} drei Garben von abelschen Gruppen auf X und φ und ψ zwei Garbenhomomorphismen, so dass

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben ist. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass dann

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{H}) \quad (\heartsuit)$$

eine "lange" exakte Sequenz ist. Damit diese Aussage sinnvoll ist, werden wir insbesondere sagen müssen, welche Abbildungen mit den Pfeilen \rightarrow in der Kohomologiesequenz gemeint sind.

Sei dazu $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein beliebiger Garbenhomomorphismus von Garben über X , etwa $\alpha = (\alpha_U)_{U \subset X}$ (siehe Definition 4.9). Dann werden durch α Gruppenhomomorphismen der Kohomologiegruppen

$$\alpha^0 : H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \quad \text{und} \quad \alpha^1 : H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G})$$

definiert. Dabei ist α^0 einfach die Abbildung $\alpha_X : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$ (man erinnere sich an die Definitionen am Schluss von Abschnitt 4.3: $H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ und $H^0(X, \mathcal{G}) = \mathcal{G}(X)$). Sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Dann betrachten wir die Abbildung

$$\alpha_{\mathfrak{U}} : C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}), \quad \xi = (f_{ij})_{i,j \in I} \mapsto \alpha_{\mathfrak{U}}(\xi) = (\alpha_{U_i \cap U_j}(f_{ij}))_{i,j \in I}.$$

Diese Abbildung bildet Kozykel auf Kozykel und Koränder auf Koränder ab, und induziert deshalb einen Homomorphismus

$$\bar{\alpha}_{\mathfrak{U}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}).$$

Wenn wir nun alle möglichen offenen Überdeckungen \mathfrak{U} von X betrachten, so respektieren die zugehörigen Homomorphismen $\bar{\alpha}_{\mathfrak{U}}$ die Äquivalenzrelation \sim aus der Konstruktion von $H^1(X, \mathcal{F})$ in Abschnitt 4.3. Deshalb wird durch die Homomorphismen $\bar{\alpha}_{\mathfrak{U}}$ ein Homomorphismus

$$\alpha^1 : H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G})$$

induziert.

5.18 Aufgabe. Let $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ be a sheaf-surjective homomorphism of sheaves. In this question we will define a homomorphism $\delta^\psi : H^0(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^1(X, \ker(\psi))$ called the *connecting homomorphism* [verbindender Homomorphismus] for ψ .

(a) For any $g \in H^0(X, \mathcal{H}) = \mathcal{H}(X)$, show the following:

- (i) Argue why for every point $p \in X$ there exists an open neighbourhood U_p and a section $f_p \in \mathcal{G}(U_p)$ such that $\psi(f_p) = g|_{U_p}$.
- (ii) The sections (f_p) define a 0-cochain f with respect to the cover $\{U_p\}$. Define $h = \delta^0(f)$. Show that $\psi(h) = 0$.
- (iii) Explain why h is a cocycle of the sheaf $\ker(\psi)$ but is not necessarily a coboundary of it.
- (iv) We say that $\delta^\psi(g)$ is the class in $H^1(X, \ker(\psi))$ given by h . Show that this does not depend on the choice of neighbourhoods U_p or sections f_p .

(b) Show that δ^ψ is a homomorphism.

Wir betrachten die exakte Sequenz von Garben

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \rightarrow 0,$$

wobei \mathcal{F} , \mathcal{G} , \mathcal{H} Garben auf X und φ , ψ Homomorphismen von Garben sind. Die Exaktheit der Sequenz bei \mathcal{H} bedeutet, dass ψ garben-surjektiv ist. Wir betrachten den verbindenden Homomorphismus

$$\delta^\psi : H^0(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^1(X, \ker(\psi))$$

gemäß Aufgabe 5.18. Weil die Garbensequenz bei \mathcal{G} exakt ist, ist $\ker(\psi)$ gleich dem Garbenbild $\text{im}(\varphi)$. Für $h \in H^0(X, \mathcal{H})$ ist daher $\delta^\psi(h) \in H^1(X, \text{im}(\varphi))$, und deshalb existiert ein $\delta^*(h) \in H^1(X, \mathcal{F})$ mit $\varphi^1(\delta^*(h)) = \delta^\psi(h)$. Dadurch wird ein Homomorphismus

$$\delta^* : H^0(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F})$$

definiert, den wir den *verbindenden Homomorphismus* [connecting homomorphism] der exakten Sequenz von Garben nennen.

Wir können nun die Hauptaussage dieses Abschnitts formulieren, und dabei die Pfeile in der Kohomologiesequenz (\heartsuit) "beschriften":

5.19 Theorem. Sei X ein topologischer Raum, \mathcal{F} , \mathcal{G} und \mathcal{H} drei Garben von abelschen Gruppen auf X und $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ und $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ zwei Garbenhomomorphismen, so dass

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \rightarrow 0 \quad (*G)$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben ist. Dann ist die folgenden "lange" Sequenz von Homomorphismen von Kohomologiegruppen exakt:

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^0} H^0(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^0} H^0(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^1} H^1(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^1} H^1(X, \mathcal{H}) . \quad (*H)$$

Beweis. Weil die Sequenz (*G) exakt ist, ist nach Aufgabe 4.15(a) die Sequenz

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^0} H^0(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^0} H^0(X, \mathcal{H})$$

exakt. Somit ist die Sequenz (*H) exakt bei $H^0(X, \mathcal{F})$ und bei $H^0(X, \mathcal{G})$.

Zur Exaktheit von (*H) bei $H^0(X, \mathcal{H})$: Zu zeigen ist $\text{im}(\psi^0) = \ker(\delta^*)$. Sei $g \in H^0(X, \mathcal{G})$ gegeben und $h := \psi^0(g)$. Dann ist $\delta^\psi(h) = 0$ und daher auch $\delta^*(h) = 0$. Also ist $h \in \ker(\delta^*)$. — Sei umgekehrt $h \in \ker(\delta^*)$ gegeben. Nach Aufgabe 5.18 existiert eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X , und ein $(g_i)_{i \in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$, so dass $\delta^\psi(h)$ durch $\delta^0((g_i)) \in Z^1(\mathfrak{U}, \ker(\psi))$, repräsentiert wird. Dann wird $\delta^*(h)$ durch $(f_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ mit $\varphi^1((f_{ij})) = \delta^0((g_i))$ repräsentiert. Wegen $\delta^*(h) = 0$ ist $(f_{ij}) \in B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, also existiert ein $(f_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ mit $\delta^0((f_i)) = (f_{ij})$. Sei $\tilde{g}_i = g_i - \varphi(f_i)$. Dann gilt jeweils

$$\tilde{g}_i - \tilde{g}_j = (g_i - \varphi(f_i)) - (g_j - \varphi(f_j)) = (g_i - g_j) - \varphi(f_{ij}) = (g_i - g_j) - (g_i - g_j) = 0 \quad \text{auf } U_i \cap U_j .$$

Nach dem Garbenaxiom (LG) existiert also ein $g \in H^0(X, \mathcal{G})$ mit $g|_{U_i} = \tilde{g}_i$ für alle $i \in I$. Für dieses gilt wegen $\text{im}(\varphi) \subset \ker(\psi)$

$$\psi(\tilde{g}_i) = \psi(g_i - \varphi(f_i)) = \psi(g_i) = h \quad \text{auf } U_i ,$$

und somit $h \in \text{im}(\psi^0)$.

Zur Exaktheit von (*H) bei $H^1(X, \mathcal{F})$: Zu zeigen ist $\text{im}(\delta^*) = \ker(\varphi^1)$. Dabei ergibt sich $\text{im}(\delta^*) \subset \ker(\varphi^1)$ unmittelbar aus der Konstruktion des verbindenden Homomorphismus δ^* . Sei umgekehrt $\xi \in \ker(\varphi^1)$ gegeben, und repräsentiert durch $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Wegen $\varphi^1(\xi) =$

$0 \in H^1(X, \mathcal{G})$ existiert dabei ein $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ mit $(\varphi(f_{ij})) = \delta^0((g_i))$. Nun gilt wegen $\text{im}(\varphi) \subset \ker(\psi)$

$$\psi(g_j) - \psi(g_i) = \psi(g_j - g_i) = \psi(\varphi(f_{ij})) = 0 \quad \text{auf } U_i \cap U_j.$$

Somit existiert nach dem Garbenaxiom (LG) ein $h \in H^0(X, \mathcal{H})$ mit $h|_{U_i} = \psi(g_i)$ für alle i . Aus der Konstruktion von δ^* folgt nun $\delta^*(h) = \xi$ und somit $\xi \in \text{im}(\delta^*)$.

Zur Exaktheit von $(*H)$ bei $H^1(X, \mathcal{G})$: Zu zeigen ist $\text{im}(\varphi^1) = \ker(\psi^1)$. Weil nach Aufgabe 4.15(a) die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}(U_i \cap U_j)$$

für alle $i, j \in I$ exakt ist, gilt jedenfalls $\text{im}(\varphi^1) \subset \ker(\psi^1)$. — Sei umgekehrt $\eta \in \ker(\psi^1) \subset H^1(X, \mathcal{G})$ gegeben, und durch $(g_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ bezüglich einer offenen Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ repräsentiert. Wegen $\psi^1(\eta) = 0 \in H^1(X, \mathcal{H})$ existiert ein $(h_i)_{i \in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{H})$ mit $\psi(g_{ij}) = h_j - h_i$. Weil ψ wegen der Exaktheit der Sequenz $(*G)$ garben-surjektiv ist, existiert zu jedem $x \in X$ ein $\tau(x) \in I$, eine Umgebung V_x von x , die in $U_{\tau(x)}$ enthalten ist, und ein Element $g_x \in \mathcal{G}(V_x)$ mit $\psi(g_x) = h_{\tau(x)}|_{V_x}$. Dann ist $\mathfrak{V} := (V_x)_{x \in X}$ eine offene Überdeckung von X , und zwar eine Verfeinerung der Überdeckung \mathfrak{U} . Sei weiter $\tilde{g}_{xy} = g_{\tau(x), \tau(y)}|_{V_x \cap V_y}$, dann ist $(\tilde{g}_{xy})_{x,y \in X} \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$ ein weiterer Repräsentant der Kohomologiekategorie η . Sei weiter $\hat{g}_{xy} = \tilde{g}_{xy} + g_x - g_y$. Dann ist $((\hat{g}_{xy}))_{x,y \in X} \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$ noch ein Repräsentant von η , und es gilt

$$\psi(\hat{g}_{xy}) = \psi(\tilde{g}_{xy}) + \psi(g_x - g_y) = \psi(g_{\tau(x), \tau(y)}) + (h_{\tau(x)} - h_{\tau(y)}) = (h_{\tau(y)} - h_{\tau(x)}) + (h_{\tau(x)} - h_{\tau(y)}) = 0.$$

Damit ist $\hat{g}_{xy} \in \ker(\psi) = \text{im}(\varphi)$, also existiert $f_{xy} \in \mathcal{F}(V_x \cap V_y)$ mit $\varphi(f_{xy}) = \hat{g}_{xy}$. Die Kohomologiekategorie $\xi \in H^1(X, \mathcal{F})$ zu $(f_{xy})_{x,y \in X} \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ erfüllt $\varphi^1(\xi) = \eta$, und somit ist $\eta \in \text{im}(\varphi^1)$. \square

5.20 Korollar. In der Situation von Theorem 5.19 gelte $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$. Dann ist

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong \mathcal{H}(X) / \psi^0[\mathcal{G}(X)].$$

Beweis. Wegen $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$ ist nach Theorem 5.19 die Sequenz

$$\mathcal{G}(X) \xrightarrow{\psi^0} \mathcal{H}(X) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow 0$$

exakt. Daraus folgt die Behauptung. \square

5.21 Aufgabe. Use the constructions of the present section to give an explicit description of the isomorphism in Korollar 5.20.

Wir sind nun in der Lage, das Lemma von Dolbeault (Theorem 5.1), das sich auf Kreisscheiben in \mathbb{C} bezieht, zum Theorem von Dolbeault für allgemeine Riemannsche Flächen zu verallgemeinern:

5.22 Theorem. (Theorem von Dolbeault) Sei X eine Riemannsche Fläche. Wir bezeichnen mit \mathcal{E} , $\mathcal{E}^{1,0}$, $\mathcal{E}^{0,1}$ und $\mathcal{E}^{(2)}$ die Garben der glatten Funktionen, der glatten 1-Formen vom Typ $(1,0)$, der glatten 1-Formen vom Typ $(0,1)$ bzw. der glatten 2-Formen auf X . Außerdem seien \mathcal{O} und Ω die Garbe der holomorphen Funktionen bzw. der holomorphen 1-Formen vom Typ $(1,0)$ auf X . Dann gilt:

- (a) $H^1(X, \mathcal{O}) \cong \mathcal{E}^{0,1}(X)/d''\mathcal{E}(X)$
 (b) $H^1(X, \Omega) \cong \mathcal{E}^{(2)}(X)/d\mathcal{E}^{1,0}(X)$.

Beweis. Für (a). Die Garbensequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{0,1} \rightarrow 0$$

ist exakt, dabei folgt die Exaktheit bei $\mathcal{E}^{0,1}$ aus dem Lemma von Dolbeault (Theorem 5.1). Außerdem gilt $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$ nach Aussage 4.24(a). Mit Korollar 5.20 ergibt sich nun die Behauptung.

Für (b). Wir argumentieren analog mit der exakten Garbensequenz

$$0 \rightarrow \Omega \rightarrow \mathcal{E}^{1,0} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)} \rightarrow 0$$

und $H^1(X, \mathcal{E}^{1,0}) = 0$. Die Exaktheit bei $\mathcal{E}^{(2)}$ folgt wieder aus dem Lemma von Dolbeault. \square

Auf Riemannschen Flächen X ist jede exakte Differentialform geschlossen, aber im Allgemeinen nicht jede geschlossene Differentialform exakt. Diese Frage ist mit einem anderen Koketten-Komplex verbunden, nämlich dem der *deRham-Kohomologie*:

$$0 \rightarrow \mathcal{E}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(1)}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)}(X) \rightarrow \dots,$$

dabei ist $\mathcal{E}^{(q)}(X)$ der Raum der glatten q -Differentialformen auf X . Hier entsprechen Kozykel geschlossenen Differentialformen und Koränder exakten Differentialformen. Aus diesem Koketten-Komplex ergibt sich die *erste deRham-Kohomologiegruppe*

$$\begin{aligned} \text{Rh}^1(X) &:= \frac{\text{Kozykel}}{\text{Koränder}} = \frac{\ker(\mathcal{E}^{(1)}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)}(X))}{\text{im}(\mathcal{E}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(1)}(X))} \\ &= \frac{\text{geschlossene 1-Formen auf } X}{\text{exakte 1-Formen auf } X}. \end{aligned}$$

$\text{Rh}^1(X)$ beschreibt also, in welchem Umfang geschlossene 1-Formen auf X nicht exakt sind. Es gilt genau dann $\text{Rh}^1(X) = 0$, wenn auf X jede geschlossene 1-Form auch exakt ist. In Kapitel 3 haben wir beim Riemannschen Abbildungssatz gesehen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn X einfach zusammenhängend ist. Das folgende Theorem von deRham stellt einen Zusammenhang zwischen der deRham-Kohomologie und unserer Garben-(Čech-)Kohomologie her.

5.23 Theorem. Sei X eine Riemannschen Fläche. Dann gilt

$$\text{Rh}^1(X) \cong H^1(X, \mathbb{C}).$$

Beweis. Die Garbe \mathcal{Z} sei der Kern des Garbenhomomorphismus $d : \mathcal{E}^{(1)} \rightarrow \mathcal{E}^{(2)}$, also die Garbe der geschlossenen, glatten Differentialformen auf X . Dann ist die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d} \mathcal{Z} \rightarrow 0$$

exakt, die Exaktheit bei \mathcal{Z} folgt dabei aus der Tatsache, dass *lokal* jede geschlossene Differentialform exakt ist. Da $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$ nach Aussage 4.24(a) gilt, folgt die Behauptung wieder aus Korollar 5.20. \square

5.6 Das Divisorenkalkül

Unser nächstes Ziel ist der Satz von Riemann-Roch, der eine Aussage über die Existenz von meromorphen Funktionen auf kompakten Riemannschen Flächen macht, die Pole höchstens an vorgegebenen Stellen und mit höchstens einer vorgegebenen Ordnung haben. Um die Lage der potentiellen Polstellen effizient angeben zu können, führen wir das Konzept eines *Divisors* ein.

5.24 Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche.

- (a) Ein *Divisor* [divisor] auf X ist eine Abbildung $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$, so dass $\text{supp}(D) := \{x \in X \mid D(x) \neq 0\}$ diskret ist. Die Menge der Divisoren auf X wird mit $\text{Div}(X)$ bezeichnet; sie ist eine abelsche Gruppe mittels punktweiser Addition. Sind $D, D' \in \text{Div}(X)$, so schreiben wir $D \leq D'$, wenn $D(x) \leq D'(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Hierdurch wird eine Partialordnung auf $\text{Div}(X)$ definiert.
- (b) Sei $f \in \mathcal{M}(X)$. Dann bezeichnen wir die Abbildung $x \mapsto \text{ord}_x(f)$ (siehe Aussage 1.10*) mit (f) . Für $f \neq 0$ ist (f) ein Divisor auf X . Für $D \in \text{Div}(X)$ sagen wir, dass f ein *Vielfaches* [multiple] des Divisors D ist, wenn $(f) \geq D$ gilt. Die Funktion f ist genau dann holomorph, wenn $(f) \geq 0$ ist.
- (c) Ein Divisor $D \in \text{Div}(X)$ heißt *Hauptdivisor* [principal divisor], wenn es ein $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ mit $(f) = D$ gibt. Zwei Divisoren $D, D' \in \text{Div}(X)$ heißen *äquivalent* [equivalent], wenn $D - D'$ ein Hauptdivisor ist.
- (d) Sei $\omega \in \mathcal{M}^{(1,0)}(X)$ eine meromorphe 1-Form vom Typ $(1,0)$. Für $x \in X$ definieren wir $\text{ord}_x(\omega) = \text{ord}_x(f)$, wenn $\omega = f(z) dz$ bezüglich einer Karte z von X gilt. (Diese Definition ist offenbar unabhängig von der Wahl der Karte.) Dann ist die Abbildung $x \mapsto \text{ord}_x(\omega)$, die wir mit (ω) bezeichnen, ebenfalls ein Divisor auf X .
- (e) Ein Divisor $D \in \text{Div}(X)$ heißt *kanonischer Divisor* [canonical divisor], wenn es ein $\omega \in \mathcal{M}^{(1,0)}(X) \setminus \{0\}$ mit $(\omega) = D$ gibt.

5.25 Aufgabe. Let X be a Riemann surface. Show the following:

- (a) For $f, g \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ and $\omega \in \mathcal{M}^{(1,0)}(X) \setminus \{0\}$ we have:

$$(fg) = (f) + (g) \quad (1/f) = -(f) \quad (f\omega) = (f) + (\omega).$$

- (b) Any two canonical divisors on X are equivalent to each other.

Wir identifizieren Punkte $x \in X$ mit dem Divisor $D \in \text{Div}(X)$ mit $D(x) = 1$ und $D(x') = 0$ für alle $x' \in X \setminus \{x\}$. Daraus resultiert eine häufig benutzte Schreibweise von Divisoren als \mathbb{Z} -Linearkombination von Punkten: Sind $x_1, \dots, x_n \in X$ verschiedene Punkte und $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen, so wird mit

$$k_1 x_1 + \dots + k_n x_n = \sum_{j=1}^n k_j x_j$$

*Außerdem vereinbaren wir als Konvention $\text{ord}_x(f) = \infty$, falls f auf einer ganzen Umgebung von x identisch verschwindet.

der Divisor

$$D : X \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto \begin{cases} k_j & \text{für } x = x_j \text{ für ein } j \in \{1, \dots, n\} \\ 0 & \text{für } x \in X \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \end{cases}$$

bezeichnet. Wenn die Punkte von X auch "Zahlen" sind (z.B. wenn X eine Teilmenge von \mathbb{C} ist), muss man dabei allerdings aufpassen, dass es zu keinen Missverständnissen kommt.

5.26 Beispiel. Sei $X = \mathbb{C}$ und $f(z) = \frac{z^2-1}{z^2}$. Dann ist $(f) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 \in \text{Div}(\mathbb{C})$, das heißt: (f) ist der Divisor D mit $D(1) = D(-1) = 1$, $D(0) = -2$ und $D(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1, 0\}$.

Sei X nun eine *kompakte* Riemannsche Fläche. Dann ist für jedes $D \in \text{Div}(X)$ die Menge $\text{supp}(D)$ endlich, und daher

$$\text{deg}(D) := \sum_{x \in X} D(x)$$

eine endliche, ganze Zahl, die der *Grad* [degree] des Divisors D genannt wird. Hierdurch wird ein Gruppensomorphismus abelscher Gruppen

$$\text{deg} : \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

definiert. Weil meromorphe Funktionen auf kompakten Riemannschen Flächen gleich viele Nullstellen und Pole (jeweils gezählt mit Vielfachheit) haben, gilt $\text{deg}(D) = 0$ für jeden Hauptdivisor D .

Sei X eine Riemannsche Fläche und $D \in \text{Div}(X)$. Für jede offene Teilmenge $U \subset X$ sei $\mathcal{O}_D(U)$ der kommutative Ring mit Eins derjenigen meromorphen Funktionen $f \in \mathcal{M}(U)$, die Vielfache von $-D$ sind, d.h. für die $(f) \geq -D$ gilt. Ausführlicher:

$$\mathcal{O}_D(U) = \{f \in \mathcal{M}(U) \mid \text{ord}_x(f) \geq -D(x) \text{ für alle } x \in U\}.$$

Dann wird durch $\mathcal{O}_D := (\mathcal{O}_D(U))_{U \subset X}$ mit den üblichen Einschränkungshomomorphismen eine Garbe von kommutativen Ringen mit Eins definiert, und zwar eine Untergarbe von \mathcal{M} . Die Schnitte von \mathcal{O}_D sind meromorphe Funktionen mit folgenden Eigenschaften: An den $x \in X$ mit $D(x) > 0$ können sie Pole höchstens der Ordnung $D(x)$ haben, an den $x \in X$ mit $D(x) < 0$ müssen sie Nullstellen mindestens der Ordnung $-D(x)$ haben, und in den $x \in X$ mit $D(x) = 0$ sind sie holomorph.

Daher enthält \mathcal{O}_D genau dann die Garbe \mathcal{O} , wenn $D \geq 0$ ist. Insbesondere gilt $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}$ für $D = 0$. Sind $D, D' \in \text{Div}(X)$ äquivalente Divisoren, so sind \mathcal{O}_D und $\mathcal{O}_{D'}$ zueinander isomorph, und zwar wird für $\psi \in \mathcal{M}(X)$ mit $D - D' = (\psi)$ durch

$$\mathcal{O}_D(U) \rightarrow \mathcal{O}_{D'}(U), f \mapsto \psi \cdot f$$

ein entsprechender Garben-Isomorphismus definiert. Insbesondere gilt: Ist D ein Hauptdivisor, so ist \mathcal{O}_D isomorph zu \mathcal{O} .

Falls X kompakt ist, gilt außerdem: Für $D \in \text{Div}(X)$ mit $\text{deg}(D) < 0$ ist $H^0(X, \mathcal{O}_D) = \mathcal{O}_D(X) = 0$. Das liegt daran, dass für jedes $f \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$ aus der Annahme $f \neq 0$ wegen $(f) \geq -D$ der Widerspruch folgt: $0 = \text{deg}(f) \geq -\text{deg}(D) > 0$. Für $D = 0$ ist $H^0(X, \mathcal{O}_D) = H^0(X, \mathcal{O}) = \mathbb{C}$. Für $D > 0$ kann es hingegen nicht-konstante, globale Schnitte in \mathcal{O}_D geben, so

dass wir die Frage nach der Dimension des Vektorraums $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ stellen können. Der Satz von Riemann-Roch, den wir im folgenden Abschnitt behandeln, gibt Antwort auf diese Frage.

In analoger Weise bezeichnen wir für $D \in \text{Div}(X)$ mit Ω_D die Garbe der meromorphen 1-Formen ω vom Typ $(1,0)$ mit $(\omega) \geq -D$. Für $D = 0$ ist $\Omega = \Omega_0$ die Garbe der holomorphen 1-Formen vom Typ $(1,0)$. Ist $\omega \neq 0$ eine meromorphe 1-Form vom Typ $(1,0)$ auf X und $K = (\omega)$, so wird für jedes $D \in \text{Div}(X)$ durch

$$\mathcal{O}_{D+K}(U) \rightarrow \Omega_D(U), f \mapsto f \cdot \omega$$

ein Isomorphismus von Garben $\mathcal{O}_{D+K} \rightarrow \Omega_D$ definiert.

5.7 Der Satz von Riemann-Roch

5.27 Theorem. (Satz von Riemann-Roch) Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche von Geschlecht $g \in \mathbb{N}_0$ (siehe Definition 5.10 und Theorem 5.12) und $D \in \text{Div}(X)$. Dann sind die Vektorräume $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ und $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ endlich-dimensional, und es gilt:

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg(D).$$

Für $D \geq 0$ ist in der Situation des Satzes von Riemann-Roch in jedem Fall $\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 1$, denn die konstanten Funktionen auf X sind globale Schnitte von \mathcal{O}_D . Nicht-konstante Funktionen, die Schnitte von \mathcal{O}_D sind, gibt es genau dann, wenn $\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) > 1$ ist; sie haben notwendigerweise tatsächlich mindestens eine Polstelle. Ihre Existenz und ggfs. die Dimension ihres Vektorraums hängt nach dem Satz von Riemann-Roch mit dem *Spezialitätsindex* [index of speciality]

$$i(D) := \dim H^1(X, \mathcal{O}_D)$$

zusammen. Man sagt, dass der Divisor D *speziell* [special] ist, wenn $i(D) > 0$ ist. Der Spezialitätsindex ist nach unserem bisherigen Wissensstand schwer zu verstehen; im kommenden Abschnitt werden wir ihn aber mittels der *Serre-Dualität* mit $\dim H^0(X, \Omega_{-D})$ in Verbindung bringen. Als Folge wird sich ergeben, dass $i(D) = 0$ für jeden Divisor D mit $\deg(D) > 2g - 2$ gilt. In jedem Fall gilt $i(D) \geq 0$, weswegen der Satz von Riemann-Roch die Unterschranke

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 1 - g + \deg(D)$$

ergibt.

Andererseits gilt für $D < 0$: $H^0(X, \mathcal{O}_D) = 0$ und daher $i(D) = g - 1 - \deg(D)$.

Das folgende Korollar stellt eine Verfeinerung von Satz 5.16 dar:

5.28 Korollar. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche von Geschlecht g und $x \in X$. Dann gibt es eine nicht-konstante, meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$, die in x einen Pol höchstens von Ordnung $g + 1$ hat, und ansonsten holomorph ist.

Beweis. Sei $D = (g + 1) \cdot x \in \text{Div}(X)$ (im Sinne unserer Identifikation von Punkten mit Divisoren). Nach dem Satz von Riemann-Roch (Theorem 5.27) ist

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg(D) + i(D) \geq 1 - g + \deg(D) = 2.$$

Deshalb existiert eine nicht-konstante Funktion $f \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$, und diese hat die gewünschten Eigenschaften. \square

Korollar 5.28 besagt, dass in der beschriebenen Situation $f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ eine "verzweigte" Überlagerung mit höchstens $g + 1$ Blättern über der Riemannschen Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$ ist.

5.29 Korollar. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann sind äquivalent:

- (a) X hat das Geschlecht Null.
- (b) X ist einfach zusammenhängend.
- (c) X ist biholomorph äquivalent zur Riemannschen Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$.

Beweis. Die Äquivalenz von (b) und (c) folgt aus dem großen Riemannschen Abbildungssatz (Theorem 3.42), und die Implikation (c) \Rightarrow (a) folgt aus Satz 5.3(b). Hat umgekehrt X das Geschlecht Null, so existiert nach Korollar 5.28 eine nicht-konstante meromorphe Funktion f auf X , die in einem Punkt einen Pol erster Ordnung hat, und ansonsten holomorph ist. Eine solche Abbildung ist eine biholomorphe Abbildung $f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. \square

Der Beweis des Satzes von Riemann-Roch beruht auf einem Induktionsargument, und zwar werden wir zu einer bestimmten kurzen exakten Garbensequenz die zugehörige exakte Kohomologiesequenz (Theorem 5.19) verwenden. In der Garbensequenz spielt die sogenannte Wolkenkratzer-Garbe eine Rolle, die wir jetzt einführen:

Sei X eine Riemannsche Fläche, und $p \in X$. Für jede offene Menge $U \subset X$ sei

$$\mathbb{C}_p(U) := \begin{cases} \mathbb{C} & \text{falls } p \in U \\ 0 & \text{falls } p \notin U \end{cases}.$$

In einer Übungsaufgabe ist gezeigt worden, dass hierdurch mit geeigneten Einschränkungshomomorphismen eine Garbe \mathbb{C}_p auf X definiert wird. Sie heißt die *Wolkenkratzer-Garbe* [skyscraper sheaf] in p . Offenbar gilt $H^0(X, \mathbb{C}_p) = \mathbb{C}$.

5.30 Aussage. $H^1(X, \mathbb{C}_p) = 0$.

Beweis. Für jede beliebige offene Überdeckung \mathfrak{U} von X gibt es eine Verfeinerung \mathfrak{V} von \mathfrak{U} , so dass p in nur einer offenen Teilmenge aus \mathfrak{V} enthalten ist. Dann gilt $Z^1(\mathfrak{V}, \mathbb{C}_p) = 0$ und somit auch $H^1(\mathfrak{V}, \mathbb{C}_p) = 0$. Deswegen ist $H^1(X, \mathbb{C}_p) = 0$. \square

Beweis des Satzes von Riemann-Roch (Theorem 5.27). Wir zeigen zunächst, dass der Satz von Riemann-Roch für $D = 0$ gilt: In diesem Fall ist $H^0(X, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(X) = \mathbb{C}$, also $\dim H^0(X, \mathcal{O}) = 1$. Außerdem ist $\dim H^1(X, \mathcal{O}) = g$ per Definition und $\deg(D) = 0$.

Es sei nun $D \in \text{Div}(X)$ ein beliebiger Divisor, $p \in X$ ein beliebiger Punkt, und $D' := D + p \in \text{Div}(X)$. Wir zeigen, dass wenn der Satz von Riemann-Roch für einen der beiden Divisoren D und D' gilt, dass dann dieser Satz auch für den anderen Divisor gilt. Weil jeder Divisor auf X in der Form

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n - q_1 - q_2 - \dots - q_m$$

mit Punkten $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m \in X$ geschrieben werden kann, folgt dann induktiv, dass der Satz von Riemann-Roch für alle Divisoren auf X gilt.

Wir werden eine kurze exakte Sequenz von Garben

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_D \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}_{D'} \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}_p \rightarrow 0 \quad (\diamond 1)$$

definieren. Wegen $D \leq D'$ ist $\mathcal{O}_D \subset \mathcal{O}_{D'}$, und ι sei die dazu gehörende Inklusionsabbildung von Garben. Um den Garben-Homomorphismus β zu definieren, wählen wir eine Karte (V, z) von X mit $p \in V$ und $z(p) = 0$. Sei nun eine offene Umgebung $U \subset X$ vorgegeben. Ist $p \notin U$, so sei $\beta_U \equiv 0$. Ist $p \in U$, so stellen wir $f \in \mathcal{O}_{D'}(U)$ bezüglich z als Laurent-Reihenentwicklung dar:

$$f = \sum_{k=-(n+1)}^{\infty} c_k z^k,$$

dabei ist $n = D(p)$ und $c_k \in \mathbb{C}$. Wir setzen dann

$$\beta_U(f) := c_{-(n+1)} \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_p(U).$$

Hierdurch wird offensichtlich ein garben-surjektiver Garben-Homomorphismus $\beta : \mathcal{O}_{D'} \rightarrow \mathbb{C}_p$ definiert, so dass die kurze Sequenz $(\diamond 1)$ exakt ist. Nach Theorem 5.19 ist dann die zugehörige Kohomologiesequenz ebenfalls exakt:

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{\iota^0} H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X, \mathbb{C}_p) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{\iota^1} H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \xrightarrow{\beta^1} H^1(X, \mathbb{C}_p).$$

Wir haben $H^0(X, \mathbb{C}_p) = \mathbb{C}$ und $H^1(X, \mathbb{C}_p) = 0$ nach Aussage 5.30, und daher hat diese exakte Sequenz die folgende Gestalt:

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{\iota^0} H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \xrightarrow{\beta^0} \mathbb{C} \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{\iota^1} H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \xrightarrow{\beta^1} 0. \quad (\diamond 2)$$

Diese exakte Sequenz "spaltet" in zwei kurze exakte Sequenzen: Es sei $V = \text{im}(\beta^0)$ und $W = \mathbb{C}/V$. Dann ist die Exaktheit von $(\diamond 2)$ äquivalent zur Exaktheit der folgenden beiden Sequenzen:

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{\iota^0} H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \xrightarrow{\beta^0} V \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad 0 \rightarrow W \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{\iota^1} H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \xrightarrow{\beta^1} 0.$$

Deshalb sind alle auftretenden Vektorräume endlich-dimensional, und ihre Dimensionen sind wie folgt verknüpft:

$$\begin{aligned} \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) &= \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) + \dim V \\ \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) &= \dim W + \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}). \end{aligned}$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen und Anwendung von $\dim(V) + \dim(W) = 1 = \deg(D') - \deg(D)$ ergibt sich

$$H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) + H^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) + \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) + \deg(D') - \deg(D),$$

also

$$H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) - \deg(D') = H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) - \deg(D).$$

Daraus folgt, dass der Satz von Riemann-Roch genau dann für D' gilt, wenn er für D gilt. \square

5.8 Die Serre-Dualität

Im ganzen Abschnitt sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $g = \dim H^1(X, \mathcal{O})$ ihr Geschlecht.

Eine Betrachtungsweise für die Serre-Dualität ist, dass durch sie für $D \in \text{Div}(X)$ ein Vektorraum-Isomorphismus $\iota_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ konstruiert wird. Das bedeutet insbesondere, dass der Spezialitätsindex $i(D) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_D)$, der im Satz von Riemann-Roch eine wesentliche Rolle spielt, gleich der Dimension von $H^0(X, \Omega_{-D})$, des Raums der meromorphen Differentialformen ω von Typ $(1, 0)$ auf X mit $(\omega) \geq D$, ist.

Vorweg merken wir an, dass nach dem Satz von Riemann-Roch (Theorem 5.27) die Vektorräume $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ und $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ für jeden Divisor $D \in \text{Div}(X)$ endlich-dimensional sind. Am Ende von Abschnitt 5.6 hatten wir angemerkt, dass die Garbe Ω_D zu \mathcal{O}_{D+K} isomorph ist, wobei K ein kanonischer Divisor auf X ist, d.h. $K = (\omega)$ für eine nicht-verschwindende, holomorphe 1-Form auf X . Aus diesem Grund sind auch die Vektorräume $H^0(X, \Omega_D)$ und $H^1(X, \Omega_D)$ endlich-dimensional. Auf der anderen Seite gilt die folgende Aussage:

5.31 Aussage. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann existiert eine Konstante $k_0 \in \mathbb{Z}$, so dass für jeden Divisor $D \in \text{Div}(X)$ gilt: $\dim H^0(X, \Omega_D) \geq \deg(D) + k_0$.

Beweis. Sei K ein kanonischer Divisor auf X , d.h. es existiert eine meromorphe 1-Form $\omega \neq 0$ vom Typ $(1, 0)$ mit $(\omega) = K$. Wir setzen $k_0 = 1 - g + \deg(K)$.[†] Weil die Garbe Ω_D zu \mathcal{O}_{D+K} isomorph ist, gilt nach dem Satz von Riemann-Roch (Theorem 5.27)

$$\begin{aligned} \dim H^0(X, \Omega_D) &= \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D+K}) = i(D+K) + 1 - g + \deg(D+K) \\ &\geq 1 - g + \deg(D) + \deg(K) = \deg(D) + k_0. \end{aligned}$$

□

In Aussage und Definition 1.38 hatten wir das Residuum für meromorphe 1-Formen vom Typ $(1, 0)$ auf X definiert. Wir führen nun ein (Gesamt-)Residuum für Kohomologieklassen in $H^1(X, \Omega)$ ein: Nach dem Theorem von Dolbeault, Theorem 5.22(b), ist $H^1(X, \Omega) \cong \mathcal{E}^{(2)}(X)/d\mathcal{E}^{1,0}(X)$. Ein gegebenes $\xi \in H^1(X, \Omega)$ wird also bezüglich dieses Isomorphismus durch ein $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$ repräsentiert. Wir definieren das *Residuum* von ξ als

$$\text{Res}(\xi) := \frac{1}{2\pi i} \int_X \omega. \quad (\star)$$

Dieses Flächenintegral ist endlich, weil X als kompakt vorausgesetzt ist. Wegen des Satz von Stokes Satz 1.33 für die unberandete Fläche X ist diese Definition unabhängig von der Wahl des Repräsentanten ω für ξ . Auf diese Weise erhalten wir eine lineare Abbildung

$$\text{Res} : H^1(X, \Omega) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Sie ist offensichtlich nicht identisch Null, und daher surjektiv.

[†]Wir werden gleich sehen (Aussage 5.36), dass aus der Serre-Dualität folgt, dass $\deg(K) = 2g - 2$ und somit $k_0 = g - 1$ ist.

Sei nun $D \in \text{Div}(X)$. Wir definieren eine bilineare Abbildung $H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \rightarrow \mathbb{C}$ sowie — damit zusammenhängend — die oben erwähnte lineare Abbildung $\iota_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$: Durch das Produkt

$$\Omega_{-D} \times \mathcal{O}_D \rightarrow \Omega, \quad (\omega, f) \mapsto \omega f$$

wird eine bilineare Abbildung

$$H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \rightarrow H^1(X, \Omega), \quad (\omega, \xi) \mapsto \omega \xi$$

induziert. Durch Verkettung dieser bilinearen Abbildung mit $\text{Res} : H^1(X, \Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ erhalten wir eine Bilinearform

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\omega, \xi) \mapsto \langle \omega, \xi \rangle := \text{Res}(\omega \xi).$$

Wir definieren nun die lineare Abbildung

$$\iota_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^*, \quad \omega \mapsto \langle \omega, \cdot \rangle.$$

Inhalt des Serre'schen Dualitätstheorems ist es, dass die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (in beiden Argumenten) nicht-entartet ist; eine derartige nicht-entartete Bilinearform nennt man eine *Paarung* zwischen $H^0(X, \Omega_{-D})$ und $H^1(X, \mathcal{O}_D)$. Äquivalent zur Nicht-Entartung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist die Aussage, dass ι_D ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

5.32 Theorem. (Serre-Dualität.) Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $D \in \text{Div}(X)$. Dann ist $\iota_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ ein Vektorraum-Isomorphismus.

Die Serre-Dualität hat vielerlei Konsequenzen.

Als erstes ergibt sich aus ihr die folgende Gleichheit von Dimensionen

$$i(D) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^0(X, \Omega_{-D}),$$

weswegen der Satz von Riemann-Roch (Theorem 5.27) für D auch als

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^0(X, \Omega_{-D}) = 1 - g + \deg(D)$$

formuliert werden kann. In Worten: Die maximale Anzahl von linear unabhängigen meromorphen Funktionen, die Vielfache von $-D$ sind, minus der maximalen Anzahl von linear unabhängigen meromorphen 1-Formen, die Vielfache von D sind, ist gleich $1 - g + \deg(D)$. Im Spezialfall $D = 0$ ergibt sich

$$g = \dim H^1(X, \mathcal{O}) = \dim H^0(X, \Omega).$$

In Worten: Das Geschlecht g einer kompakten Riemannschen Fläche X ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger holomorpher 1-Formen vom Typ $(1,0)$ auf X .

Die Rollen von meromorphen Funktionen und meromorphen 1-Formen können in der Serre-Dualität vertauscht werden. Ist K ein kanonischer Divisor von X , so ist $\mathcal{O}_{-D} \cong \Omega_{-(D+K)}$ und $\Omega_D \cong \mathcal{O}_{D+K}$. Daher folgt aus der Serre-Dualität (für den Divisor $D + K$) die Isomorphie

$$H^0(X, \mathcal{O}_{-D}) \cong H^1(X, \Omega_D)^*.$$

Speziell für $D = 0$ ergibt sich $\dim H^1(X, \Omega) = \dim H^0(X, \mathcal{O}) = 1$. Daher ist die surjektive lineare Abbildung $\text{Res} : H^1(X, \Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ ein Vektorraum-Isomorphismus.

Es ist an der Zeit, uns mit dem Beweis des Theorems über die Serre-Dualität (Theorem 5.32) zu befassen. Wir geben hier den Beweis nicht vollständig wieder, stellen aber die Beweisstrategie und die wesentlichen Methoden dar. Ein vollständiger Beweis findet sich in [Fo, §17].

5.33 Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche, $\mathcal{M}^{(1)}$ die Garbe der meromorphen 1-Formen vom Typ (1,0) auf X , und $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X

- (a) Eine 0-Kokette $\mu = (\omega_i)_{i \in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}^{(1)})$ heißt eine *Mittag-Leffler-Verteilung*, wenn für alle $i, j \in I$ die Differenzen $\omega_j - \omega_i$ holomorph auf $U_i \cap U_j$ sind, d.h. wenn $\delta^0 \mu \in Z^1(\mathfrak{U}, \Omega)$ gilt. Wir bezeichnen die Kohomologieklassse von $\delta^0 \mu$ mit $[\delta^0 \mu] \in H^1(X, \Omega)$.
- (b) Sei $x_0 \in X$. Das *Residuum* [residue] einer Mittag-Leffler-Verteilung $\mu = (\omega_i)_{i \in I}$ ist definiert als $\text{Res}_{x_0}(\mu) = \text{Res}_{x_0}(\omega_i)$, wobei $i \in I$ so gewählt ist, dass $x_0 \in U_i$ ist. (Weil $\omega_i - \omega_j$ holomorph ist, ist diese Definition von der Wahl von i unabhängig.)
- (c) Sei X nun kompakt. Dann definieren wir das (*Gesamt-*)*Residuum* von μ als

$$\text{Res}(\mu) = \sum_{x \in X} \text{Res}_x(\mu) .$$

(Weil X kompakt ist, sind nur endlich viele Summanden von Null verschieden.)

5.34 Aussage. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, und $\mu \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}^{(1)})$ eine Mittag-Leffler-Verteilung auf X . Dann gilt

$$\text{Res}(\mu) = \text{Res}([\delta^0 \mu]) .$$

Dabei ist $\text{Res}(\mu)$ in Definition 5.33(c) und $\text{Res}([\delta^0 \mu])$ in Gleichung (*) definiert.

Beweis. Siehe [Fo, Theorem 17.3, S. 133f.] □

5.35 Lemma. Die lineare Abbildung $\iota_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ aus Theorem 5.32 ist injektiv.

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass es für jedes $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D}) \setminus \{0\}$ ein $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$ mit $\langle \omega, \xi \rangle \neq 0$ gibt. Dazu wählen wir einen Punkt $a \in X$ mit $D(a) = 0$ und eine holomorphe Karte (U_0, z) von X mit $a \in U_0$, $z(a) = 0$ und $D|_{U_0} = 0$. Außerdem können wir U_0 so klein wählen, dass ω auf $U_0 \setminus \{a\}$ keine Nullstellen besitzt, und wir schreiben $\omega = f dz$ auf U_0 . Weiter sei $U_1 = X \setminus \{a\}$. Dann ist $\mathfrak{U} = (U_0, U_1)$ eine offene Überdeckung von X . Wir betrachten nun $\eta = (f_0, f_1) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ mit $f_0 = (zf)^{-1}$ und $f_1 = 0$. Dann ist

$$\omega\eta = \left(\frac{1}{z} dz, 0 \right) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}^{(1)})$$

eine Mittag-Leffler-Verteilung mit $\text{Res}(\omega\eta) = 1$. Es gilt $\delta^0 \eta \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$, und es sei $\xi = [\delta^0 \eta] \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$ die dazu gehörende Kohomologieklassse. Wegen $\omega\xi = \omega \cdot [\delta^0 \eta] = [\delta^0(\omega\eta)]$ ergibt sich nun mit Aussage 5.34:

$$\langle \omega, \xi \rangle = \text{Res}(\omega\xi) = \text{Res}([\delta^0(\omega\eta)]) = \text{Res}(\omega\eta) = 1 .$$

□

Beweisskizze für die Serre-Dualität, Theorem 5.32. Wegen Lemma 5.35 ist nur noch zu zeigen, dass $\iota_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ surjektiv ist. Sei also $\lambda : H^1(X, \mathcal{O}_D) \rightarrow \mathbb{C}$ eine Linearform, ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $\lambda \neq 0$ annehmen. Wir wollen zeigen, dass es eine 1-Differentialform $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$ mit $\iota_D(\omega) = \lambda$ gibt.

Wir wählen einen Divisor $P \in \text{Div}(X)$ mit $\deg(P) = 1$ sowie ein zunächst beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Dann setzen wir $D_n = D - nP$ und betrachten den Vektorraum $\Lambda = \{\psi \lambda \mid \psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{nP})\}$. Damit ist Λ ein Unterraum von $H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$. Man kann zeigen (siehe [Fo, Lemma 17.8]), dass die Abbildung $H^0(X, \mathcal{O}_{nP}) \rightarrow \Lambda, \psi \mapsto \psi \lambda$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist. Folglich gilt nach dem Satz von Riemann-Roch (Theorem 5.27):

$$\dim \Lambda = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{nP}) \geq \dim H^0(X, \mathcal{O}_{nP}) - i(nP) = 1 - g + \deg(nP) = 1 - g + n,$$

wobei g das Geschlecht von X ist. Nach Lemma 5.35 ist $\iota_{D_n} : H^0(X, \Omega_{-D_n}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$ injektiv, also gilt für das Bild $\text{im}(\iota_{D_n}) \subset H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$ nach Aussage 5.31

$$\dim \text{im}(\iota_{D_n}) = \dim H^0(X, \Omega_{-D_n}) \geq -\deg(D_n) + k_0 = n + k_0 - \deg(D).$$

und somit

$$\dim \Lambda + \dim \text{im}(\iota_{D_n}) \geq 2n + (k_0 + 1 - g - \deg(D)). \quad (\ominus)$$

Ist $n > \deg(D)$, so ist $\deg(D_n) < 0$ und deshalb $H^0(X, \mathcal{O}_{D_n}) = 0$. In dieser Situation zeigt der Satz von Riemann-Roch (Theorem 5.27):

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^* = g - 1 - \deg(D_n) = n + (g - 1 - \deg(D)).$$

Durch Vergleich mit (\ominus) ergibt sich: Wählt man $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, so gilt

$$\dim \Lambda + \dim \text{im}(\iota_{D_n}) > \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*.$$

Da sowohl Λ als auch $\text{im}(\iota_{D_n})$ Untervektorräume von $H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$ sind, folgt daraus, dass $\Lambda \cap \text{im}(\iota_{D_n}) \neq 0$ ist. Also existiert $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$, $\psi \neq 0$ und $\omega_0 \in H^0(X, \Omega_{-D_n})$ mit $\iota_{D_n}(\omega_0) = \psi \lambda$. Dann ist $\omega = (1/\psi)\omega_0 \in H^0(X, \Omega_{-D})$. Man kann nun zeigen, dass $\iota_D(\omega) = \lambda$ ist, siehe [Fo, Lemma 17.7]. □

5.9 Konsequenzen

5.36 Aussage. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und K ein kanonischer Divisor auf X . Dann gilt $\deg(K) = 2g - 2$.

Beweis. Nach dem Satz von Riemann-Roch (Theorem 5.27) gilt

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_K) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_K) = 1 - g + \deg(K).$$

Hier ist $\mathcal{O}_K \cong \Omega$, und daher folgt

$$\dim H^0(X, \Omega) - \dim H^1(X, \Omega) = 1 - g + \deg(K).$$

Wir haben eben gezeigt: $\dim H^0(X, \Omega) = g$ und $\dim H^1(X, \Omega) = 1$. Deshalb folgt $\deg(K) = 2g - 2$. □

5.37 Korollar. Jeder komplexe Torus $X = \mathbb{C}/\Gamma$ (wobei $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ ein maximales Gitter in \mathbb{C} ist, siehe Beispiel 1.22(c)) hat das Geschlecht 1.

Beweis. Wir betrachten die reguläre Überlagerung $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$. Wir bezeichnen mit z die globale Koordinate von \mathbb{C} , dann ist dz eine nullstellenfreie, holomorphe 1-Form auf \mathbb{C} . Ist $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Decktransformation von π , so existiert ein $\omega \in \Gamma$, so dass $\gamma(z) = z + \omega$ ist, und daher gilt $\gamma^*(dz) = dz$. Deshalb existiert eine (eindeutige, global definierte) holomorphe 1-Form ω auf \mathbb{C}/Γ mit $\pi^*\omega = dz$. Mit dz ist auch ω nullstellenfrei, und daher ist der zu ω gehörende kanonische Divisor $K = (\omega) = 0$, insbesondere $\deg(K) = 0$. Nach Aussage 5.36 folgt $0 = 2g - 2$, also $g = 1$. \square

5.38 Aufgabe. We give a converse to Korollar 5.37. Let X be a compact Riemann surface with genus 1.

(a) Prove that there is a non-vanishing holomorphic differential ω .

(b) Let \tilde{X} be the universal cover of X and choose a point $x_0 \in \tilde{X}$. Define a map $F : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$ by

$$F(x) = \int_{x_0}^x \omega.$$

Argue that F is a well-defined holomorphic function.

(c) Further, show that F is a biholomorphism.

(d) Hence prove that X is a torus \mathbb{C}/L .

5.39 Aussage. Jede kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \leq 2$ ist hyperelliptisch.

Beweis. Wir werden zeigen, dass es einen Divisor $D = x_1 + x_2 \in \text{Div}(X)$ (dabei $x_1, x_2 \in X$) mit $\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 2$ gibt. Daraus folgt, dass es eine nicht-konstante Funktion $f \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$ gibt. Sie hat einfache Pole in den beiden Punkten $x_1, x_2 \in \text{supp}(D)$, deshalb ist X dann hyperelliptisch.

Für $g \in \{0, 1\}$ können dabei die Punkte x_1, x_2 beliebig gewählt werden. Nach dem Satz von Riemann-Roch (Theorem 5.27) gilt dann nämlich

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg(D) + \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = 3 - g + i(D) \geq 3 - g \geq 2.$$

Betrachten wir nun den Fall $g = 2$. Wir wählen ein holomorphe 1-Form $\omega \neq 0$ auf X . Nach Aussage 5.36 hat der kanonische Divisor $D = (\omega)$ den Grad $2g - 2 = 2$ und es gilt $D \geq 0$, also ist $D = x_1 + x_2$ mit $x_1, x_2 \in X$. Dabei ist $i(D) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^1(X, \Omega) = 1$, und somit gilt wieder nach dem Satz von Riemann-Roch

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = 3 - g + i(D) = 2.$$

\square

5.40 Satz. (Satz von Riemann-Hurwitz.) Seien X, Y zwei kompakte Riemannsche Flächen vom Geschlecht g_X bzw. g_Y , und $f : X \rightarrow Y$ eine nicht-konstante, holomorphe Abbildung vom Grad m_f und totaler Verzweigungsordnung b_f . Dann gilt die *Formel von Riemann-Hurwitz*

$$g_X = \frac{b_f}{2} + m_f(g_Y - 1) + 1.$$

Beweis. Sei $\omega \neq 0$ eine meromorphe 1-Form vom Typ $(1, 0)$ auf Y , dann ist $f^*\omega \neq 0$ eine meromorphe 1-Form vom Typ $(1, 0)$ auf X . Deshalb gilt $\deg((\omega)) = 2g_Y - 2$ und $\deg((f^*\omega)) = 2g_X - 2$ nach Aussage 5.36.

Sei nun $x \in X$ und $y = f(x)$. Nach Aussage 2.17 gibt es Karten (U, z) von X mit $z(x) = 0$ und (V, w) von Y mit $w(y) = 0$, so dass $w \circ f = z^k$ mit $k = b_f(x) + 1$ ist. Wir stellen ω lokal auf V als $\omega = \psi(w)dw$ dar. Dann gilt auf U

$$f^*\omega = \psi(z^k) dz^k = kz^{k-1}\psi(z^k) dz$$

und daher

$$\text{ord}_x(f^*\omega) = (k - 1) + k \text{ord}_y(\psi) = b_f(x) + (b_f(x) + 1)\text{ord}_y(\omega). \quad (\dagger)$$

Nun gilt für jedes $y \in Y$ nach Aussage 2.20

$$\sum_{x \in f^{-1}[\{y\}]} (b_f(x) + 1) = m_f$$

und daher ergibt sich durch Summation von (\dagger)

$$\sum_{x \in f^{-1}[\{y\}]} \text{ord}_x(f^*\omega) = \sum_{x \in f^{-1}[\{y\}]} b_f(x) + m_f \text{ord}_y(\omega).$$

Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} 2g_X - 2 &= \deg((f^*\omega)) = \sum_{x \in X} \text{ord}_x(f^*\omega) = \sum_{y \in Y} \sum_{x \in f^{-1}[\{y\}]} \text{ord}_x(f^*\omega) \\ &= \sum_{y \in Y} \sum_{x \in f^{-1}[\{y\}]} b_f(x) + \sum_{y \in Y} m_f \text{ord}_y(\omega) = b_f + m_f \deg((\omega)) = b_f + m_f(2g_Y - 2). \end{aligned}$$

Durch Umformen nach g_X ergibt sich die Behauptung. \square

5.41 Bemerkungen. (a) Aus der Formel von Riemann-Hurwitz ergibt sich, dass die totale Verzweigungszahl b_f stets geradzahlig ist.

(b) We have seen in Section 2.3 that for hyperelliptic curves given by $\nu^2 = a(\lambda)$, the function λ is a branch covering of $\widehat{\mathbb{C}}$ of degree two and branching order $2g + 2$ (whether the degree of a is $2g + 1$ or $2g + 2$). The Riemann-Hurwitz formula tells us that the genus of the hyperelliptic curve is

$$g_X = \frac{2g + 2}{2} + 2(0 - 1) + 1 = g + 1 - 2 + 1 = g.$$

This justifies using $2g + 2$ for the degree of a , it is really the genus.

- (c) Because the genus is g , we know that the holomorphic differentials from Example 2.25 are a basis for all the holomorphic differentials.

To close we give some important results for the field, but which we do not use in this script.

5.42 Aussage. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g , und $D \in \text{Div}(X)$ mit $\deg(D) > 2g - 2$. Dann ist D nicht-spezial, d.h. es gilt $H^1(X, \mathcal{O}_D) = 0$.

Beweis. Sei K ein kanonischer Divisor auf X . Dann ist $\Omega_{-D} \cong \mathcal{O}_{K-D}$. Aus der Serre-Dualität (Theorem 5.32) und dieser Isomorphie ergibt sich:

$$H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \cong H^0(X, \Omega_{-D}) \cong H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}).$$

Ist $\deg(D) > 2g - 2$, so folgt $\deg(K - D) < 0$ wegen $\deg(K) = 2g - 2$ nach Aussage 5.36, und daher ist $H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) = 0$. Somit ist auch $H^1(X, \mathcal{O}_D) = 0$. \square

5.43 Korollar. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, und \mathcal{M} bzw. $\mathcal{M}^{(1)}$ die Garbe der meromorphen Funktionen bzw. der meromorphen 1-Formen vom Typ $(1,0)$ auf X . Dann gilt

$$H^1(X, \mathcal{M}) = 0 \quad \text{und} \quad H^1(X, \mathcal{M}^{(1)}) = 0.$$

Beweis. Sei eine Kohomologieklass $\xi \in H^1(X, \mathcal{M})$ gegeben. Dann existiert eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X und ein 1-Kozykel $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$, der ξ repräsentiert. Indem man erforderlichenfalls \mathfrak{U} verfeinert, und dann einen 1-Korand von (f_{ij}) abzieht, kann man dafür sorgen, dass es nur endlich viele Stellen $x \in X$ gibt, an denen irgendein f_{ij} einen Pol hat, und dass jede solche Stelle in nur endlich vielen der U_i enthalten ist. Dann existiert ein Divisor D , so dass $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$ ist. Dabei dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\deg(D) > 2g - 2$ annehmen. Dann gilt nach Aussage 5.42 $H^1(X, \mathcal{O}_D) = 0$, also auch $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D) = 0$. Somit ist $(f_{ij}) \in B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D) \subset B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$, d.h. ξ ist null-kohomolog bezüglich \mathcal{M} . Das zeigt $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$.

Die Garbe $\mathcal{M}^{(1)}$ ist isomorph zu \mathcal{M} , denn ist $\omega \neq 0$ irgendeine meromorphe 1-Form vom Typ $(1,0)$ auf X , so wird durch $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^{(1)}$, $f \mapsto f\omega$ ein Garben-Isomorphismus gegeben. Deshalb folgt auch $H^1(X, \mathcal{M}^{(1)}) = 0$. \square

Chapter 6

Singuläre komplexe Kurven

In vielen Fällen möchte man komplexe Kurven (also Flächen in einer komplexen Dimension bzw. in zwei reellen Dimensionen) betrachten, deren lokale Struktur komplizierter ist als die der Riemannschen Flächen, die wir bisher behandelt haben. Damit gemeint sind komplexe Kurven, die *Singularitäten* besitzen, also Stellen, in deren Nähe die komplexe Struktur der Fläche nicht durch eine holomorphe Kartenfunktion beschrieben wird. Die Art und Weise, wie die komplexe Struktur solcher singulärer Flächen X' beschrieben wird, ist indem man unmittelbar die Garbe der holomorphen Funktionen auf X' als axiomatisch definiertes Objekt dem topologischen Raum X' beifügt. Dabei definieren wir zunächst *komplexe Modellräume*, die als Modelle für die lokale Struktur singulärer komplexer Kurven dienen.

6.1 Komplexe Modellräume

Wir definieren die komplexen Modellräume in einem gewissen Sinne als Teilmengen des \mathbb{C}^n , die als Nullstellenmenge von endlich vielen holomorphen Funktionen f_1, \dots, f_k in n Variablen gegeben sind. Wenn der Rang des Differentials von (f_1, \dots, f_k) maximal ist, erhält man wegen des Satzes von der impliziten Funktion eine glatte komplexe Untermannigfaltigkeit im \mathbb{C}^n . Wenn diese Voraussetzung aber nicht erfüllt ist, hat die Nullstellenmenge im Allgemeinen Singularitäten. Dieser Fall ist für das folgende von entscheidender Bedeutung.

Für das Folgende müssen wir sagen, wann eine Funktion in n komplexen Variablen, also eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}^n$ holomorph ist: Man sagt, dass ein solches f *holomorph* [holomorphic] ist, wenn f in der Nähe von jedem $x \in D$ lokal in eine Potenzreihe in den n Koordinaten von $D \subset \mathbb{C}^n$ entwickelbar ist. Der sehr tiefliegende *Satz von Hartogs* besagt, dass f schon holomorph ist, wenn es bezüglich jeder Variable "partiell holomorph" ist, d.h. wenn die Funktion $z \mapsto f(x_1, \dots, x_{j-1}, z, x_{j+1}, \dots, x_n)$ für jedes j und jeweils festes $(x_1, \dots, x_n) \in D$ holomorph im Sinne der eindimensionalen Theorie ist. (Dabei ist bemerkenswert, dass keine "Bindung" zwischen den einzelnen Variablen vorausgesetzt werden muss, wie etwa Stetigkeit von f oder Existenz von beliebigen Richtungsableitungen. Dies ist – wieder einmal – ein markanter Unterschied zur reellen Theorie.)

Man achte darauf, dass die Nullstellen einer nicht-konstanten holomorphen Funktion in n Variablen nicht diskret in D zu sein brauchen. Die Existenz von holomorphen Funktionen mit diskreten Nullstellen werden wir sogar zur Definition des Begriffs der Ein-Dimensionalität (in

Gegenwart von Singularitäten) verwenden.

6.1 Beispiel. Die Projektionen $z_j : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $(z_1, \dots, z_n) \mapsto z_j$ sind holomorphe Funktionen. Für zwei holomorphe Funktionen f, g sind auch $f \pm g$ und $f \cdot g$ holomorph; der Quotient $\frac{f}{g}$ ist holomorph außerhalb der Nullstellen von g . Daraus folgt insbesondere: Beliebige Polynome in den Koordinaten von \mathbb{C}^n sind holomorphe Funktionen auf \mathbb{C}^n , also beispielsweise Funktionen auf $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ wie

$$f(z, w) = z \cdot w \quad \text{und} \quad f(z, w) = w^2 - z^3.$$

6.2 Definition. Sei $D \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet in \mathbb{C}^n und $f_1, \dots, f_k : D \rightarrow \mathbb{C}$ endlich viele holomorphe Funktionen auf D . Wir bezeichnen mit \mathcal{O}_D die Garbe der holomorphen Funktionen auf D .

(a) Dann ist

$$(f_1, \dots, f_k) := \mathcal{O}_D f_1 + \dots + \mathcal{O}_D f_k$$

eine Untergarbe von \mathcal{O}_D , und zwar eine Garbe von Idealen in der Garbe von Ringen* \mathcal{O}_D . Sie heißt die von f_1, \dots, f_k erzeugte Untergarbe von \mathcal{O}_D . Daher ist die Quotientengarbe $\mathcal{O}_D/(f_1, \dots, f_k)$ eine Garbe von Ringen.

(b) Wir definieren

$$X' := \text{supp}(\mathcal{O}_D/(f_1, \dots, f_k)) := \{x \in D \mid (f_1, \dots, f_k)_x \neq \mathcal{O}_{D,x}\}$$

und

$$\mathcal{O}_{X'} := (\mathcal{O}/(f_1, \dots, f_k))|_{X'}.$$

Das Paar $(X', \mathcal{O}_{X'})$ heißt der von f_1, \dots, f_k oder von \mathcal{I} definierte *komplexe Modellraum* [complex model space] in D ; wir bezeichnen es mit $V(\mathcal{I}) = V(f_1, \dots, f_k)$. Die Schnitte von $\mathcal{O}_{X'}$ heißen *holomorphe Funktionen auf X'* .

(c) Wir sagen, dass ein komplexer Modellraum $(X', \mathcal{O}_{X'})$ *ein-dimensional* [one-dimensional] oder *Modellraum einer komplexen Kurve* [complex curve model space] ist, wenn es zu jedem $x \in X'$ eine offene Umgebung U von x in X' und eine nicht-konstante holomorphe Funktion $g \in \mathcal{O}_{X'}(U)$ gibt, die in x eine diskrete Nullstelle besitzt.

In der Situation der Definition ist X' als Punktmenge offenbar gleich der gemeinsamen Nullstellenmenge von f_1, \dots, f_k oder von (f_1, \dots, f_k) :

$$X' = \{x \in D \mid f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0\} = \{x \in D \mid \forall f \in (f_1, \dots, f_k)_x : f(x) = 0\}.$$

Daher ist X' eine abgeschlossene Teilmenge von D .

Die Definition der Garbe $\mathcal{O}_{X'}$ besagt, dass eine Funktion $g : X' \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann holomorph ist, wenn sie lokal auf D holomorph fortgesetzt werden kann, das heißt: Für jedes $x' \in X'$ gibt es eine Umgebung U von x in D und eine holomorphe Funktion $\tilde{g} : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\tilde{g}|_{U \cap X'} = g|_{U \cap X'}$. Insbesondere erhält man durch Einschränkung auf X' aus holomorphen Funktionen auf D (siehe Beispiel 6.1) holomorphe Funktionen auf X' .

6.3 Beispiele. (a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann ist $V(0) = (G, \mathcal{O}_G)$ ein Modellraum einer komplexen Kurve. In diesem Sinne können die Gebiete von \mathbb{C} kanonischerweise als ein-dimensionale komplexe Modellräume ohne Singularitäten aufgefasst werden.

*Mit einem Ring meinen wir hier immer einen kommutativen Ring mit Eins.

- (b) $V(1) = \emptyset$ ist der leere Raum.
- (c) Sei $D = \mathbb{C}^2 \ni (z, w)$. Dann ist $X' = V(z \cdot w)$ ein Modellraum einer komplexen Kurve. Die Singularität dieser komplexen Kurve in $(z, w) = (0, 0)$ heißt ein (einfacher) *Doppelpunkt* [double point] von X' .

Beweis für die Eindimensionalität von X' . Sei $(z_0, w_0) \in X'$ gegeben, also $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}^2$ mit $z_0 \cdot w_0 = 0$. Dann ist $g = ((z - z_0) + (w - w_0))|_{X'}$ eine auf X' holomorphe Funktion, die in (z_0, w_0) eine isolierte Nullstelle besitzt.

- (d) Sei $D = \mathbb{C}^2 \ni (z, w)$ und $m \geq 2$. Dann ist $X' = V(z^m - w^m)$ ein Modellraum einer komplexen Kurve. (In $(0, 0)$ ist $g = (z^m + w^m)|_{X'}$ eine holomorphe Funktion auf X' , die in $(0, 0)$ eine diskrete Nullstelle besitzt.) Die Singularität dieser komplexen Kurve in $(z, w) = (0, 0)$ heißt ein *m-facher Punkt* [m-fold point]. Für $m = 2$ ist wegen

$$z^2 - w^2 = (z + w) \cdot (z - w)$$

diese Singularität mittels des Isomorphismus $(z, w) \mapsto (z + w, z - w)$ isomorph zum in (c) beschriebenen Doppelpunkt.

- (e) Sei $D = \mathbb{C}^2 \ni (z, w)$. Die *Neilsche Parabel* $N(w^2 - z^3)$ ist Modellraum einer komplexen Kurve. Die Singularität dieser Kurve in $(z, w) = (0, 0)$ heißt *Spitze* [cusp].

6.2 Komplexe Kurven

Eine (singuläre) komplexe Kurve ist ein "Raum", der lokal wie ein Modellraum einer komplexen Kurve aussieht.

6.4 Definition. (a) Ein *geringter Raum* [ringed space] ist ein Paar $(X', \mathcal{O}_{X'})$ bestehend aus einem Hausdorffraum X' und einer Garbe von Ringen $\mathcal{O}_{X'}$ auf X' . Wenn $\mathcal{O}_{X'}$ sogar eine Garbe von \mathbb{C} -Algebren ist, so heißt $(X', \mathcal{O}_{X'})$ ein *\mathbb{C} -geringter Raum* [\mathbb{C} -ringed space].

- (b) Ein \mathbb{C} -geringter Raum $(X', \mathcal{O}_{X'})$ heißt eine (*singuläre*) *komplexe Kurve* [(singular) complex curve], wenn es für jedes $x \in X'$ eine Umgebung U von x in X' gibt, so dass der \mathbb{C} -geringte Unterraum $(U, \mathcal{O}_{X'}|_U)$ isomorph zu einem Modellraum einer komplexen Kurve ist. In diesem Fall heißen die Schnitte der Garbe $\mathcal{O}_{X'}$ *holomorphe Funktionen* [holomorphic functions] (auf X').

- (c) Sei $(X', \mathcal{O}_{X'})$ eine komplexe Kurve. Ein Punkt $x \in X'$ heißt *regulär* [regular], wenn es eine Umgebung U von x in X' gibt, so dass $(U, \mathcal{O}_{X'}|_U)$ isomorph zu einem Gebiet (G, \mathcal{O}_G) in \mathbb{C} (aufgefasst als komplexe Kurve wie in Beispiel 6.3(a)) ist. Andernfalls heißt x *singulär* [singular] oder eine *Singularität* [singularity].

6.5 Beispiele. (a) Sei X eine Riemannsche Fläche und \mathcal{O}_X die Garbe ihrer holomorphen Funktionen. Dann ist (X, \mathcal{O}_X) eine komplexe Kurve ohne Singularitäten.

- (b) Jeder Modellraum einer komplexen Kurve ist eine komplexe Kurve im Sinne von Definition 6.4.

Die folgende Aussage ist eine Umkehrung von Beispiel 6.5(a):

6.6 Aussage. Sei (X, \mathcal{O}_X) eine komplexe Kurve ohne Singularitäten. Dann existiert ein holomorpher Atlas \mathfrak{A} von X , so dass (X, \mathfrak{A}) eine Riemannsche Fläche ist.

Beweis. Sei $x \in X$. Dann existiert nach Voraussetzung eine Umgebung $U \subset X$ von x und ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, so dass $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ als \mathbb{C} -geringter Raum isomorph zu (G, \mathcal{O}_G) ist, etwa mittels eines Isomorphismus $z_x : U \rightarrow G$. Für $x, x' \in X$ sind die Karten z_x und $z_{x'}$ holomorph verträglich, deshalb ist $\mathfrak{A} = \{z_x \mid x \in X\}$ ein holomorpher Atlas auf X . Indem man X mit dem maximalen Atlas zu \mathfrak{A} versieht, wird X zu einer Riemannschen Fläche. \square

6.7 Definition. Sei $(X', \mathcal{O}_{X'})$ eine komplexe Kurve. Indem wir für jede offene Menge $U \subset X'$

$$\mathcal{M}_{X'}(U) = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in \mathcal{O}_{X'}(U), g \neq 0 \right\}$$

setzen, wird eine Garbe $\mathcal{M}_{X'}$ von \mathbb{C} -Algebren auf X' definiert, die Quotientengarbe von $\mathcal{O}_{X'}$. Die Schnitte von $\mathcal{M}_{X'}$ heißen *meromorphe Funktionen* [meromorphic functions] (auf X').

Wichtig ist, dass für in diesem Sinne definierte meromorphe Funktionen im Allgemeinen kein Riemannscher Hebbarkeitssatz gilt, d.h. auf einer komplexen Kurve kann es meromorphe Funktionen geben, die lokal beschränkt, aber trotzdem nicht holomorph sind. (Beispielsweise ist auf dem "Koordinatenkreuz" Modellraum $X' = V(z \cdot w)$ eines einfachen Doppelpunkts aus Beispiel 6.3(c) die Funktion $\frac{z^2 - w^2}{z^2 + w^2}$ meromorph und auf $X' \setminus \{(0, 0)\}$ durch 1 beschränkt, aber in $(0, 0)$ nicht stetig, also erst recht nicht holomorph fortsetzbar.)

Wir definieren die Garbe $\bar{\mathcal{O}}_{X'}$ als den *integralen Abschluss* von $\mathcal{O}_{X'}$ in $\mathcal{M}_{X'}$. Das heißt, dass ein Keim $\varphi \in \mathcal{M}_{X',x}$ genau dann zu $\bar{\mathcal{O}}_{X',x}$ gehört, wenn φ *integral* über dem Ring $\mathcal{O}_{X',x}$ ist, d.h. wenn es $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0 \in \mathcal{O}_{X',x}$ gibt, so dass

$$\varphi^n + \alpha_{n-1} \varphi^{n-1} + \dots + \alpha_1 \varphi + \alpha_0 = 0$$

gilt. Offenbar $\mathcal{O}_{X'} \subset \bar{\mathcal{O}}_{X'} \subset \mathcal{M}_{X'}$ jeweils als Untergarben von Ringen. Man kann zeigen, dass $\bar{\mathcal{O}}_{X'}$ die Garbe der lokal beschränkten, meromorphen Funktionen auf X' ist.

6.8 Aussage und Definition. Sei $(X', \mathcal{O}_{X'})$ eine komplexe Kurve und $x \in X'$. Dann gilt $\delta_x = \dim(\bar{\mathcal{O}}_{X',x}/\mathcal{O}_{X',x}) < \infty$. δ_x heißt die δ -*Invariante* [δ invariant] von X' in x . Es gilt genau dann $\bar{\mathcal{O}}_{X',x} = \mathcal{O}_{X',x}$ und damit $\delta_x = 0$, wenn x ein regulärer Punkt von X' ist.

Beweis. Siehe [KLSS, Proposition 2.1(a)]. \square

6.9 Theorem. Sei $(X', \mathcal{O}_{X'})$ eine komplexe Kurve. Dann existiert eine *Normalisierung* von X , das heißt eine verzweigte, einblättrige holomorphe Überlagerung $\pi : X \rightarrow X'$ einer (möglicherweise nicht zusammenhängenden) Riemannschen Fläche X , deren Verzweigungszahl in jedem $x \in X'$ gleich δ_x ist. Die Normalisierung ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Es gilt $\pi_* \mathcal{O}_X = \bar{\mathcal{O}}_{X'}$.

Beweis. Siehe [dJP, Section 4.4]. \square

6.10 Beispiel. Wir betrachten den Modellraum einer komplexen Kurve $(X', \mathcal{O}_{X'}) = V(z \cdot w)$ aus Beispiel 6.3(c). Ihre einzige Singularität ist der gewöhnliche Doppelpunkt in $(0, 0)$. Wir bezeichnen zwei "Kopien" von \mathbb{C} mit \mathbb{C}_1 und \mathbb{C}_2 , und betrachten die nicht-zusammenhängende

Riemannsche Fläche X als die disjunkte Vereinigung $\mathbb{C}_1 \dot{\cup} \mathbb{C}_2$. Weiter definieren wir die holomorphe Abbildung $\pi : X \rightarrow X'$ durch

$$\pi|_{\mathbb{C}_1} : z \mapsto (z, 0) \quad \text{und} \quad \pi|_{\mathbb{C}_2} : w \mapsto (0, w) .$$

Dann ist (X, π) die Normalisierung von X' . Wir sehen $\bar{\mathcal{O}}_{X', (0,0)} = \pi_* \mathcal{O}_{X,0} \cong \mathbb{C}\{z\} \oplus \mathbb{C}\{w\}$, wobei $\mathbb{C}\{z\}$ den Vektorraum der Potenzreihen in z mit positivem Konvergenzradius bezeichnet, und $\delta_{(0,0)} = 1$.

6.3 Alles weitere

Wir lesen das Paper [KLSS].

Appendix A

Literatur

Die folgende Literatur wird für die Vorlesung empfohlen:

- [C] J. B. CONWAY, *Functions of One Complex Variable*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics **11**, Springer 1978.
- [dJP] T. DE JONG, G. PFISTER, *Local Analytic Geometry*, Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 2000.
- [Fo] O. FORSTER, *Riemannsche Flächen*, Springer 1977.
englische Version: O. FORSTER, *Lectures on Riemann Surfaces*, Graduate Texts in Mathematics **81**, Springer 1981.
- [FK] H. FARKAS, I. KRA, *Riemann Surfaces*, Graduate Texts in Mathematics **71**, 2. Auflage, Springer 1992.
- [Fr] E. FREITAG, *Funktionentheorie 2*, Springer 2009.
- [KLSS] S. K., E. LÜBCKE, M. SCHMIDT, T. SIMON, *Singular curves and Baker-Akhiezer functions*, <https://arxiv.org/abs/1609.07011>
- [L] K. LAMOTKE, *Riemannsche Flächen*, 2. Auflage, Springer 2009.
- [M] R. MIRANDA, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics **5**, American Mathematical Society, Providence, RI 1995.
- [S] M. SCHMIDT, *Funktionentheorie II*, Vorlesungsskript Herbst-/Wintersemester 2007, Lehrstuhl-Homepage.

Dabei ist [Fr] die Fortsetzung des bekannten Buchs über Funktionentheorie von FREITAG und BUSAM. Hier ist es hauptsächlich für die Grundbegriffe der Riemannschen Flächen und die Uniformisierung relevant, ebenso wie [L]. Chapter IV von [FK] ist eine weitere Quelle zur Uniformisierung. Teile von Kapitel 1 und vor allem von Kapitel 3 dieser Vorlesung beruhen auf dem Vorlesungsskript [S] von Prof. Schmidt. Kapitel II von [Fo] bildet das Vorbild für die Kapitel der Vorlesung über Garbentheorie, Chapter III von [FK] ist eine weitere gute Quelle hierfür. Die Arbeit [KLSS] ist schließlich die Grundlage für das Kapitel 6 der Vorlesung über singuläre Kurven und über ihren Zusammenhang zu integrierbaren Systemen, auf das Buch [dJP] wird dabei

für einige grundlegende Resultate bezug genommen. The beautiful typeset German text is from S. Klein in 2020. R. Ogilvie rearranged a few things and made some barbarous English additions in 2023.

Appendix B

Der kleine Riemannsche Abbildungssatz

Der "kleine" Riemannsche Abbildungssatz ist die Vorstufe des großen Riemannschen Abbildungssatzes (Theorem 3.42), die einfach zusammenhängende Gebiete in \mathbb{C} behandelt. Weil dieser Satz thematisch zur Funktionentheorie I gehört, skizzieren wir ihn und seinen Beweis in diesem Anhang.

B.1 Theorem. Jedes einfach zusammenhängende (oder planare, Definition 3.29) Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, das nicht gleich \mathbb{C} ist, ist biholomorph äquivalent zur Kreisscheibe $\mathbb{D} = B(0, 1)$.

Für den Beweis werden die folgenden Aussagen über holomorphe Abbildungen $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ benötigt:

B.2 Aufgabe. (a) Überprüfe, dass

$$\Phi(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

eine bijektive Abbildung von \mathbb{D} auf \mathbb{D} ist, mit $\Phi(z_0) = 0$.

Schwarz Lemma: Sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| \leq 1$. Dann $|f(z)| \leq |z|$ und $|f'(0)| \leq 1$.

(b) Betrachte die Funktion, die durch

$$g(z) = z^{-1}f(z) \text{ für } z \neq 0, \text{ und } g(0) = f'(0)$$

definiert. Zeige, dass g holomorph auf \mathbb{D} ist.

(c) Benutze das Maximum Modulus Prinzip zu g auf $B(0, r)$, um den Beweis des Lemmas zu schließen.

(d) Setze weiter voraus, dass $|f'(0)| = 1$. Beweise, dass g konstant ist und daher $f(z) = az$ mit $|a| = 1$.

Beweis des kleinen Riemannschen Abbildungssatzes Theorem B.1. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist genau dann planar, wenn es einfach zusammenhängend ist, und diese Eigenschaft ist genau dann erfüllt, wenn jede holomorphe Funktion auf G eine Stammfunktion besitzt. Der weitere Beweis erfolgt in drei Schritten.

1. *Schritt.* Wir zeigen, dass G biholomorph äquivalent ist zu einem Gebiet \tilde{G} mit $0 \in \tilde{G} \subset \mathbb{D}$. Wegen $G \neq \mathbb{C}$ können wir durch Translation erreichen, dass $0 \notin G$ gilt. Weil G einfach zusammenhängend ist, gibt es auf G einen Zweig des Logarithmus, d.h. eine holomorphe Funktion

$$\lambda : G \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad e^{\lambda(z)} = z \quad \text{für} \quad z \in G .$$

Die holomorphe Funktion $w : G \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{\frac{1}{2}\lambda(z)}$ ist dann offenbar ein "Zweig der Quadratwurzel", d.h. es gilt $w(z)^2 = z$ für $z \in G$. Aus letzterer Beziehung folgt auch die Injektivität von w , und ähnlich wie im Beweis von Lemma 3.37 gilt $w[G] \cap (-w[G]) = \emptyset$. Weil $-w[G]$ nach dem Satz von der Gebietstreue offen ist, gibt es ein $w_0 \in w[G]$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $\overline{B(-w_0, \varepsilon)} \subset -w[G] \subset \mathbb{C} \setminus w[G]$. Dann bildet die injektive holomorphe Abbildung $z \mapsto \frac{\varepsilon}{w(z)+w_0}$ das Gebiet G auf ein Gebiet $\tilde{G} \subset \mathbb{D}$ ab. Nach Aufgabe B.2(b) kann hinter diese Abbildung eine Möbius-Transformation geschaltet werden, um $0 \in \tilde{G}$ zu erreichen.

2. *Schritt.* Wegen dem 1. Schritt können wir nun zusätzlich $0 \in G \subset \mathbb{D}$ voraussetzen. Wir untersuchen in diesem Schritt injektive holomorphe Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$ und zeigen die folgende Aussage: Ist ein solches f nicht surjektiv, so existiert eine injektive holomorphe Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{D}$ mit $|F'(0)| > |f'(0)|$.

Die holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$ sei also injektiv, aber nicht surjektiv. Weil f nicht surjektiv ist, gibt es ein $z_0 \in \mathbb{D} \setminus f[G]$. Wir betrachten die Möbius-Transformation

$$\Phi_0(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} ,$$

die nach Aufgabe B.2(d) \mathbb{D} auf \mathbb{D} abbildet. Für das einfach zusammenhängende Gebiet $\tilde{G} = (\Phi_0 \circ f)[G] \subset \mathbb{D}$ gilt $0 = \Phi_0(z_0) \notin \tilde{G}$, also gibt es wie im 1. Schritt einen holomorphen Zweig der Quadratwurzel $w : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{C}$. Offenbar ist $w[\tilde{G}] \subset \mathbb{D}$. Es ist $-z_0 = (\Phi_0 \circ f)(0) \in \tilde{G}$, und wir setzen

$$z_1 = w(-z_0) \in \mathbb{D} \quad \text{und} \quad \Phi_1(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} .$$

Die Möbius-Transformation Φ_1 bildet ebenfalls nach Aufgabe B.2(d) \mathbb{D} auf \mathbb{D} ab, und es gilt $\Phi_1(z_1) = 0$. Nun definieren wir

$$F(z) = (\Phi_1 \circ w \circ \Phi_0 \circ f)(z) \quad \text{für} \quad z \in G .$$

Die holomorphe Abbildung $F : G \rightarrow \mathbb{D}$ ist injektiv mit $F(0) = 0$. Für die holomorphe Abbildung

$$h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, \quad z \mapsto \Phi_0^{-1}((\Phi_1^{-1}(z))^2)$$

gilt

$$h(0) = \Phi_0^{-1}(z_1^2) = \Phi_0^{-1}(w(-z_0)^2) = \Phi_0^{-1}(-z_0) = 0$$

und

$$h \circ F = \Phi_0^{-1} \circ w^2 \circ \Phi_0 \circ f = f .$$

Weil die holomorphen Abbildungen $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, $z \mapsto z^2$ und $\frac{1}{z} \mapsto \frac{1}{z^2}$ nicht injektiv sind, ist auch h nicht injektiv, also sicher nicht (Einschränkung einer) Möbius-Transformation. Aus dem Schwarzschen Lemma folgt daher $|h'(0)| < 1$ und daher

$$|f'(0)| = |h'(0) F'(0)| = |h'(0)| \cdot |F'(0)| < |F'(0)| .$$

3. *Schritt.* Sei \mathcal{F} die Menge der injektiven holomorphen Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$. Wir zeigen, dass \mathcal{F} ein Element f enthält, für das $|f'(0)|$ maximal ist. Wegen dem 2. Schritt ist dieses f surjektiv, und damit eine biholomorphe Abbildung $G \rightarrow \mathbb{D}$.

Zunächst bemerken wir, dass $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ist, denn die Inklusionsabbildung $G \hookrightarrow \mathbb{D}$ liegt in \mathcal{F} . Wir wählen $\varepsilon > 0$ mit $\overline{B(0, \varepsilon)} \subset G$. Für $f \in \mathcal{F}$ gilt dann nach der Cauchyschen Ungleichung $|f'(0)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Daher hat die Menge

$$\{|f'(0)| \mid f \in \mathcal{F}\}$$

ein endliches Supremum $s_0 \in [1, \infty)$. Somit existiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{F} mit $\lim_{n \rightarrow \infty} |f'_n(0)| = s_0$. Außerdem gilt jeweils $|f_n(z)| \leq 1$ für alle $z \in G$. Nach dem Satz von Montel (Aussage 3.34) gibt es eine Teilfolge von (f_n) , die kompakt gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Nach dem Satz von Weierstraß konvergieren auch die Ableitungen kompakt gleichmäßig gegen die Ableitungen von f . Deshalb ist $|f'(0)| = s_0$. Daher ist die Abbildung f nicht konstant, und daher nach dem Satz von "nullstellenzählenden Integral" injektiv. Das Bild von f ist nach dem Satz von der Gebietstreue eine offene Menge, die in $\overline{\mathbb{D}}$ enthalten ist, und daher in \mathbb{D} enthalten. Also ist $f \in \mathcal{F}$, und $|f'(0)|$ ist in \mathcal{F} maximal. \square

Aus dem Beweis des kleinen Riemannsches Abbildungssatzes ergibt sich auch:

B.3 Korollar. Schwarz-Pick theorem: Die Biholomorphien $\text{Aut}(\mathbb{D})$ sind genau

$$f : z \mapsto e^{i\varphi} \cdot \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

mit $z_0 \in \mathbb{D}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ biholomorph. Nach Aufgabe B.2(a) existiert eine Möbius-Transformation Φ mit $\Phi[\mathbb{D}] = \mathbb{D}$ und $\Phi^{-1}(f(0)) = 0$. Die biholomorphe Abbildung $h := \Phi^{-1} \circ f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ erfüllt $|h'(0)| \leq 1$ nach dem Lemma von Schwarz. Andererseits haben wir im Beweis des kleinen Riemannsches Abbildungssatzes (Theorem B.1) gesehen, dass eine derartige Abbildung genau dann surjektiv ist, wenn $|h'(0)|$ maximal, also hier $= 1$ ist. Dies bedeutet nach Aufgabe B.2(d), dass $h(z) = e^{i\varphi} \cdot z$ mit einem $\varphi \in \mathbb{R}$ ist. Damit ist auch $f = \Phi \circ h$. \square

