

# ANALYSIS II WIEDERHOLUNGSKURS FSS 2020

Luis Brummet<sup>1</sup>  
lubrumme@mail.uni-mannheim.de<sup>2</sup>

## INHALTSVERZEICHNIS

1. Vorwort	2
2. Metrische Räume und Banachräume	3
2.1. Metriken und Normen	3
2.2. Offene, abgeschlossene und kompakte Mengen	4
2.3. Lineare Abbildungen und Vollständigkeit	5
2.4. Abschließende Wiederholungsfragen des Kapitel 9	7
3. Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher	8
3.1. Stetigkeit/Differenzierbarkeit/Richtungsableitung	8
3.2. Kurvendiskussion	10
3.3. Abschließende Kontrollfragen des Kapitel 10	10
4. Nichtlineare Analysis	12
4.1. Banachscher Fixpunktsatz	12
4.2. Auflösen nichtlinearer Gleichungen	13
4.3. Lagrangemultiplikatoren	14
4.4. Abschließende Kontrollfragen des Kapitel 11	14
5. Lebesgueintegration auf $\mathbf{R}^d$	16
5.1. Mehrfachintegrale und der Satz von Fubini	16
5.2. Satz von Beppo Levi/Dominante Konvergenz und Lebesgueintegrierbarkeit	17
5.3. Jacobis Transformationsformel	19
5.4. Abschließende Kontrollfrage des Kapitel 12	20
6. Schlusswort	21

---

*Date:* Mannheim den 04.09.2020.

<sup>1</sup>Vielen Dank an Prof. Schmidt, Dr. Sebastian Klein und Volker Eing für das Senden zahlreicher Aufgaben.

<sup>2</sup>Bitte bei Fehlern oder Anmerkungen eine Email senden.

## 1. VORWORT

Dieser Kurs wurde im Sommer 2020 gehalten, um die Studenten auf die Prüfung Ende September im Fach Analysis II vorzubereiten. Inspirierend dazu ist das Zitat von James M. Munkres aus seinem bekannten Topologiebuch (Topology):

Working problems is the crucial part of learning mathematics. No one can learn mathematics merely by pouring over the definitions, theorems and examples that are worked out in the text. One must work part of it for oneself. To provide that opportunity is the purpose of the exercises.

Hierzu soll dieses Dokument mit zehnmaliger 90-Minuten Sitzung inklusive Lösungen dienen. Zur Gliederung sei gesagt, dass sich das Dokument parallel zum Skript in 4 große Kapitel aufgliedert. Zu den 4 Kapiteln sei gesagt:

In Kapitel 2 werden die verschiedensten Grundlagen metrischer Räume erarbeitet, so sind die Aufgaben hier breit über das Kapitel 9 des Analysis II Skripts gestreut. Zwar kommen sie im Vergleich zu den anderen Kapiteln weniger häufig in den Klausuren vor, jedoch bilden sie gerade das Fundament für weiterführende Fächer des Studiums und sind somit als Grundlage zweckmäßig und notwendig.

In Kapitel 3 geht es vor allem um die Differentialrechnung mehrere Veränderlicher. Dies sind sehr klassische Themen der Analysis II. Zweck der Vielzahl an Aufgaben ist es, dass man die Beziehung und Wechselwirkung zwischen den einzelnen Begriffen verinnerlicht. Hat man dies einmal geschafft, so laufen die Aufgaben mehr oder weniger mechanisch nach Rezept ab.

In Kapitel 4 geht es um die nichtlineare Analysis. Der Banachscher Fixpunktsatz ist insbesondere für weiterführende Fächer wie Numerik und dynamische Systeme wichtig, während die Lagrangemultiplikatoren in der nichtlinearen Optimierung und der VWL anwendung finden. Der Satz der impliziten Funktionen ist ebenfalls ein klassisches Thema der Analysis II. Zum BNFS werden wir Beispiele und Gegenbeispiele in Aufgabe 37 kennenlernen. Wie der Satz für allgemeinere metrische Räume funktioniert wird in Aufgabe 39 erläutert. Bei den Lagrangemultiplikatoren wird darauf Wert gelegt, dass wir am stets die Niveaumenge auf Singularitäten überprüft, dabei zeigt Aufgabe 45 warum dies wichtig ist.

In Kapitel 5 geht es um die Lebesgueintegration. Hierzu fangen wir die Aufgaben etwas umgekehrt zur Idee der Vorlesung an. Wir beginnen mit dem Satz von Fubini und lernen grundlegend mehrdimensionale Integrale auszurechnen. Dabei wird über Satz 12.17 einfach festgestellt, dass der Satz angewendet werden darf und das Lebesgueintegral mit dem Riemannintegral übereinstimmt. Danach werden die Aufgaben schwieriger im Sinne, dass man grundlegend erstmal zeigen muss, dass  $f$  lebesgueintegrierbar ist. Somit schließen sich die Aufgaben dann an die Sätze der monotonen/beschränkten Konvergenz an. Abschließend werden Aufgaben präsentiert, welche Jacobis Transformationsformel vorstellen sollen. Dabei wird auf das Zeigen aller Voraussetzungen mit abschließendem Ausrechnen Wert gelegt.

## 2. METRISCHE RÄUME UND BANACHRÄUME

### Aufteilung der Aufgaben

- (1) Metrik und Norm: (1) - (8)
- (2) Offene/Abgeschlossene Mengen (9) - (11)
- (3) Kompakte Mengen (12) - (16)
- (4) Lineare Abbildungen (17) - (20)
- (5) Vollständigkeit und Konvergenz (21) - (23)

### Wichtige Definitionen, Sätze und Aussagen des Kapitel 9

- (1) Metrik / K-Vektorraum / Offener Ball / offene Menge / Umgebung / Beschränktheit / Abgeschlossene Menge / Abschluss / Kompaktheit / Punktweise Konvergenz / Gleichmäßige Konvergenz / Lineare Abbildung / Cauchyfolge und Vollständigkeit
- (2) Wichtige Aussagen aus dem Skript: 9.24/9.25/9.30/9.31/9.34/9.37/9.42/9.56/9.63

### 2.1. Metriken und Normen.

**Aufgabe 1.** Sei nun im Folgenden  $X = \mathbf{R}$ . Wir wollen nun den Begriff der Metrik untersuchen. Untersuche ob die folgenden Abbildung Metriken sind oder nicht. Falls die folgenden Abbildungen keine Metrik darstellen, nenne die verletzte Eigenschaft

- (1)  $d_1(x, y) = |x - y|$
- (2)  $d_2(x, y) = |x - 2y|$
- (3)  $d_3(x, y) = |x^2 - y^2|$

**Aufgabe 2.** Sei  $X = \mathbf{R}$ . Beweisen oder widerlegen Sie:  $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$  ist eine Metrik.

**Aufgabe 3.** Sei  $X = \mathbf{R}$ . Beweisen oder widerlegen Sie:  $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$  ist eine Metrik.

**Aufgabe 4.** Sei  $(F, d)$  ein beliebiger nichtleerer metrischer Raum und sei  $P \in F$ . Zeige: die Abbildung

$$d_P(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ d(x, P) + d(P, y), & x \neq y, \end{cases}$$

definiert eine neue Metrik auf  $F$ .

Bemerkung. Manchmal wird  $(F, d)$  Frankreich,  $P$  Paris und  $d_P$  SNCF-Metrik genannt.

**Aufgabe 5. Klausur 1. Termin 2011** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $x, y, u, v \in X$ . Zeige, dass die folgende Ungleichung für alle  $x, y, u, v \in X$  hält:

$$|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(v, y)$$

**Hinweis.** Man unterscheide die Fälle  $d(x, y) \geq d(u, v)$  und  $d(x, y) < d(u, v)$ . Im ersten Fall dann  $d(x, y) \leq \dots$  mit Dreiecksungleichung 2 mal abschätzen.

Seien  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$  zwei Cauchyfolgen in  $X$ . Beweise, dass  $(d(x_n, y_n))_{n \in \mathbf{N}}$  eine Cauchyfolge in  $\mathbf{R}$  ist.

**Aufgabe 6. Klausur 2017 2.Termin**

Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $A \subseteq X$  eine nicht-leere, kompakte Teilmenge.

Sei  $dist(\cdot, A) : X \rightarrow \mathbf{R}$  sodass  $x \mapsto dist(x, A) = \inf\{d(x, z) \mid z \in A\}$  Beweise:

- (1) Für jedes  $x \in X$  gibt es ein  $b \in A$  mit  $dist(x, A) = dist(x, b)$
- (2)  $|dist(x, A) - dist(y, A)| \leq d(x, y)$  für  $x, y \in X$ .

**Hinweis.** Zeige zuerst  $dist(x, A) \leq d(x, y) + dist(y, A)$  für  $x, y \in X$

**Aufgabe 7.** Sei  $X = \mathbf{R}^n$ . Die bekannte euklidische Norm  $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$  wurde bereits in der Vorlesung vorgestellt. Zeige, dass dies tatsächlich eine Norm auf  $\mathbf{R}^n$  ist.

**Hinweis.** Die Cauchy-Schwarze Ungleichung könnte bei der Dreiecksungleichung helfen.

**Aufgabe 8.** Beweise oder Widerlege, ob folgende Abbildungen Normen auf  $\mathbf{R}^2$  bzw.  $\mathbf{R}^3$  sind.

- (1)  $\|\cdot\|_1 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|_1 = x_1^2 + x_2^2$
- (2)  $\|\cdot\|_2 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|_2 = |x_1| + |x_2|$
- (3)  $\|\cdot\|_3 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|_3 = \max\{x_1, x_2\}$
- (4)  $\|\cdot\|_4 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|_4 = \max\{2|x_1|, 3|x_2|\}$
- (5)  $\|\cdot\|_5 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|_5 = \left|\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right|$

Sind sie äquivalent zur Maximumnorm?

## 2.2. Offene, abgeschlossene und kompakte Mengen.

**Aufgabe 9.** Beantworte und beweise folgende Aussagen:

- (1) Ist  $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$  offen/abgeschlossen?
- (2) Ist  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$  offen/abgeschlossen?
- (3) Ist  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$  offen/abgeschlossen?
- (4) Wie sieht  $\overline{(0, 1)}$  in  $\mathbf{R}$  aus?
- (5) Wie sieht  $\overline{\mathbf{Q}}$  in  $\mathbf{R}$  und  $\overline{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}}$  in  $\mathbf{R}$  aus?
- (6) Sei  $K = \{1/n \mid n \in \mathbf{N}\}$  Wie sieht  $\overline{K}$  aus?

**Hinweis.** Es darf benutzt werden, dass für je zwei reellen Zahlen  $x$  und  $y$  mit  $x < y$  es stets eine rationale Zahl  $q$  gibt, sodass  $x < q < y$ . Zudem darf benutzt werden, dass jede Umgebung  $(q - \epsilon, q + \epsilon)$  von  $q$  irrationale Zahlen enthält.

**Aufgabe 10.** Sei  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  eine stetige Abbildung. Definiere

$$M := \{x \in \mathbf{R}^3 : f(x) > 1\}.$$

Ist  $M$  offen, abgeschlossen, beides, oder keines von beidem in  $\mathbf{R}^3$ ?

**Aufgabe 11.** Untersuche, ob die folgenden Mengen offen, abgeschlossen oder keines von beidem sind.

$$M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid |x^2 + y + z| < 2, |z| < 1\}$$

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 2x^2\}$$

$$M_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^4 e^y = \sin(z) - 1\}$$

$$M_4 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0, y > 0\}$$

**Hinweis.** Korollar 9.31 ist hier sehr nützlich.

**Aufgabe 12.** Sei  $E = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\}$

- (1) Zeige per Definition, dass  $E$  kompakt ist. Es gibt noch 2 weitere Möglichkeiten Aufgabe 12 zu lösen, nenne diese.
- (2) Wie würde die Aufgabe für  $E \setminus \{0\}$  zu beantworten sein?

**Aufgabe 13.** Klausur 2020 1.Termin

Beweise, dass die Menge  $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^4 + \frac{y^2}{2} = 3\}$  kompakt ist.

**Aufgabe 14.** Klausur 2017 1.Termin

Zeige, dass die Menge  $M := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^4 = x^3 - x^4\}$  kompakt ist.

**Hinweis.** Zeige zunächst, dass  $|x| \leq 1$  für alle  $(x, y) \in M$  ist.

**Aufgabe 15.** Sei  $(X, d_1)$  und  $(Y, d_2)$  zwei nicht leere metrische Räume. Sei  $d_1$  die diskrete Metrik. Beweise oder widerlege, jede Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist stetig.

**Hinweis.** Benutze die Def der Stetigkeit, wie sehen die offenen Mengen in  $X$  aus?

**Aufgabe 16.** Sei  $X$  eine nicht leere Menge und  $d$  die diskrete Metrik. Zeige, dass  $A \subseteq X$  ist kompakt genau dann wenn  $A$  endlich ist.

**Hinweis.** Wie sehen die offenen Mengen bzgl.  $d$  aus?

### 2.3. Lineare Abbildungen und Vollständigkeit.

**Aufgabe 17.** Definiere

$$A: (C_{\mathbf{R}}([0, 1], \|\cdot\|_{\infty}) \rightarrow (C_{\mathbf{R}}([0, 1], \|\cdot\|_{\infty}), \\ f \mapsto A(f) = x^2 \cdot f.$$

Zeige:  $A$  ist eine lineare Abbildung auf  $(C_{\mathbf{R}}([0, 1], \|\cdot\|_{\infty})$ . Ist  $A$  stetig?

**Hinweis.** Satz 9.56 könnte sich für die Stetigkeit als nützlich erweisen.

**Aufgabe 18.** Sei  $V$  ein reeller Banachraum. Definiere

$$f: L(V) \rightarrow L(V), \\ A \mapsto A^2.$$

Was sind Definitions- und Wertebereich von  $f'$ ? Berechne  $f'$ !

**Aufgabe 19.** Sei  $[a, b] \subset \mathbf{R}$  ein beschränktes Intervall und  $X := (C^0([a, b]), \|\cdot\|_{\infty})$  der Raum der stetigen Funktionen auf  $[a, b]$  versehen mit der Maximumsnorm. Sei  $k \in C^0([a, b] \times [a, b])$ . Definiere

$$A: X \rightarrow X \quad (Au)(x) := \int_a^b k(x, y)u(y) dy \quad \text{für } x \in [a, b].$$

Zeige, dass  $A$  eine stetige lineare Abbildung ist.

**Hinweis.** Zeige zuerst die Linearität, beachte dabei Def. 9.55. Für die Stetigkeit schätze  $\|Au\|_{\infty}$  nach oben ab, sodass man eine Abschätzung der Natur: Für alle  $u \in X : \|Au\|_{\infty} \leq \|u\|_{\infty} \cdot C$  mit  $C > 0$  erhält. Warum ist man dann fertig?

**Aufgabe 20.** Sei  $\mathbf{R}[X]$  der Vektorraum aller Polynome mit reellen Koeffizienten mit Norm

$$(1) \quad \left\| \sum_{k=0}^n a_k \cdot X^k \right\| := \sum_{k=0}^n |a_k|$$

Definiere die Abbildungen  $A, B: \mathbf{R}[X] \rightarrow \mathbf{R}[X]$  via

$$(2) \quad A \left( \sum_{k=0}^n a_k X^k \right) := \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1},$$

$$(3) \quad B \left( \sum_{k=0}^n a_k X^k \right) := \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}.$$

Zeige, dass  $A$  und  $B$  lineare Abbildungen auf  $\mathbf{R}[X]$  sind. Sind diese Abbildungen stetig?

**Hinweis.** Satz 9.56 könnte sich für die Stetigkeit als nützlich erweisen. In der Diskussion um die Stetigkeit von  $A$  nutze  $p_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{n+1}$ . Ist die  $A$  beschränkt? Ist  $B$  beschränkt?

**Aufgabe 21.** Sei  $X$  die Menge aller stetigen Funktionen  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ . Beweisen oder Widerlege:

- (1)  $d_1$  mit  $d_1(f, g) = |f(0) - g(0)|$  ist eine Metrik auf  $X$ .
- (2)  $d_2$  mit  $d_2(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [0, 1]\}$  ist eine Metrik auf  $X$ .
- (3)  $d_3$  mit  $d_3(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$  ist eine Metrik auf  $X$ .

Sei nun die Folge  $(f_n)_{n=0}^\infty$  mit  $f_n(x) = x^n$  gegeben. Konvergiert diese Folge in der Metrik  $d_2$  oder  $d_3$ ?

**Hinweis.** Für  $d_2$  führe einen Widerspruchsbeweis. Zeige, dass dann die Folge auch punktweise konvergieren muss und berechne die Grenzfunktion. Ist die Grenzfunktion stetig? Für  $d_3$  zeige, dass  $f = 0$  ist per Definition.

**Aufgabe 22.** Sei  $X$  die Menge aller stetigen Funktionen  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}$  und sei  $d(f, g) = \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx$ . Sei  $(f_n)_{n=0}^\infty$  gegeben durch  $f_n(x) = \min\{x^n, 1\}$ . Zeige, dass  $(f_n)_{n=0}^\infty$  eine Cauchyfolge ist, jedoch nicht in  $(X, d)$  konvergiert.

**Hinweis.** Für den ersten Teil nutze gerade die Linearität des Integrals. Welche Werte nimmt  $f_n(x)$  und  $f_m(x)$  auf  $[0, 1]$  und  $[1, 2]$  an? Für den zweiten Teil führe einen Widerspruchsbeweis und zeige, dass solch eine Grenzfunktion  $f$  nicht existiert.

**Aufgabe 23.** Untersuche folgende metrische Räume auf Vollständigkeit.

- (1)  $X = \mathbf{N}$ ,  $d =$  euklidische Metrik
- (2)  $X = (0, 1)$ ,  $d =$  euklidische Metrik
- (3)  $X = (0, 1)$ ,  $d =$  diskrete Metrik

**Hinweis.**

- (1) Welche Werte nimmt eine Cauchyfolge in  $\mathbf{N}$  für groß genuges  $n \in \mathbf{N}$  an?
- (2) Konvergiert jede Folge in  $(0, 1)$  in  $(0, 1)$ ?
- (3) Nutze die Eigenschaft der diskreten Metrik aus.

2.4. **Abschließende Wiederholungsfragen des Kapitel 9.** Abschließend sollte man zu folgenden Fragen Ideen und/oder Lösungen parat haben:

- (1) Wie lautet die Definition der Stetigkeit zwischen zwei Metrischen Räumen definiert?
- (2) Welche äquivalente Aussagen zur Stetigkeit von Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen haben wir kennengelernt?
- (3) Welche äquivalente Aussagen zur Stetigkeit in normierten Vektorräumen für lineare Abbildungen haben wir kennengelernt?
- (4) Wahr oder Falsch? Seien  $V$  und  $W$  normierte Vektorräume und  $A : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung.  $A$  ist auf  $B(0, 1)$  beschränkt genau dann wenn  $A$  stetig ist.
- (5) Wahr oder Falsch?  
Der Durchschnitt überabzählbar vieler abgeschlossenen/offener Mengen in  $(\mathbf{R}, d)$  ist abgeschlossen/offen.
- (6) Wahr oder Falsch?  
Kompakte Mengen eines metrisches Raumes sind abgeschlossen.
- (7) Wahr oder Falsch?  
Seien  $X$  und  $Y$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Sei  $U \subseteq X$  eine offene Menge. Dann ist  $f(U) \subseteq Y$  ebenfalls offen.
- (8) Wahr oder Falsch?  
Seien  $X$  und  $Y$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Sei  $W \subseteq X$  eine abgeschlossene Menge. Dann ist  $f(W) \subseteq Y$  ebenfalls abgeschlossen.
- (9) Wahr oder Falsch?  
Seien  $X$  und  $Y$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Sei  $W \subseteq Y$  eine offene Menge. Dann ist  $f^{-1}(W) \subseteq X$  ebenfalls offen.
- (10) Wahr oder Falsch?  
Seien  $X$  und  $Y$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Sei  $K \subseteq X$  eine kompakte Menge. Dann ist  $f(K) \subseteq Y$  ebenfalls Kompakt.
- (11) Wahr oder Falsch?  
Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Sei  $K \subseteq M$  eine kompakte Menge. Sei  $A \subset K$ . Dann gilt:  $A$  ist ebenfalls kompakt.
- (12) Wahr oder Falsch?  
In jedem normierten Vektorraum sind 2 Normen stets äquivalent.
- (13) Wahr oder Falsch?  
Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und sei  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  eine konvergente Folge in  $(X, d)$ . Dann ist  $\{a\} \cup \{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$  kompakt.
- (14) Wahr oder Falsch?  
Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $B \subseteq X$  ist nicht abgeschlossen, falls es eine Folge in der Teilmenge gibt, sodass ihr Grenzwert außerhalb der Menge  $B$  liegt.
- (15) Sei  $X$  eine Menge und  $d$  die diskrete Metrik. Ist  $(X, d)$  vollständig? Nenne einen vollständigen und einen nicht vollständigen Metrischen Raum.

### 3. DIFFERENTIALRECHNUNG VON FUNKTIONEN MEHRERER VERÄNDERLICHER

#### Aufteilung der Aufgaben

- (1) Stetigkeit, partielle Differenzierbarkeit und Differenzierbarkeit auf  $\mathbf{R}^n$  (24) - (30)
- (2) Differenzieren auf allgemeineren Räumen (31) - (32)
- (3) Kurvendiskussion (33)-(36)

#### Wichtige Definitionen, Sätze und Aussagen des Kapitel 10

- (1) Ableitung/ Differenzierbarkeit / Stetig / Partielle Ableitung / Richtungsableitung / Partielle Ableitung im  $R^n$  / Pos. Definit / Neg. Definit / Hesse Matrix / Jacobi Matrix
- (2) Rechenregel der Ableitung 10.4
- (3) Schrankensatz 10.6
- (4) Satz von Schwartz 10.22/10.23
- (5) 10.11 Hinreichende Bedingung für stetig Differenzierbarkeit
- (6) Korollar 10.17
- (7) Bedingungen für lokales Minimum/Maximum 10.27

#### 3.1. Stetigkeit/Differenzierbarkeit/Richtungsableitung.

**Aufgabe 24.** Sei

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Nun zeige folgende Aussagen

- (1)  $f$  ist stetig.
- (2) Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x}$  und  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existieren. Sind sie stetig?
- (3) Die Richtungsableitung der Funktion  $f$  in  $(0, 0)$  existiert für alle  $v \in \mathbf{R}^2$ .
- (4)  $f$  ist trotzdem nicht differenzierbar in  $(0, 0)$ .

**Aufgabe 25.** Untersuche, in welchen Punkten die Funktion

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

stetig ist.

**Aufgabe 26.** Klausur 2011 2.Termin

Beweise oder widerlege, dass die Funktion

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

in  $(0, 0)$  stetig ist.



**Aufgabe 27. Klausur 2011 1. Termin**

$$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R},$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{xy^2+y^4}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechne die Richtungsableitung von  $f$  in der Stelle  $(0,0)$  in Richtung  $v = (v_1, v_2) \in \mathbf{R}^2, v \neq (0,0)$ . Ist  $f$  an der Stelle  $(0,0)$  differenzierbar?

**Aufgabe 28. Klausur 2017 2. Termin**

Sei

$$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

diese ist in jede Richtung  $(v, w) \neq (0, 0)$  differenzierbar. Zeige, dass für alle  $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus (0, 0)$  gilt, dass  $f(x, y)$  gleich der Richtungsableitung von  $f$  an der Stelle  $(0, 0)$  in Richtung  $(x, y)$  ist. Zeige auch, dass  $f$  in  $(0, 0)$  differenzierbar ist.

**Aufgabe 29. Definiere**

$$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R},$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & y = 0, \\ \left(1 - \cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\right) \sqrt{x^2 + y^2}, & y \neq 0. \end{cases}$$

Welche Richtungsableitungen von  $f$  existieren beim Punkt  $(0,0)$ ? Berechne sie! Ist  $f$  in  $(0,0)$  differenzierbar?

**Aufgabe 30. Klausur 2014 1. Termin**

Entscheide mit Begründung, ob die Funktion

$$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (1) stetig
- (2) partiell differenzierbar
- (3) differenzierbar

in  $(0, 0)$  ist.

**Aufgabe 31. Klausur 2017 2. Termin**

Sei  $f: V \rightarrow W$  eine Abbildung zwischen normierten Räumen  $(V, \|\cdot\|_V)$  und  $(W, \|\cdot\|_W)$ , die  $f(tx) = tx$  für alle  $x \in V$  und alle  $t \in \mathbf{R}$  erfüllt. Zeige, dass

- (1)  $f(x)$  für alle  $x \in V \setminus \{0\}$  die Richtungsableitung von  $f$  an der Stelle  $0$  in Richtung in  $x$  ist.
- (2) Sei  $f$  zudem diffbar in  $x = 0$ . Dann ist  $f$  eine stetige lineare Abbildung.

**Aufgabe 32. Sei  $\mathbf{GL}(\mathbf{R}^n) := \{A \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) \mid A \text{ ist invertierbar}\}$ .**

Definiere die Abbildung  $f: \mathbf{GL}(\mathbf{R}^n) \rightarrow L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$  via

$$f(A) := A^{-1}$$

Was sind Definitions- und Wertebereich von  $f'$ ? Berechne  $f'$ .

**Hinweis.** Benutze, dass  $\frac{d}{dA} id_{\mathbf{GL}(\mathbf{R}^n)} = 0$ , teile dann die Identität in  $A$  und  $A^{-1}$  und benutze

die Produktregel.

### 3.2. Kurvendiskussion.

**Aufgabe 33.** Welche Dimensionen haben Jacobi- und Hessematrix der Abbildung?

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y) = e^{xy} \sin(x + y)$$

Berechne diese Matrizen. Zeige, dass  $f$  überall differenzierbar ist.

**Aufgabe 34.** Berechne die lokalen und globalen Extrema der Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y) = x^3 + 2x^2y^2 - 3y^2 + 1.$$

**Aufgabe 35.** Klausur 2011 1.Termin Es sei

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + 2xy + y^2$$

Bestimme die kritische Punkte von  $f$  und untersuche jeweils, ob es sich um lokales Max/Min handelt.

**Aufgabe 36.** Es sei

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y) = -2x^3 + y^3 + 6x - 3y$$

Finde alle lokalen Minima und Maxima der Abbildung  $f$ .

**3.3. Abschließende Kontrollfragen des Kapitel 10.** Abschließend sollte man zu folgenden Fragen Ideen und/oder Lösungen parat haben:

Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung und  $x^* \in \mathbb{R}^n$ . Sei  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion.

(1) Wahr oder falsch?

Falls  $f$  nicht stetig in  $x^*$  ist, ist  $f$  auch nicht partiell differenzierbar in  $x^*$ .

(2) Wahr oder falsch?

Falls  $f$  partiell differenzierbar in  $x^*$  ist, ist  $f$  auch stetig in  $x^*$ .

(3) Wahr oder falsch?

Falls  $f$  partiell differenzierbar in  $x^*$  ist, dann ist  $f$  auch differenzierbar in  $x^*$ .

(4) Wahr oder falsch?

Falls  $f$  stetig partiell differenzierbar in  $x^*$  ist, dann ist  $f$  auch differenzierbar in  $x^*$ .

(5) Wahr oder falsch?

Falls  $f$  differenzierbar in  $x^*$  ist, dann ist  $f$  auch partiell differenzierbar in  $x^*$ .

(6) Wahr oder falsch?

Die Ableitung der Funktion  $f$  ist stets eine lineare Abbildung.

(7) Wahr oder falsch?

Stetigkeit in  $x^*$  ist eine notwendige Bedingung für Differenzierbarkeit in  $x^*$ .

(8) Wahr oder falsch?

Sei  $p^* = (x^*, y^*)$  ein kritischer Punkt der Funktion  $g$ . Falls  $H((x^*, y^*))$  eine positive definite Matrix ist, dann ist  $p^*$  ein Maximum.

(9) Wahr oder falsch? Sei  $p^* = (x^*, y^*)$  ein kritischer Punkt der Funktion  $g$ . Falls  $H((x^*, y^*))$  eine negativ definite Matrix ist, dann ist  $p^*$  ein Maximum.

(10) Wahr oder falsch? Sei  $p^* = (x^*, y^*)$  ein kritischer Punkt der Funktion  $g$ . Falls  $H((x^*, y^*))$  eine negativ definite Matrix ist, dann ist  $p^*$  ein Maximum.

(11) Sei  $p^* = (x^*, y^*)$  ein kritischer Punkt der Funktion  $g$ . Wie überprüft man  $H((x^*, y^*))$  auf positive Definiertheit und negative Definiertheit ?

## 4. NICHTLINEARE ANALYSIS

### Aufteilung der Aufgaben

- (1) Banachscher Fixpunktsatz (37) - (39)
- (2) Satz der implizierten Funktion (40) - (44)
- (3) Optimieren mittels Lagrangemultiplikatoren (45) - (49)

### Wichtige Definitionen, Sätze und Aussagen des Kapitel 11

- (1) Lokal lipschitzstetig / Kontraktion / Niveaumenge / Singularität / Lagrangemultiplikatoren
- (2) 11.1 Banachscher Fixpunktsatz
- (3) 11.9 Satz über inverse Funktion
- (4) 11.11 Satz über implizierte Funktion
- (5) 11.18 Satz der Lagrangemultiplikatoren

#### 4.1. Banachscher Fixpunktsatz.

**Aufgabe 37.** Überprüfe ob die folgenden Abbildungen Fixpunkte haben. Falls nicht gebe an, welche Voraussetzung des Banachschen Fixpunktsatzes verletzt sind.

$$f: (0, 1] \rightarrow (0, 1], \\ x \mapsto f(x) = \frac{x}{2}$$

$$f: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}, \\ 0 \mapsto f(0) = 1 \\ 1 \mapsto f(1) = 0$$

Sei  $1 \leq a \leq 2$  und sei

$$f: [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, \\ x \mapsto f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

#### **Aufgabe 38.** Klausur 2014. 2 Termin

Sei  $X$  ein Banachraum und  $f: X \rightarrow X$  eine Lipschitz-stetige Funktion mit  $L < 1$ . Zeige:

- (1) Für alle  $x_0$  ist die Abbildung  $x \mapsto f(x) - x_0$  zu einer bestimmten Lipschitz-Konstante stetig.
- (2) Die Abbildung  $g: X \rightarrow X$  mit  $x \mapsto g(x) = f(x) - x$  ist eine Bijektion.

**Aufgabe 39.** Sei  $[a, b] \subset \mathbf{R}$  ein abgeschlossenes Intervall,  $k \in C^0([a, b] \times [a, b])$  und  $u \in C^0([a, b])$  stetige Funktionen. Zeige, dass die Integralgleichung

$$x(t) = \mu \int_a^b k(t, s)x(s) ds + u(t)$$

für jedes  $\mu \in \mathbf{R}$  mit  $|\mu| < \frac{1}{\max_{(t,s)} |k(t,s)| \cdot (b-a)}$  eine eindeutige Lösung  $x \in C^0([a, b])$  besitzt.

**Hinweis.** Benutze den Banachschen Fixpunktsatz. Definiere dazu die Abbildung:

$$F : C^0([a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow C^0([a, b], \|\cdot\|_\infty),$$

$$(F(x))(t) = \mu \int_a^b k(t, s)x(s) ds + u(t)$$

Für die Stetigkeit, benutze den Satz der Stetigkeit Parameter abhängiger Integrale.

#### 4.2. Auflösen nichtlinearer Gleichungen.

**Aufgabe 40.** Zeige, dass die folgende Gleichung:

$$\cos(x^2) + \cos(y^2) + (2x + 1)(y - 2) = 0$$

in einer Umgebung des Punktes  $(0, 0)$  nach  $y = \varphi(x)$  aufgelöst werden kann. Bestimme die Ableitung von  $\varphi(x)$  an der Stelle  $x = 0$ .

#### **Aufgabe 41.** Klausur 2014 1. Termin

Sei  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  mit  $(x, y) \mapsto f(x, y) = -2x^3 + 12xy - 4y^2 + 54$ .

Sei zudem  $M_c = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$ .

- (1) Bestimme alle  $(x_0, y_0)$  sodass der Satz der impliziten Funktionen besagt, dass es eine stetig differenzierbare Funktion  $g$  auf  $I = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$  mit  $g(x_0) = y_0$  gibt, so dass für alle  $x \in I$ , die Gleichung  $f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)$  auflösbar ist.
- (2) Bestimme alle  $(x_0, y_0)$  sodass der Satz der impliziten Funktionen besagt, dass es eine stetig differenzierbare Funktion  $h$  auf  $J = (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$  mit  $h(y_0) = x_0$  gibt, so dass für alle  $y \in J$ , die Gleichung  $f(h(y), y) = f(x_0, y_0)$  auflösbar ist.
- (3) Bestimme alle  $c \in \mathbf{R}$ , sodass die Niveaumenge  $M_c$  eine Singularität

#### **Aufgabe 42.** Klausur 2014 2. Termin

Sei folgende Gleichung gegeben:

$$\cos(x + y) - xy = 1 + \frac{\pi^2}{16}$$

- (1) Zeige mit Hilfe des Satzes der impliziten Funktionen, dass die Gleichung in der Umgebung des Punktes  $(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}) \in \mathbf{R}^2$  nach  $x = g(y)$  auflösen lässt mit Hilfe einer differenzierbaren Funktion  $g$  und  $g(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$ . Überprüfe insbesondere, ob alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind.
- (2) Bestimme die Ableitung von  $g$  bei  $y_0 = \frac{\pi}{4}$  und begründe die Herleitung.

#### **Aufgabe 43.** Klausur 2020 1. Termin

Sei  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  mit  $(x, y) \mapsto f(x, y) = x^3 + xy^2 + x - y$ .

- (1) Zeige, dass die Gleichung  $f(x, y) = 0$  in einer Umgebung des Punktes  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  mit  $f(0, 0) = 0$  lokal nach  $x$  auflösbar ist, dass es also eine Funktion  $g(y)$  gibt, sodass diese Gleichung  $f(x, y) = 0$  in einer Umgebung von  $(0, 0)$  durch  $(x, y) = (g(y), y)$  gelöst wird.
- (2) Zeige, dass für alle  $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$  folgende Niveaumenge keine Singularitäten hat:  
 $M(x_0, y_0) := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) = f(x_0, y_0)\}$

**Aufgabe 44. Klausur 2017 1. Termin** Zeige, dass es eine differenzierbare Funktion  $\varphi$  mit  $\varphi(1) = 0$  gibt, so dass die Gleichung:

$$2 \sin(x) + e^{\sin(xy)} = x + y \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

in einer Umgebung des Punktes  $(0, 1) \in \mathbf{R}^2$  durch  $(x, y) = (\varphi(y), y)$  beschrieben wird. Bestimme zusätzlich das Taylorpolynom von  $\varphi$  um den Entwicklungspunkt  $y_0 = 1$

#### 4.3. Lagrangemultiplikatoren.

**Aufgabe 45.** Sei  $f : \mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}$  mit  $(x, y) \mapsto f(x, y) = \exp(-(x + y))$ . Sei  $M := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 0\}$ . Untersuche nun  $f|_M$  auf Minima und Maxima. Was war der Sinn und Zweck der Aufgabe?

**Aufgabe 46.** Gesucht werden die Extrema der Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R}, \\ (x, y) &\mapsto x^2 - y^2 \end{aligned}$$

unter der Zwangsbedingung, dass die Extrema auf dem Rand des Einheitskreises liegen sollen. Zeige, dass dieses Problem mit der Lagrangemultiplikatorenmethode lösbar ist und benutze sie, um alle Minima und Maxima zu berechnen.

**Aufgabe 47. Klausur 2017 1. Termin**

Sei die  $M := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^4 = x^3 - x^4\}$  gegeben. Sei weiterhin

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = x$$

eine stetige Funktion auf der  $M$ . Nun zeige:

- (1)  $M$  ist eine kompakte Menge
- (2)  $f$  hat als stetige Funktion auf  $M$  ein Maximum und Minimum. Bestimme dieses.

**Aufgabe 48. Klausur 2014 2. Termin**

Begründe die Existenz von Punkten  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  in der Menge  $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid g(x, y) := 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 16\}$  mit minimalen und maximalen euklidischen Abstand zum Ursprung  $(0, 0)$  und bestimme diese Abstände.

**Hinweis.** Es darf verwendet werden, dass  $E$  beschränkt ist. Bestimme die Extrema des Quadrats des Euklidischen Abstands

**Aufgabe 49.** Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) = x^2 - y^2$$

auf der Ellipse  $x^2 + 2y^2 = 3$ .

4.4. **Abschließende Kontrollfragen des Kapitel 11.** Abschließend sollte man zu folgenden Fragen Ideen/ Lösungen parat haben.

- (1) Nenne die Voraussetzungen des banachschen Fixpunktsatz. Welche Mittel haben wir kennengelernt diese zu zeigen?
- (2) Wahr oder Falsch? Der Satz der inversen Funktion ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Auflösung einer Gleichung.

- (3) Welche Notwendige Bedingung erfüllen Singularitäten einer Niveaumenge?
- (4) Warum ist das Beachten von Singularitäten für das Optimieren unter Nebenbedingung wichtig?
- (5) Ist der Satz der implizierten Funktion anwendbar in Singularitäten?
- (6) Ist für jeden Punkt der keine Singularität ist, der Satz der implizierten Funktion anwendbar?

## 5. LEBESGUEINTEGRATION AUF $\mathbf{R}^d$

### Aufteilung der Aufgaben

- (1) Satz von Fubini (50) - (53)
- (2) Satz der monotonen/beschränkten Konvergenz (54) - (60)
- (3) Jacobis Transformationsformel (61) - (67)

### Wichtige Definitionen, Sätze und Aussagen des Kapitel 12

- (1) Quader / Nullmenge / Treppenfunktion / Raum der Lebesgue Integrierbaren Funktionen
- (2) 12.15 Bedingung für Lebesgue Integrierbarkeit I
- (3) 12.17 Bedingung für Lebesgue Integrierbarkeit II (Lebesguekriterium)
- (4) 12.21 Satz von Fubini
- (5) 12.22 Satz der Monotonen Konvergenz (Beppo-Levi)
- (6) 12.24 Satz der beschränkten Konvergenz
- (7) 12.27 Fatous Lemma
- (8) 12.32/33 Jacobis Transformationsformel

### 5.1. Mehrfachintegrale und der Satz von Fubini.

**Aufgabe 50.** Seien folgende Mengen gegeben, benutze den Satz von Fubini um folgende Integrale zu berechnen.

- (1)  $Q_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
- (2)  $Q_2 := [1, 2] \times [0, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbf{R}^3$ .
- (3)  $Q_3 := [0, 2] \times [0, 1] \subset \mathbf{R}^3$

Berechne nun:

$$\int_{Q_1} \exp(x + y) d\mu$$

$$\int_{Q_2} \frac{\exp z}{x + y} d\mu$$

$$\int_{Q_3} x^3 + 3x^2y + y^3 d\mu$$

**Aufgabe 51.** Das Quadrat  $Q \subseteq \mathbf{R}^2$  sei gegeben durch  $Q := [-\pi, 0] \times [0, \pi]$ . Es wird durch die Diagonale  $y = -x$  in zwei Dreiecke  $A$  und  $B$  zerteilt. Zeichne das Quadrat mit den 2 Dreiecken und berechne

$$\int_A x \sin(y) d\mu \quad \text{und} \quad \int_B x \sin(y) d\mu.$$



**Aufgabe 52.** Sei  $D$  das Innere des Dreiecks mit Eckpunkten  $(0, 0)$ ,  $(0, \pi)$  und  $(\pi, \pi)$ . Berechne nun

$$\int_D x \cos(x + y) d\mu$$

**Hinweis.** Zeichne zuerst eine Skizze und schreibe die Menge  $D$  konkret für Tupel  $(x, y)$  hin, sodass man gerade ähnlich zur Aufgabe 51 die Grenzen ablesen kann.

**Aufgabe 53.** Diese Integrale sind etwas schwieriger, probiert erst ein paar Skizzen zu erstellen um dann das ganze auszurechnen. Seien folgende Mengen gegeben:

- (1)  $M_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y > 1, x + y < 3\}$
- (2)  $M_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

Nun berechne folgende Integrale

$$\int_{M_1} \frac{1}{(x + y)^3} d\mu$$

$$\int_{M_2} |xy| d\mu$$

## 5.2. Satz von Beppo Levi/Dominante Konvergenz und Lebesgueintegrierbarkeit.

**Aufgabe 54.** Betrachte folgende Funktionenfolgen  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ :

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \chi_{[0, n]}(x)$$

$$f_n(x) = n \cdot \chi_{[1/n, 2/n]}(x)$$

Nun folgende Aufgabenstellung:

- (1) Skizziere  $f_n$  für  $n \in \{1, 2, 3\}$
- (2) Zeige, dass  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  aus Lebesgue-integrierbaren Funktionen besteht. Zeige, dass  $f_n$  punktweise gegen  $f = 0$  fast überall konvergiert.
- (3) Gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = 0$  ?
- (4) Erkläre die Beobachtung in (3), was ist die Aussage und Idee der gesamten Aufgabe?

**Aufgabe 55.** Berechne folgende Integrale:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \pi]} \sqrt[n]{\sin(x)} d\mu(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-n, n]} \frac{1}{1 + x^2} d\mu(x)$$

**Hinweis.** Zuerst wähle eine vernünftige Folge  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ . Argumentiere dann mittels 12.15 oder 12.17, dass  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in L^1(\mathbf{R})$ . Dann benutze beispielsweise den Satz von Beppo-Levy oder den Satz der beschränkten Konvergenz. Dabei zeige alle Voraussetzungen des jeweiligen Satzes.

**Aufgabe 56.** Lebesgue Integrierbar? Sei

$$f: (0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \\ x \mapsto \ln(x).$$

Zeige, dass  $f$  Lebesgueintegrierbar ist und berechne das Integral.

**Aufgabe 57.** Klausur 2011 1. Termin

Sei

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ e^{-x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

und für  $n \in \mathbf{N}$  sei  $f_n := f \cdot \chi_{[0,n]}$  hierbei bezeichnet  $\chi_{[0,n]}$  die charakteristische Funktion des Intervalls  $[0, n]$ .

- (1) Begründe kurz, dass  $f_n$  Lebesgue-integrierbar ist, und berechne  $\int f_n d\mu$ .
- (2) Zeige, dass  $f$  Lebesgue-integrierbar ist und berechne  $\int f d\mu$ .

**Hinweis.** Nutze den Satz der monotonen Konvergenz von Beppo Levi für die Lebesgue-integrierbarkeit.

**Aufgabe 58.** 2017 2. Termin Für  $n \in \mathbf{N}$  sei

$$f_n: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad x \mapsto f_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \chi_{[1/n,1]}(x)$$

Zeige, dass

- (1)  $f_n \in L^1(\mathbf{R})$  für alle  $n \in \mathbf{N}$
- (2) Zeige, dass der punktweise Grenzwert von  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  in  $L^1(\mathbf{R})$  liegt und bestimme  $\int f d\mu$

**Aufgabe 59.** Klausur 2014 1. Termin

Betrachte die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  mit

$$f_n: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \sum_{\ell=0}^n x^\ell \cdot \chi_{[0,1]}.$$

Hierbei bezeichnet  $\chi_{[0,1]}$  die charakteristische Funktion des Intervalls  $[0, 1]$ .

- (1) Zeige, dass die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  fast überall gegen eine Funktion  $f$  auf  $[0, 1]$  konvergiert, und bestimme  $f$ .
- (2) Begründe, dass  $f_n \in L^1(\mathbf{R})$  für alle  $n \in \mathbf{N}$ .
- (3) Entscheide, ob  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  in  $L^1(\mathbf{R})$  (also bezüglich  $\|\cdot\|_1$ ) konvergiert, und begründe dies.

**Aufgabe 60.** Klausur 2011 2. Termin

Es sei  $f \in L^1(\mathbf{R})$ . Zeige:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{[0,r]} f d\mu = 0$$

**Hinweis.** Es genügt zu zeigen, dass für jede Nullfolge  $(r_n)_{n \in \mathbf{N}}$  mit  $r_n > 0$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,r_n]} f d\mu = 0$ . Hierfür wende man Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz an.

### 5.3. Jacobis Transformationsformel.

**Aufgabe 61.** Sei  $R \in (0, \infty]$  mit  $B_R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ . Zeige mittels Polarkoordinaten und Jacobis Transformationsformel:

$$\int_{B_R} d\mu = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} r d\varphi dr = \pi R^2$$

Dabei begründe genau, warum sich Jacobis Transformationsformel anwenden lässt und interpretiere dein Ergebnis. Gibt es noch eine weitere Möglichkeit dieses Integral ohne Jacobis Transformationsformel auszurechnen?

**Hinweis.** Für die Alternative lohnt sich ein Blick in die Aufgabe 53 (2).

**Aufgabe 62.** Ist die Abbildung

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

auf  $\overline{B_1(0)}$  integrierbar? Falls ja, berechne das Integral mit Hilfe Jacobis Transformationsformel.

**Hinweis.** Die Stetigkeit der Funktion haben wir bereits in Aufgabe 25 gezeigt.

**Aufgabe 63.** Sei  $M_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ . Es sei:

$$\int_{M_1} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{2 + \cos(x^2 + y^2)} dx dy$$

Rechne das Integral mittels Jacobis Transformationsformel aus.

**Aufgabe 64.** Klausur 2008 1. Termin

Sei  $G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq 4x^2 + y^2 + 2y + 1 \leq 25\}$  Berechne:

$$\int_G \frac{1}{4x^2 + y^2 + 2y + 1} d\mu$$

**Hinweis.** Wähle  $x = \frac{r \cos \phi}{2}$  und  $y = r \sin \phi - 1$  und benutze die Jacobi Transformationsformel.

**Aufgabe 65.** Klausur 2011. 1. Termin

Sei  $O = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y > 0, 4 < x^2 + 4y^2 < 16\}$

Sei  $U = \{(r, \varphi) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < r < 2, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$

Sei  $\Phi : U \rightarrow O$  mit  $(r, \varphi) \mapsto \Phi(r, \varphi) = (2r \cos \varphi, r \sin(\varphi))$

Berechne mit Hilfe der Jacobi Transformationsformel und  $\Phi$ :

$$\int_O \frac{y}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} d\mu$$

**Aufgabe 66.** Klausur 2017. 2. Termin

Sei  $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y > 0, x + y < 1\}$  und sei  $\Phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  mit  $(u, v) \mapsto \Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) = (uv, (1 - v)u)$ .

(1) Zeige, dass  $\Phi$  eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung von  $(0, 1)^2$  nach  $M$  ist.

(2) Sei  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$  mit  $f \in L^1((0, 1))$ . Zeige, dass gilt

$$\int_M f(x+y)d\mu = \int_{(0,1)} f(u)ud\mu(u)$$

**Hinweis.** Für die Bijektivität genügt es, dass  $\Phi[(0, 1)^2] \subseteq M$  und es eine Abbildung  $\Psi$  gibt, sodass  $\Psi[M] \subseteq (0, 1)^2$  mit  $\Phi \circ \Psi[M] = \mathbf{1}_M$  und  $\Psi \circ \Phi[(0, 1)^2] = \mathbf{1}_{(0,1)^2}$

**Aufgabe 67. Klausur 2017. 1.Termin**

Sei  $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x < y < x + 2, 0 < x + y < 4\}$  und sei  $\Phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  mit  $(u, v) \mapsto \Phi(u, v) = (u - v, u + v)$ . Nun zeige, dass

- (1)  $\Phi$  eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist.
- (2) Bestimme  $\Phi^{-1}[M]$ .

Nun abschließend berechne:

$$\int_M (x+y)d\mu$$

**5.4. Abschließende Kontrollfrage des Kapitel 12.** Zu folgenden Fragen sollte man nun Ideen/Lösungen parat haben.

- (1) Wahr oder Falsch?

Sei  $M \subset \mathbf{R}^d$  eine endliche Menge. Dann ist  $M$  eine Nullmenge.

Sei  $M \subset \mathbf{R}^d$  eine abzählbare Menge. Dann ist  $M$  eine Nullmenge.

Sei  $M \subset \mathbf{R}^d$  eine überabzählbare Menge. Dann ist  $M$  keine Nullmenge.

- (2) Wahr oder Falsch?

Alle riemannintegrablen Funktionen sind lebesgueintegrabel.

- (3) Wahr oder Falsch?

Alle lebesgueintegrablen Funktionen sind riemannintegrabel.

- (4) Wahr oder Falsch?

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  eine Folge in  $L^1(\mathbf{R}^d)$ , welche gegen  $f$  fast überall konvergiert. Dann ist  $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$  und  $(\int f_n d\mu)_{n \in \mathbf{N}}$  konvergiert gegen  $\int f d\mu$ .

- (5) Wahr oder Falsch?

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  eine Folge in  $L^1(\mathbf{R}^d)$ , wobei es ein  $k \in L^1(\mathbf{R}^d)$  gibt, sodass für alle  $n \in \mathbf{N}$  fast überall  $|f_n| \leq k$  gilt. Dann konvergiert  $(\int f_n d\mu)_{n \in \mathbf{N}}$  gegen  $\int f d\mu$ .

- (6) Wahr oder Falsch?

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  eine monotone Folge in  $L^1(\mathbf{R}^d)$  mit beschränkten Integralen. Dann konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  fast überall gegen  $f$  in  $L^1(\mathbf{R}^d)$  und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$ .

- (7) Welche Voraussetzung ist für den Satz von Fubini entscheidend?

- (8) Welche Voraussetzung ist für Jacobis Transformationsformel entscheidend?

- (9) Wie kann man zeigen, dass eine Funktion nicht Lebesgue Integrabel ist? Nenne ein Beispiel einer nicht Lebesgue Integrierbaren Funktion.

- (10) Wahr oder Falsch?

Falls  $f_n \in L^1(\mathbf{R})$  für alle  $n \in \mathbf{N}$ , dann konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  in  $L^1(\mathbf{R})$ .

## 6. SCHLUSSWORT

Grundlegend danke für die gute Mitarbeit während der 10 Sitzungen. Ich hoffe, dass ihr nun einen guten Start in die Vorbereitung auf die Prüfung hinter euch habt. Am besten arbeitet man jetzt nochmal die Übungsblätter und Zusatzübungen durch. Sollte man diese Aufgaben inklusive Wiederholungskursaufgaben selbstständig lösen können, dann sollte einer erfolgreichen Prüfung wenig im Wege stehen.

In diesem Sinne: Viel Erfolg für die Prüfung!