Die Asymptotik der periodischen und anti-periodischen Eigenwerte

Oktober 2026

1 Die Hill-Gleichung und ihre Eigenwerte

Wir betrachten die Hill-Gleichung

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \tag{1}$$

wobei $q \in L^2([0,1],\mathbb{R})$ gilt und q periodisch mit Periode 1 auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Zu dieser Gleichung gehören verschiedene Eigenwertprobleme, die sich durch ihre Randbedingungen unterscheiden:

- **Dirichlet-Randbedingungen:** $y(0) = y(1) = 0$.
- **Periodische Randbedingungen:** $y(1) = y(0)$ und $y'(1) = y'(0)$.
- **Antiperiodische Randbedingungen:** $y(1) = -y(0)$ und $y'(1) = -y'(0)$.

Die periodischen und antiperiodischen Eigenwerte liegen paarweise an den Rändern der Spektrallücken. Wir bezeichnen sie mit $\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}$ beziehungsweise $\lambda'_{2n-1}, \lambda'_{2n}$. Für die weitere Untersuchung betrachten wir verschobene Potentiale

$$q_\varphi(x) := q(x+\varphi), \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Da q periodisch ist, gilt $q_{\varphi+1} = q_\varphi$.

1.1 Fundamentallösungen und Diskriminante

Seien y_1 und y_2 die Lösungen von (1) mit den Anfangsbedingungen

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \qquad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1.$$

Die zugehörige Monodromiematrix ist

$$M(\lambda, q) = \begin{pmatrix} y_1(1) & y_2(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) \end{pmatrix}.$$

Sie bildet die Anfangswerte einer Lösung auf ihre Werte bei $x = 1$ ab. Wegen der Erhaltung des Wronskians gilt

$$\det M(\lambda, q) = 1.$$

Die *Diskriminante* ist definiert durch

$$\Delta(\lambda, q) := \operatorname{tr} M(\lambda, q).$$

Sie ist unter Verschiebungen des Potentials invariant. Um dies zu zeigen, betrachten wir die Fundamentalmatrix

$$Y(x,\lambda,q) := \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix},$$

die insbesondere $Y(0,\lambda,q) = I$ erfüllt. Für das verschobene Potential q_φ ist die zugehörige Fundamentalmatrix

$$Y_\varphi(x,\lambda) = Y(x+\varphi,\lambda,q)Y(\varphi,\lambda,q)^{-1}.$$

Dies folgt daraus, dass die Spalten von Y_φ Lösungen der Differentialgleichung zum Potential q_φ sind und $Y_\varphi(0,\lambda) = I$ gilt. Die Monodriematrix des verschobenen Potentials ist daher

$$\begin{aligned} M(\lambda, q_\varphi) &= Y_\varphi(1,\lambda) \\ &= Y(1+\varphi,\lambda,q)Y(\varphi,\lambda,q)^{-1}. \end{aligned}$$

Wegen der Periodizität des Potentials gilt

$$Y(x+1,\lambda,q) = Y(x,\lambda,q)M(\lambda,q).$$

Somit erhalten wir

$$M(\lambda,q_\varphi) = Y(\varphi,\lambda,q)M(\lambda,q)Y(\varphi,\lambda,q)^{-1}.$$

Die Monodromiematrizen der verschobenen Potentiale sind also zueinander konjugiert. Wegen der Zyklizität der Spur folgt

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda,q_\varphi) &= \operatorname{tr} M(\lambda,q_\varphi) \\ &= \operatorname{tr}\left(Y(\varphi,\lambda,q)M(\lambda,q)Y(\varphi,\lambda,q)^{-1}\right) \\ &= \operatorname{tr} M(\lambda,q) \\ &= \Delta(\lambda,q). \end{aligned}$$

Daher schreiben wir im Folgenden kurz $\Delta(\lambda)$. Die Eigenwerte mit periodischen beziehungsweise antiperiodischen Randbedingungen sind genau diejenigen λ, für die

$$\Delta(\lambda) = 2 \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \Delta(\lambda) = -2$$

gilt.

2 Die Spektralkurve

Sei $\mu_n(q)$ der n-te Dirichlet-Eigenwert des Potentials q. Wir bezeichnen mit $g_n(\cdot,q)$ eine zugehörige Dirichlet-Eigenfunktion.

Definition 2.1. Sei $q \in L^2([0,1],\mathbb{R})$ und $\mu_n(q)$ der n-te Dirichlet-Eigenwert. Dann definieren wir für $n \geq 1$

$$\kappa_n(q) := \log\left((-1)^n \frac{g_n'(1,q)}{g_n'(0,q)}\right).$$

Der Quotient der Randableitungen ist unabhängig von der Normierung der Eigenfunktion. Da g_n ein Vielfaches der Fundamentallösung $y_2(\cdot,\mu_n(q),q)$ ist, gilt

$$\frac{g_n'(1,q)}{g_n'(0,q)} = y_2'(1,\mu_n(q),q).$$

Insbesondere erhalten wir

$$y_2'(1,\mu_n(q),q) = (-1)^n e^{\kappa_n(q)}.$$

An einem Dirichlet-Eigenwert ist $y_2(1) = 0$. Die Monodromiematrix ist dort also eine Dreiecksmatrix. Aus $\det M = 1$ folgt

$$y_1(1)y_2'(1) = 1.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\Delta(\mu_n(q)) &= y_1(1) + y_2'(1)\\ &= y_2'(1) + \frac{1}{y_2'(1)}\\ &= (-1)^n \left(e^{\kappa_n(q)} + e^{-\kappa_n(q)}\right).\end{aligned}$$

Somit gilt die wichtige Identität

$$\boxed{\Delta(\mu_n(q)) = (-1)^n 2\cosh(\kappa_n(q)).} \tag{2}$$

Für das verschobene Potential betrachten wir die Kurve

$$\Gamma_n := \{(\kappa, \mu) : \mu \in I_n,\ \Delta(\mu) = (-1)^n 2\cosh(\kappa)\}.$$

Bemerkung 2.2. Die Schnittpunkte von Γ_n mit der $\kappa = 0$-Achse sind genau die Endpunkte des Intervalls I_n. Denn aus $\kappa = 0$ folgt

$$\Delta(\mu) = (-1)^n 2.$$

Je nach Parität von n handelt es sich dabei um ein periodisches oder antiperiodisches Eigenwertpaar.

Ist die zugehörige Spektrallücke offen, so ist Γ_n eine glatte, geschlossene Kurve, die diffeomorph zu S^1 ist. Ist die Lücke geschlossen, so fällt das Intervall I_n auf einen Punkt zusammen. In diesem Fall besteht Γ_n nur aus diesem einen Punkt.

3 Die Variation des Dirichlet-Eigenwertes

Wir untersuchen zunächst, wie sich der Dirichlet-Eigenwert bei einer Verschiebung des Potentials verändert.

Satz 3.1 (Variationssatz)**.** *[Mos26] Auf dem Bereich, auf dem $\kappa_n(q_\varphi) \neq 0$ gilt, ist*

$$\varphi \longmapsto \mu_n(q_\varphi)$$

streng monoton. Insbesondere kann sich die Monotonierichtung nur dort ändern, wo

$$\kappa_n(q_\varphi) = 0$$

gilt.

Zum Beweis verwenden wir die folgende Variationsformel:

$$\frac{d}{d\varphi}\mu_n(q_\varphi) = \frac{1 - e^{2\kappa_n(q_\varphi)}}{\|y_2(\cdot, \mu_n(q_\varphi), q_\varphi)\|^2_{L^2(0,1)}}. \tag{3}$$

Beweis. Zunächst nehmen wir an, dass q glatt ist. Wir schreiben

$$\mu(\varphi) := \mu_n(q_\varphi)$$

und wählen eine normierte Dirichlet-Eigenfunktion g_φ mit

$$-g_\varphi'' + q_\varphi g_\varphi = \mu(\varphi) g_\varphi, \qquad g_\varphi(0) = g_\varphi(1) = 0, \qquad \|g_\varphi\|_{L^2} = 1.$$

Wir differenzieren die Differentialgleichung nach φ. Da $\partial_\varphi q_\varphi = \partial_x q_\varphi$, erhalten wir nach Subtraktion der nach x differenzierten Gleichung für

$$w_\varphi := \partial_\varphi g_\varphi - g'_\varphi$$

die Gleichung

$$-w''_\varphi + (q_\varphi - \mu) w_\varphi = \mu'(\varphi) g_\varphi.$$

Für den Wronskian

$$W(x) := g_\varphi(x) w'_\varphi(x) - g'_\varphi(x) w_\varphi(x)$$

folgt daraus

$$W'(x) = -\mu'(\varphi) g_\varphi(x)^2.$$

Integration über $[0,1]$ liefert wegen der Normierung

$$W(1) - W(0) = -\mu'(\varphi).$$

Aus den Dirichlet-Randbedingungen folgt

$$w_\varphi(0) = -g'_\varphi(0), \qquad w_\varphi(1) = -g'_\varphi(1).$$

Daher ist

$$W(0) = g'_\varphi(0)^2, \qquad W(1) = g'_\varphi(1)^2.$$

Somit erhalten wir

$$\mu'(\varphi) = g'_\varphi(0)^2 - g'_\varphi(1)^2.$$

Nun ist

$$g_\varphi(x) = \frac{y_2(x, \mu(\varphi), q_\varphi)}{\|y_2(\cdot, \mu(\varphi), q_\varphi)\|_{L^2(0,1)}}.$$

Mit $y'_2(0) = 1$ und

$$y'_2(1) = (-1)^n e^{\kappa_n(q_\varphi)}$$

folgt

$$g'_\varphi(0)^2 = \frac{1}{\|y_2\|^2_{L^2}}, \qquad g'_\varphi(1)^2 = \frac{e^{2\kappa_n(q_\varphi)}}{\|y_2\|^2_{L^2}}.$$

Einsetzen ergibt die Formel (3). Für allgemeine Potentiale $q \in L^2([0,1])$ erhält man die Aussage durch Approximation mit glatten periodischen Potentialen. Dabei verwendet man die stetige Abhängigkeit der Eigenwerte und Fundamentallösungen vom Potential sowie die entsprechenden Konvergenzeigenschaften der Variationsidentität. □

Die Variationsformel zeigt insbesondere:

$$\kappa_n(q_\varphi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{d\varphi} \mu_n(q_\varphi) = 0.$$

Dies bedeutet zunächst nur, dass der Eigenwert an dieser Stelle stationär ist. Daraus folgt noch nicht, dass er tatsächlich seine Monotonierichtung ändert. Um dies zu zeigen, müssen wir zusätzlich nachweisen, dass κ_n an einer solchen Stelle das Vorzeichen wechselt.

4 Diagonaliserbarkeit der Monodromiematrix

Dazu benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 4.1 (Diagonalisierbarkeitslemma)**.** *[Mos26] Sei $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ mit*

$$\kappa_n(q_{\varphi_0}) = 0.$$

Gilt zusätzlich

$$\frac{d}{d\varphi}\kappa_n(q_\varphi)\bigg|_{\varphi=\varphi_0} = 0,$$

so besitzt die Monodromiematrix

$$M\big(\mu_n(q_{\varphi_0}), q_{\varphi_0}\big)$$

zwei linear unabhängige Eigenvektoren zum doppelten Eigenwert $(-1)^n$ und ist insbesondere diagonalisierbar.

Beweis. Wir setzen

$$y_\varphi(x) := y_2(x, \mu_n(q_\varphi), q_\varphi).$$

Da $\mu_n(q_\varphi)$ ein Dirichlet-Eigenwert ist, gilt $y_\varphi(0) = y_\varphi(1) = 0$. Außerdem folgt aus der Definition von κ_n und der Periodizität des Potentials die Floquet-Beziehung

$$y_\varphi(x+1) = (-1)^n e^{\kappa_n(q_\varphi)} y_\varphi(x).$$

Setze nun

$$z_t(x) := y_{\varphi_0+t}(x-t).$$

Wegen

$$q_{\varphi_0+t}(x-t) = q_{\varphi_0}(x)$$

erfüllt z_t die Gleichung

$$-z_t'' + q_{\varphi_0} z_t = \mu_n(q_{\varphi_0+t}) z_t$$

und die Floquet-Beziehung

$$z_t(x+1) = (-1)^n e^{\kappa_n(q_{\varphi_0+t})} z_t(x).$$

Für $t = 0$ ist z_0 eine Lösung zur Energie $\mu_0 := \mu_n(q_{\varphi_0})$. Da $\kappa_n(q_{\varphi_0}) = 0$, ist ihr Anfangswertvektor $(z_0(0), z_0'(0)) = (0, 1)$ ein Eigenvektor der Monodromiematrix zum Eigenwert $(-1)^n$. Wir differenzieren nun die Gleichung für z_t nach t bei $t = 0$. Nach der Variationsformel gilt

$$\frac{d}{dt}\mu_n(q_{\varphi_0+t})\bigg|_{t=0} = 0,$$

sodass $\dot{z}_0$ ebenfalls die Hill-Gleichung zur Energie μ_0 erfüllt. Differenzieren der Floquet-Beziehung liefert aufgrund der Voraussetzung

$$\frac{d}{d\varphi}\kappa_n(q_\varphi)\bigg|_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

außerdem

$$\dot{z}_0(x+1) = (-1)^n \dot{z}_0(x).$$

Somit ist auch der Anfangswertvektor von $\dot{z}_0$ ein Eigenvektor der Monodromiematrix zum Eigenwert $(-1)^n$. Die beiden Eigenvektoren sind linear unabhängig. Es gilt

$$z_0(0) = 0, \qquad z_0'(0) = 1,$$

während aus der Definition von z_t folgt

$$\dot{z}_0(0) = -1.$$

Der Anfangswertvektor von $\dot{z}_0$ besitzt also eine von null verschiedene erste Komponente, derjenige von z_0 dagegen nicht. Damit sind die beiden Vektoren linear unabhängig. □

Bemerkung 4.2. An einem Randpunkt einer offenen Spektrallücke gilt

$$\Delta(\mu) = \pm 2, \qquad \Delta'(\mu) \neq 0.$$

Dagegen charakterisieren

$$\Delta(\mu) = \pm 2, \qquad \Delta'(\mu) = 0$$

eine geschlossene Spektrallücke. In diesem Fall ist die Monodromiematrix gleich $\pm I$. Die Aussage über das Verschwinden der Ableitung der Diskriminante folgt direkt aus der Determinante der Monodromiematrix. Schreiben wir

$$M(\lambda, q) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix},$$

so gilt

$$\det M(\lambda, q) = a(\lambda)d(\lambda) - b(\lambda)c(\lambda) = 1.$$

Differenzieren nach λ ergibt

$$a'd + ad' - b'c - bc' = 0.$$

Ist nun $M(\mu, q) = \pm I$, so gilt an dieser Stelle

$$a(\mu) = d(\mu) = \pm 1, \qquad b(\mu) = c(\mu) = 0.$$

Damit folgt

$$0 = \pm a'(\mu) \pm d'(\mu) = \pm\big(a'(\mu) + d'(\mu)\big).$$

Da

$$\Delta'(\mu) = a'(\mu) + d'(\mu)$$

gilt, erhalten wir

$$\Delta'(\mu) = 0.$$

5 Beweis von Lemma 3.4

Wir beweisen nun die Aussage über die Spektralkurve.

Lemma 5.1 (Lemma 3.4)**.** *[Mos26] Sei $q \in L^2([0,1], \mathbb{R})$ periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Für $\varphi \in \mathbb{R}$ definieren wir q_φ wie oben. Dann durchläuft für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ die Familie*

$$\big(\kappa_n(q_\varphi), \mu_n(q_\varphi)\big), \qquad \varphi \in \mathbb{R},$$

alle zulässigen Paare der n-ten Komponente, das heißt

$$\begin{aligned} &\big\{\big(\kappa_n(q_\varphi), \mu_n(q_\varphi)\big) \mid \varphi \in \mathbb{R}\big\} \\ &\quad = \{(\kappa_n, \mu_n) \mid \mu_n \in I_n,\ \Delta(\mu_n) = (-1)^n 2\cosh(\kappa_n)\}, \end{aligned}$$

wobei

$$I_n = \begin{cases} [\lambda_n^-, \lambda_{n+1}^-], & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ [\lambda_{n-1}, \lambda_n], & \text{falls } n \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

Beweis von Lemma 3.4. Zunächst zeigen wir die Inklusion

$$\begin{aligned} &\{(\kappa_n(q_\varphi), \mu_n(q_\varphi)) : \varphi \in \mathbb{R}\} \\ &\quad \subseteq \{(\kappa, \mu) : \mu \in I_n,\ \Delta(\mu) = (-1)^n 2\cosh(\kappa)\}. \end{aligned}$$

Nach dem Oszillationstheorem liegt jeder Dirichlet-Eigenwert $\mu_n(q_\varphi)$ im zugehörigen Intervall I_n. Außerdem gilt nach (2)

$$\Delta(\mu_n(q_\varphi)) = (-1)^n 2\cosh(\kappa_n(q_\varphi)).$$

Damit ist die erste Inklusion gezeigt. Für die umgekehrte Inklusion betrachten wir zunächst eine offene Spektrallücke. An den beiden Endpunkten von I_n gilt $\Delta(\mu) = \pm 2$, also ist dort $\kappa = 0$. Wir zeigen, dass κ_n an jeder solchen Nullstelle das Vorzeichen wechselt. Angenommen, es gäbe eine Nullstelle φ_0, an der zusätzlich

$$\frac{d}{d\varphi}\kappa_n(q_\varphi)\bigg|_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

gilt. Nach dem Diagonalisierbarkeitslemma wäre die Monodromiematrix diagonalisierbar. Da ihr Eigenwert $(-1)^n$ doppelt ist, müsste

$$M(\mu_n(q_{\varphi_0}), q_{\varphi_0}) = (-1)^n I$$

gelten. Dies entspricht einer geschlossenen Spektrallücke und impliziert insbesondere

$$\Delta'(\mu_n(q_{\varphi_0})) = 0.$$

Das widerspricht der Tatsache, dass an einem Randpunkt einer offenen Spektrallücke $\Delta' \neq 0$ gilt. Folglich ist

$$\frac{d}{d\varphi}\kappa_n(q_\varphi)\bigg|_{\varphi=\varphi_0} \neq 0.$$

Somit wechselt κ_n an jeder Nullstelle das Vorzeichen. Nach der Variationsformel wechselt damit auch das Vorzeichen von $\frac{d}{d\varphi}\mu_n(q_\varphi)$. Der Dirichlet-Eigenwert kehrt an den Randpunkten von I_n also tatsächlich seine Monotonierichtung um. Da q_φ periodisch von φ abhängt, durchläuft

$$(\kappa_n(q_\varphi), \mu_n(q_\varphi))$$

eine geschlossene Kurve. Die beiden Vorzeichen von κ_n beschreiben die beiden Äste der Gleichung

$$\Delta(\mu) = (-1)^n 2\cosh(\kappa).$$

Da $\mu_n(q_\varphi)$ zwischen den beiden Endpunkten von I_n hin- und herläuft und κ_n an den Endpunkten das Vorzeichen wechselt, werden beide Äste vollständig durchlaufen. Damit ist die umgekehrte Inklusion gezeigt. Ist die Spektrallücke geschlossen, so besteht I_n nur aus einem Punkt λ^*. In diesem Fall gilt

$$\Delta(\lambda^*) = (-1)^n 2, \qquad \Delta'(\lambda^*) = 0.$$

Der Dirichlet-Eigenwert bleibt bei Verschiebung des Potentials gleich λ^*. Aus

$$\Delta(\lambda^*) = (-1)^n 2\cosh(\kappa_n(q_\varphi))$$

folgt dann $\kappa_n(q_\varphi) = 0$. Die Spektralkurve besteht also nur aus $(0, \lambda^*)$, womit die Aussage auch in diesem Fall gilt. □

6 Asymptotik der Eigenwerte

Zum Schluss verwenden wir die Beschreibung der Spektralkurve, um asymptotische Aussagen über die periodischen und antiperiodischen Eigenwerte zu erhalten. Als Quelle nutzen wir dafür das Buch von Pöschel und Trubowitz[J P87].

Setze

$$s := \int_0^1 q(x)\,dx.$$

Für die Dirichlet-Eigenwerte gilt die bekannte asymptotische Abschätzung

$$\mu_n(q_\varphi) = n^2\pi^2 + s + r_n(\varphi),$$

wobei die Fehlerterme gleichmäßig bezüglich φ beschränkt sind und

$$\left(\sup_{\varphi\in\mathbb{R}} |r_n(\varphi)|\right)_{n\geq 1} \in \ell^2$$

gilt. Nach Lemma 3.4 werden bei einer Verschiebung des Potentials beide Endpunkte des zugehörigen Spektralintervalls angenommen. Wir können daher für jeden Index n eine Verschiebung φ_n wählen, sodass der jeweilige periodische oder antiperiodische Eigenwert mit $\mu_n(q_{\varphi_n})$ übereinstimmt. Wegen der gleichmäßigen ℓ^2-Abschätzung der Fehlerterme bleibt die asymptotische Aussage auch bei dieser indexabhängigen Wahl von φ_n erhalten. Damit erhalten wir für die periodischen Eigenwerte

$$\boxed{\left(\lambda_{2n-1} - (2n)^2\pi^2 - s\right)_{n\geq 1} \in \ell^2,}$$

$$\boxed{\left(\lambda_{2n} - (2n)^2\pi^2 - s\right)_{n\geq 1} \in \ell^2,}$$

und für die antiperiodischen Eigenwerte

$$\boxed{\left(\lambda'_{2n-1} - (2n-1)^2\pi^2 - s\right)_{n\geq 1} \in \ell^2,}$$

$$\boxed{\left(\lambda'_{2n} - (2n-1)^2\pi^2 - s\right)_{n\geq 1} \in \ell^2.}$$

Insbesondere liegen die Eigenwerte jeweils paarweise nahe bei den entsprechenden Quadraten ganzzahliger Vielfacher von π. Der führende Korrekturterm wird dabei durch den Mittelwert des Potentials bestimmt.