

Das Oszillationstheorem II: Dirichlet- und Neumann-Eigenwerte der Hill-Gleichung

Seminararbeit

Fakultät für Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsmathematik
Universität Mannheim

Seminar: Ausgewählte Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen und dynamischer Systeme
Betreuer: Prof. Dr. M. Schmidt

Eingereicht von: Leonie Reichert
Studiengang: Bachelor of Science Wirtschaftsmathematik (B.Sc.)

Mannheim, 20.10.2026

1 Einleitung

Diese Ausarbeitung gibt den Inhalt meines Seminarvortrags zu Thema D „Das Oszillationstheorem II“ wieder. Sie folgt dem Kapitel 3 der Bachelorarbeit „Eigenwerte von Hills Gleichung“ von J. Crutoi [1] und übernimmt deren Nummerierung der Lemmata. Gezeigt wird, dass für die Hill-Gleichung $-y'' + qy = \lambda y$ mit $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ die Dirichlet- und die Neumann-Eigenwerte reell sind und dass in jedem abgeschlossenen Gap der periodischen und antiperiodischen Eigenwerte genau ein Dirichlet- und genau ein Neumann-Eigenwert liegt.

2 Motivation und Hauptsatz

2.1 Die Hill-Gleichung und zwei weitere Randwertprobleme

Wir betrachten die Hill-Gleichung

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

mit $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$, 1-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Dabei ist λ der Spektralparameter. Lösungen y sind so zu verstehen, dass y und y' absolut stetig sind und die Gleichung fast überall erfüllt ist. Die periodischen Eigenwerte (λ_n) und die antiperiodischen Eigenwerte (λ'_n) aus dem Oszillationstheorem I werden hier als bekannt vorausgesetzt (Abschnitt 3).

Hinzu kommen zwei weitere Randwertprobleme auf dem Intervall $[0, 1]$:

- *Dirichlet*: $y(0) = 0, y(1) = 0$,
- *Neumann*: $y'(0) = 0, y'(1) = 0$.

Ein λ heißt *Dirichlet-* bzw. *Neumann-Eigenwert*, wenn es eine nichttriviale Lösung von (1) gibt, die die jeweiligen Randbedingungen erfüllt. Die periodischen und antiperiodischen Eigenwerte bilden die Ränder der Spektrallücken (Gaps). Die zentrale Frage lautet daher:

Wo liegen die Dirichlet- und die Neumann-Eigenwerte in Bezug auf diese Gaps?

2.2 Der Hauptsatz

Satz (Kor. 3.8, 3.13) (Oszillationstheorem II). *Für jedes $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ bilden die Dirichlet- und Neumann-Eigenwerte reelle Folgen $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Für den ersten Neumann-Eigenwert gilt $\nu_0 \leq \lambda_0$, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\begin{aligned} \mu_{2n-1}, \nu_{2n-1} &\in [\lambda'_{2n-1}, \lambda'_{2n}], \\ \mu_{2n}, \nu_{2n} &\in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]. \end{aligned}$$

Das bedeutet: In jedem abgeschlossenen Gap liegt genau ein Dirichlet-Eigenwert und genau ein Neumann-Eigenwert. Dabei gilt:

- Die periodischen und antiperiodischen Eigenwerte bilden die Gap-Ränder.
- μ_n und ν_n liegen im selben Gap; im Allgemeinen gilt aber $\mu_n \neq \nu_n$.
- Ein Gap kann *geschlossen* sein (beide Ränder fallen zusammen). „Abgeschlossen“ und „geschlossen“ sind verschiedene Begriffe: Ein abgeschlossenes Gap ist das Gap mit seinen Rändern, es ist geschlossen, wenn die Ränder zusammenfallen.
- Für $q = 0$ sind alle Gaps geschlossen, und es gilt $\mu_n = \nu_n$ für $n \geq 1$ (Abschnitt 8).

2.3 Beweisstrategie

Der Beweis hat vier Schritte, die für Dirichlet und Neumann parallel durchgeführt werden:

1. *Charakterisierung* (Lemma 3.2): Eigenwerte sind Nullstellen geeigneter Funktionen.
2. *Lage* (Lemma 3.4, 3.9): Eigenwerte liegen nur in den Spektrallücken, d. h. dort, wo $|\Delta| \geq 2$ ist.
3. *Existenz* (Lemma 3.6, 3.10, 3.11): In jedem Gap liegt mindestens ein Eigenwert.
4. *Eindeutigkeit* (Lemma 3.7, 3.12; Kor. 3.8, 3.13): In jedem Gap liegt höchstens ein Eigenwert.

Das Werkzeug dafür sind das Fundamentalsystem, die Wronski-Identität, die Monodromiematrix und die Hill-Diskriminante.

3 Grundlagen

3.1 Ergebnisse aus dem Oszillationstheorem I

Satz 2.3 (Anordnung der periodischen und antiperiodischen Eigenwerte). *Die periodischen Eigenwerte $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ und die antiperiodischen Eigenwerte $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \dots$ erfüllen*

$$\lambda_0 < \lambda'_1 \leq \lambda'_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda'_3 \leq \lambda'_4 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots$$

Dabei heißen die Bereiche mit $|\Delta(\lambda)| < 2$ *Stabilitätsintervalle*. Die *Gaps* (Instabilitätsintervalle) sind $(\lambda'_{2n-1}, \lambda'_{2n})$ und $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, dort gilt $|\Delta(\lambda)| > 2$. An den Rändern ist $\Delta = \pm 2$.

3.2 Das normierte Fundamentalsystem und die Wronski-Identität

Seien y_1, y_2 die Lösungen von (1) mit

$$y_1(0, \lambda) = 1, \quad y'_1(0, \lambda) = 0, \quad y_2(0, \lambda) = 0, \quad y'_2(0, \lambda) = 1.$$

Jede Lösung lässt sich eindeutig schreiben als $y(x, \lambda) = c_1 y_1(x, \lambda) + c_2 y_2(x, \lambda)$. Für festes x sind $\lambda \mapsto y_j(x, \lambda)$ ganze Funktionen. Für zwei Lösungen u, v sei $W(u, v) := uv' - u'v$. Fast überall gilt $u'' = (q - \lambda)u$ und $v'' = (q - \lambda)v$, also

$$W' = uv'' - u''v = (q - \lambda)uv - (q - \lambda)uv = 0.$$

Damit ist W konstant. Für das Fundamentalsystem ist $W(y_1, y_2)(0) = y_1(0, \lambda) y'_2(0, \lambda) - y'_1(0, \lambda) y_2(0, \lambda) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$. Insbesondere sind y_1, y_2 linear unabhängig, und bei $x = 1$ gilt die zentrale *Wronski-Identität*

$$y_1(1, \lambda) y'_2(1, \lambda) - y_2(1, \lambda) y'_1(1, \lambda) = 1. \quad (W)$$

Sie ist das wichtigste algebraische Werkzeug des Beweises.

3.3 Monodromiematrix und Diskriminante

Die *Monodromiematrix*

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(1, \lambda) & y_2(1, \lambda) \\ y'_1(1, \lambda) & y'_2(1, \lambda) \end{pmatrix}$$

beschreibt, wie sich die Anfangsdaten einer Lösung nach einer Periode verändern. Aus (W) folgt $\det M(\lambda) = 1$. Die *Hill-Diskriminante* ist die Spur

$$\Delta(\lambda) = \operatorname{tr} M(\lambda) = y_1(1, \lambda) + y'_2(1, \lambda).$$

Es gilt $\Delta(\lambda) = 2 \iff \lambda$ periodischer Eigenwert, und $\Delta(\lambda) = -2 \iff \lambda$ antiperiodischer Eigenwert (Prop. 1.9).

3.4 Weitere Resultate aus dem Oszillationstheorem I

Wir benötigen folgende Resultate aus Kapitel 2 von [1]:

- $\Delta(\lambda) > 2$ für $\lambda < \lambda_0$, und $\Delta'(\lambda_0) < 0$ (Lemma 2.6, 2.16).
- An den Rändern eines offenen Gaps ist $\Delta' \neq 0$ (einfache Nullstellen); ein Gap ist genau dann geschlossen, wenn $M(\lambda) = \pm I$ gilt (Kor. 2.17).
- Die Ableitung der Diskriminante (Lemma 2.14):

$$\Delta'(\lambda) = (y_1(1, \lambda) - y_2'(1, \lambda)) \int_0^1 y_1 y_2 \, dx - y_2(1, \lambda) \int_0^1 y_1^2 \, dx + y_1'(1, \lambda) \int_0^1 y_2^2 \, dx. \quad (2.16)$$

4 Randwertprobleme: Charakterisierung

Lemma 3.2, Def. 3.3 (Charakterisierung). λ ist genau dann Dirichlet-Eigenwert, wenn $y_2(1, \lambda) = 0$ gilt, und genau dann Neumann-Eigenwert, wenn $y_1'(1, \lambda) = 0$ gilt.

Beweis: Dirichlet: Jede Lösung ist $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$. Die Bedingung $y(0) = 0$ liefert $y(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0$, also $c_1 = 0$. Damit ist $y = c_2 y_2$. Eine nichttriviale Lösung hat $c_2 \neq 0$, und $y(1) = 0$ gilt dann genau dann, wenn $y_2(1, \lambda) = 0$ ist.

Neumann: Es ist $y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$. Die Bedingung $y'(0) = 0$ liefert $y'(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 0$, also $c_2 = 0$. Damit ist $y' = c_1 y_1'$. Eine nichttriviale Lösung hat $c_1 \neq 0$, und $y'(1) = 0$ gilt dann genau dann, wenn $y_1'(1, \lambda) = 0$ ist. $\square$

Die charakteristischen Funktionen des Dirichlet- bzw. Neumann-Problems sind

$$d(\lambda) := y_2(1, \lambda), \quad n(\lambda) := y_1'(1, \lambda).$$

Die Eigenwerte sind genau die Nullstellen von d bzw. n .

4.1 Die Eigenwerte sind reell

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Dirichlet- oder Neumann-Eigenwert mit Eigenfunktion $y \neq 0$. Multiplikation von (1) mit $\bar{y}$ und Integration über $[0, 1]$ ergibt

$$\int_0^1 (-y'' + qy) \bar{y} \, dx = \lambda \int_0^1 |y|^2 \, dx.$$

Partielle Integration liefert

$$\int_0^1 |y'|^2 \, dx - [y' \bar{y}]_0^1 + \int_0^1 q |y|^2 \, dx = \lambda \int_0^1 |y|^2 \, dx.$$

Bei Dirichlet ist $y(0) = y(1) = 0$, bei Neumann ist $y'(0) = y'(1) = 0$. Also in beiden Fällen verschwindet der Randterm. Es bleibt

$$\int_0^1 |y'|^2 \, dx + \int_0^1 q |y|^2 \, dx = \lambda \int_0^1 |y|^2 \, dx.$$

Da q reellwertig ist, ist die linke Seite reell, und wegen $y \neq 0$ ist $\int_0^1 |y|^2 \, dx > 0$. Daher ist $\lambda \in \mathbb{R}$. Sowohl das Dirichlet- als auch das Neumann-Spektrum besteht also aus reellen Eigenwerten. Nur für reelle λ sind d , n und Δ reell, und nur dort kann der Zwischenwertsatz benutzt werden.

4.2 Die Eigenwerte bilden Folgen

Die Dirichlet- und Neumann-Randwertprobleme definieren selbstadjungierte Differentialoperatoren auf $L^2([0, 1])$ mit kompakter Resolvente. Aus der regulären Sturm–Liouville-Theorie folgt: Das Spektrum ist rein diskret, die Eigenwerte sind reell und einfach, das Spektrum ist nach oben unbeschränkt und nach unten beschränkt. Deshalb schreiben wir $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für die Dirichlet-Eigenwerte und $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ für die Neumann-Eigenwerte. Wo diese Zahlen liegen, wird im Folgenden bewiesen; die Asymptotik von d und n für $\lambda \rightarrow -\infty$ wird aus [2] zitiert, wo sie gebraucht wird.

5 Dirichlet-Eigenwerte

5.1 Lage der Eigenwerte

Lemma 3.4 (Lage der Dirichlet-Eigenwerte). *Für jeden Dirichlet-Eigenwert μ gilt $|\Delta(\mu)| \geq 2$, d. h. μ liegt in einem Gap oder auf dessen Rand.*

Beweis: Es gilt $y_2(1, \mu) = 0$. Dann ist

$$M(\mu) = \begin{pmatrix} y_1(1, \mu) & 0 \\ y_1'(1, \mu) & y_2'(1, \mu) \end{pmatrix}$$

eine (untere) Dreiecksmatrix. Aus (W) bleibt, weil der zweite Term wegfällt, $y_1(1, \mu) y_2'(1, \mu) = 1$. Also ist $y_1(1, \mu) \neq 0$ und

$$\Delta(\mu) = y_1(1, \mu) + \frac{1}{y_1(1, \mu)}.$$

Für alle reellen $a \neq 0$ gilt $|a + a^{-1}| \geq 2$, denn

$$a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{(a-1)^2}{a}, \quad a + \frac{1}{a} + 2 = \frac{(a+1)^2}{a}$$

haben beide das Vorzeichen von a . Mit $a = y_1(1, \mu)$ folgt $\Delta(\mu) \geq 2$ oder $\Delta(\mu) \leq -2$. $\square$

5.2 Vorzeichen an den Gap-Rändern

Lemma 3.5 (Vorzeichen an den Gap-Rändern). *An jedem Gap-Rand ($\Delta = \pm 2$) gilt*

$$y_2(1, \lambda) y_1'(1, \lambda) = -(y_1(1, \lambda) \mp 1)^2 \leq 0.$$

Am Gap-Rand bestimmt also das Vorzeichen von $y_2(1, \lambda)$ das von $y_1'(1, \lambda)$, sofern $y_2(1, \lambda) \neq 0$ ist.

Beweis: Sei $\Delta = 2$. Aus (W) folgt $y_2(1, \lambda) y_1'(1, \lambda) = y_1(1, \lambda) y_2'(1, \lambda) - 1$. Aus $\Delta = 2$ folgt $y_2'(1, \lambda) = 2 - y_1(1, \lambda)$. Einsetzen ergibt

$$y_2(1, \lambda) y_1'(1, \lambda) = y_1(1, \lambda)(2 - y_1(1, \lambda)) - 1 = -(y_1(1, \lambda) - 1)^2 \leq 0.$$

Für $\Delta = -2$ ist $y_2'(1, \lambda) = -2 - y_1(1, \lambda)$, und es folgt $y_2(1, \lambda) y_1'(1, \lambda) = -(y_1(1, \lambda) + 1)^2 \leq 0$. $\square$

5.3 Die Vorzeichenformel für Δ'

Sei $\Delta(\lambda) = 2$ und $y_2(1, \lambda) \neq 0$. In (2.16) schreiben wir $A = \int_0^1 y_1 y_2 \, dx$, $B = \int_0^1 y_1^2 \, dx$, $C = \int_0^1 y_2^2 \, dx$, also

$$\Delta' = (y_1(1, \lambda) - y_2'(1, \lambda))A - y_2(1, \lambda)B + y_1'(1, \lambda)C.$$

Wegen $y_2'(1, \lambda) = 2 - y_1(1, \lambda)$ und Lemma 3.5 gilt

$$y_1(1, \lambda) - y_2'(1, \lambda) = 2(y_1(1, \lambda) - 1), \quad y_1'(1, \lambda) = -\frac{(y_1(1, \lambda) - 1)^2}{y_2(1, \lambda)}.$$

Damit wird

$$\Delta' = 2(y_1(1, \lambda) - 1)A - y_2(1, \lambda)B - \frac{(y_1(1, \lambda) - 1)^2}{y_2(1, \lambda)}C.$$

Wir klammern $-\frac{1}{y_2(1, \lambda)}$ aus:

$$\Delta' = -\frac{1}{y_2(1, \lambda)} \left(y_2(1, \lambda)^2 B - 2 y_2(1, \lambda) (y_1(1, \lambda) - 1) A + (y_1(1, \lambda) - 1)^2 C \right).$$

Die Klammer ist (zweite binomische Formel) genau

$$\int_0^1 \left(y_2(1, \lambda) y_1 - (y_1(1, \lambda) - 1) y_2 \right)^2 \, dx,$$

also

$$\Delta'(\lambda) = -\frac{1}{y_2(1, \lambda)} \int_0^1 \left(y_2(1, \lambda) y_1 - (y_1(1, \lambda) - 1) y_2 \right)^2 \, dx. \quad (2)$$

Der Integrand ist das Quadrat einer nichttrivialen Lösung: Der Koeffizient von y_1 ist $y_2(1, \lambda) \neq 0$, und y_1, y_2 sind linear unabhängig. Das Integral ist also strikt positiv. Für $\Delta = -2$ ersetzt man $y_1(1, \lambda) - 1$ durch $y_1(1, \lambda) + 1$ und das Ergebnis ist dasselbe. Es folgt die *Vorzeichenkopplung* an den Gap-Rändern:

$$\operatorname{sgn} \Delta'(\lambda) = -\operatorname{sgn} y_2(1, \lambda) \quad (y_2(1, \lambda) \neq 0). \quad (3)$$

Wie die Kurve Δ am Gap-Rand läuft (steigend oder fallend), bestimmt also das Vorzeichen von $y_2(1, \lambda)$.

5.4 Existenz

Lemma 3.6 (Dirichlet: Existenz im Gap). *In jedem Gap $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$ bzw. $(\lambda'_{2n-1}, \lambda'_{2n})$ liegt mindestens ein Dirichlet-Eigenwert.*

Beweis: Wir betrachten ein Gap mit $\Delta > 2$. Im Gap ist $\Delta > 2$, an den Rändern $\Delta = 2$. Also steigt Δ am linken und fällt am rechten Rand:

$$\Delta'(\lambda_{2n-1}) > 0, \quad \Delta'(\lambda_{2n}) < 0,$$

und zwar strikt, da die Ränder eines offenen Gaps einfach sind (Kor. 2.17). Mit der Vorzeichenkopplung (3) folgt

$$y_2(1, \lambda_{2n-1}) < 0, \quad y_2(1, \lambda_{2n}) > 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $\mu \in (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$ mit $y_2(1, \mu) = 0$.

Ist $y_2(1, \lambda) = 0$ an einem Rand, so ist dieser Rand selbst ein Dirichlet-Eigenwert, und es ist nichts zu zeigen. Dazu gehört auch ein geschlossenes Gap ($M = \pm I$). Für $\Delta < -2$ im Gap kehren sich beide Vorzeichen um. $\square$

5.5 Einfachheit

Lemma 3.7 (Einfachheit der Dirichlet-Eigenwerte). *Jeder Dirichlet-Eigenwert μ ist einfach: $\dot{y}_2(1, \mu) \neq 0$.*

Beweis: Geometrisch. Aus $y(0) = 0$ folgt $c_1 = 0$, jede Eigenfunktion ist ein Vielfaches von $y_2(\cdot, \mu)$, der Eigenraum ist eindimensional.

Algebraisch. Wir differenzieren $-y_2'' + qy_2 = \lambda y_2$ nach λ :

$$-\dot{y}_2'' + q\dot{y}_2 = y_2 + \lambda \dot{y}_2.$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit $\dot{y}_2$, der zweiten mit y_2 und Subtraktion lässt die Terme mit q und λ wegfallen. Es bleibt $y_2''\dot{y}_2 - \dot{y}_2''y_2 = y_2^2$, und mit einer Nullergänzung (Produktregel) ist das

$$(y_2'\dot{y}_2 - \dot{y}_2'y_2)' = y_2^2.$$

Wir integrieren über $[0, 1]$. Bei $x = 0$ verschwinden alle Terme, denn $y_2(0, \lambda) = 0$ und $y_2'(0, \lambda) = 1$ sind unabhängig von λ , also $\dot{y}_2(0, \lambda) = \dot{y}_2'(0, \lambda) = 0$. Bei $x = 1$ ist $y_2(1, \mu) = 0$. Es bleibt

$$0 < \int_0^1 y_2^2(x, \mu) dx = y_2'(1, \mu) \dot{y}_2(1, \mu).$$

Also ist $\dot{y}_2(1, \mu) \neq 0$: d hat bei μ eine einfache Nullstelle. □

5.6 Genau ein Eigenwert pro Gap

Korollar 3.8 (Dirichlet: genau ein Eigenwert pro Gap). *In jedem Gap (einschließlich der Ränder) liegt genau ein Dirichlet-Eigenwert.*

Beweis: Nach Lemma 3.4 ist $\Delta(\mu) = a + \frac{1}{a}$ mit $a = y_1(1, \mu)$ (Dreiecksmatrix, $\det M = 1$); dabei ist $y_2'(1, \mu) = \frac{1}{a}$, hat also dasselbe Vorzeichen wie a . Daher

$$\operatorname{sgn} y_2'(1, \mu) = \operatorname{sgn} \Delta(\mu).$$

Nach Lemma 3.7 gilt $y_2'(1, \mu) \dot{y}_2(1, \mu) > 0$. Zusammen:

$$\operatorname{sgn} d'(\mu) = \operatorname{sgn} \dot{y}_2(1, \mu) = \operatorname{sgn} \Delta(\mu).$$

Ein Gap hat festes Vorzeichen von Δ . Also kreuzt d die Nulllinie dort nur in einer Richtung (bei $\Delta > 2$ von unten nach oben, bei $\Delta < -2$ von oben nach unten). Zwei Nullstellen mit gleicher Kreuzrichtung sind unmöglich, da dazwischen eine Kreuzung in Gegenrichtung liegen müsste. Mit der Existenz (Lemma 3.6) folgt: genau eine. □

Bemerkung (Der Bereich links von λ_0). Für $\lambda < \lambda_0$ ist $\Delta > 2$, und $d > 0$ für $\lambda \rightarrow -\infty$. Da d dort nur nach oben kreuzen darf, hat d in $(-\infty, \lambda_0)$ keine Nullstelle. Deshalb beginnt die Folge mit μ_1 im ersten Gap.

Zusammenfassung Dirichlet:

Lage: $|\Delta(\mu)| \geq 2$ (Dreiecksmatrix, $a + 1/a$).

Existenz: $\operatorname{sgn} \Delta' = -\operatorname{sgn} y_2(1, \cdot)$ und Zwischenwertsatz.

Einfach: $\int_0^1 y_2^2 = y_2'(1, \mu) \dot{y}_2(1, \mu) > 0$.

Eindeutig: $\operatorname{sgn} d'(\mu) = \operatorname{sgn} \Delta(\mu)$. Ergebnis: $\mu_{2n-1} \in [\lambda_{2n-1}', \lambda_{2n}']$ und $\mu_{2n} \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

6 Neumann-Eigenwerte

Der Aufbau ist weitgehend parallel zum Dirichlet-Fall.

6.1 Lage der Eigenwerte

Lemma 3.9 (Lage der Neumann-Eigenwerte). *Für jeden Neumann-Eigenwert ν gilt $|\Delta(\nu)| \geq 2$.*

Beweis: Es gilt $y'_1(1, \nu) = 0$. Dann ist

$$M(\nu) = \begin{pmatrix} y_1(1, \nu) & y_2(1, \nu) \\ 0 & y'_2(1, \nu) \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix. Aus (W) folgt $y_1(1, \nu) y'_2(1, \nu) = 1$, also $y_1(1, \nu) \neq 0$ und

$$\Delta(\nu) = y_1(1, \nu) + \frac{1}{y_1(1, \nu)}, \quad |\Delta(\nu)| \geq 2.$$

□

Das ist dieselbe Rechnung wie bei Dirichlet, nur mit vertauschten Rollen in der Dreiecksmatrix: Dort steht die Null oben rechts, hier unten links.

6.2 Existenz im Gap

Lemma 3.10 (Neumann: Existenz im Gap). *In jedem Gap liegt mindestens ein Neumann-Eigenwert.*

Beweis: Wir betrachten ein Gap mit $\Delta > 2$. Sind $y_2(1, \lambda) \neq 0$ und $y'_1(1, \lambda) \neq 0$ an den Rändern, so liefert Lemma 3.5

$$y_2(1, \lambda) y'_1(1, \lambda) < 0 \implies \operatorname{sgn} y'_1(1, \lambda) = -\operatorname{sgn} y_2(1, \lambda).$$

Mit der Vorzeichenkopplung (3) folgt

$$\operatorname{sgn} y'_1(1, \lambda) = -\operatorname{sgn} y_2(1, \lambda) = \operatorname{sgn} \Delta'(\lambda).$$

Da $\Delta'(\lambda_{2n-1}) > 0$ und $\Delta'(\lambda_{2n}) < 0$ ist, hat $n(\lambda) = y'_1(1, \lambda)$ an den Rändern verschiedene Vorzeichen. Der Zwischenwertsatz liefert ein $\nu \in (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$ mit $y'_1(1, \nu) = 0$. Für $\Delta < -2$ kehren sich alle Vorzeichen um. □

Randfälle. Der Beweis von Lemma 3.10 braucht $y_2(1, \lambda) y'_1(1, \lambda) < 0$ strikt. Es sind folgende Fälle zu unterscheiden:

- $y'_1(1, \lambda) = 0$ an einem Rand: Der Rand ist selbst ein Neumann-Eigenwert.
- $y_2(1, \lambda) = 0$ an einem Rand: Der Rand ist ein Dirichlet-Eigenwert. Dann ist $y_1(1, \lambda) = y'_2(1, \lambda) = 1$ (bzw. -1) nach Lemma 3.5 und (W), und aus (2.16) folgt direkt

$$\Delta'(\lambda) = y'_1(1, \lambda) \int_0^1 y_2^2 dx \implies \operatorname{sgn} y'_1(1, \lambda) = \operatorname{sgn} \Delta'(\lambda).$$

Die Vorzeichenkopplung $\operatorname{sgn} y'_1(1, \lambda) = \operatorname{sgn} \Delta'(\lambda)$ gilt also auch hier.

- Geschlossenes Gap: $M(\lambda_{2n-1}) = \pm I$, d. h. $y_2(1, \cdot) = y'_1(1, \cdot) = 0$. Der gemeinsame Rand ist Dirichlet- und Neumann-Eigenwert.

6.3 Der erste Neumann-Eigenwert ν_0

Lemma 3.11 (Existenz des ersten Neumann-Eigenwerts). *Es existiert ein Neumann-Eigenwert $\nu_0 \leq \lambda_0$.*

Beweis: Schritt 1 (Verhalten bei $-\infty$). Für $\lambda = -k^2$, $k \rightarrow \infty$, geht die Gleichung in $-y'' + k^2 y = 0$ über:

$$y_1(x, \lambda) \approx \cosh(kx), \quad y_1'(1, \lambda) \approx k \sinh k.$$

Genauer ([2], Basic Estimates; $q \in L^2$): $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} y_1'(1, \lambda) = +\infty$.

Schritt 2. Wir zeigen $y_1'(1, \lambda_0) \leq 0$. Dann hat die stetige Funktion $n(\lambda) = y_1'(1, \lambda)$ auf $(-\infty, \lambda_0]$ nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle ν_0 . Bei λ_0 ist $\Delta(\lambda_0) = 2$ und $\Delta'(\lambda_0) < 0$ (Lemma 2.16).

- *Fall $y_2(1, \lambda_0) \neq 0$:* Die Vorzeichenformel (2) gibt $\Delta'(\lambda_0) = -\frac{1}{y_2(1, \lambda_0)} \int_0^1 (\dots)^2 dx < 0$, also $y_2(1, \lambda_0) > 0$. Nach Lemma 3.5 ist

$$y_1'(1, \lambda_0) = -\frac{(y_1(1, \lambda_0) - 1)^2}{y_2(1, \lambda_0)} \leq 0.$$

- *Fall $y_2(1, \lambda_0) = 0$:* Dann ist $y_1(1, \lambda_0) = y_2'(1, \lambda_0) = 1$, und (2.16) ergibt $\Delta'(\lambda_0) = y_1'(1, \lambda_0) \int_0^1 y_2^2 dx < 0$, also $y_1'(1, \lambda_0) < 0$.

In beiden Fällen ist $y_1'(1, \lambda_0) \leq 0$. Zusammen mit Schritt 1 folgt: Es gibt $\nu_0 \in (-\infty, \lambda_0]$ mit $y_1'(1, \nu_0) = 0$. $\square$

6.4 Einfachheit

Lemma 3.12 (Einfachheit der Neumann-Eigenwerte). *Jeder Neumann-Eigenwert ν ist einfach: $y_1'(1, \nu) \neq 0$.*

Beweis: Geometrisch. Aus $y'(0) = 0$ folgt $c_2 = 0$, die Eigenfunktionen sind Vielfache von $y_1(\cdot, \nu)$.

Algebraisch. Wie bei Dirichlet, jetzt für y_1 : Es gilt $(y_1' y_1 - y_1 y_1')' = y_1^2$. Wir integrieren über $[0, 1]$. Bei $x = 0$ verschwindet alles ($y_1(0, \lambda) = y_1'(0, \lambda) = 0$), bei $x = 1$ ist $y_1'(1, \nu) = 0$. Es bleibt

$$0 < \int_0^1 y_1^2(x, \nu) dx = -y_1'(1, \nu) y_1(1, \nu),$$

also $y_1'(1, \nu) y_1(1, \nu) < 0$. Insbesondere ist $y_1'(1, \nu) \neq 0$: n hat eine einfache Nullstelle. $\square$

6.5 Genau ein Eigenwert pro Gap

Korollar 3.13 (Neumann: genau ein Eigenwert pro Gap). *In jedem Gap (einschließlich der Ränder) liegt genau ein Neumann-Eigenwert.*

Beweis: Nach Lemma 3.9 ist $\Delta(\nu) = a + \frac{1}{a}$ mit $a = y_1(1, \nu)$, also $\operatorname{sgn} y_1(1, \nu) = \operatorname{sgn} \Delta(\nu)$. Mit Lemma 3.12 folgt

$$\operatorname{sgn} n'(\nu) = \operatorname{sgn} y_1'(1, \nu) = -\operatorname{sgn} \Delta(\nu).$$

Im Gap mit $\Delta > 2$ kreuzt n die Nulllinie nur von oben nach unten, im Gap mit $\Delta < -2$ nur von unten nach oben. Zwei Nullstellen in derselben Richtung sind unmöglich. Mit der Existenz (Lemma 3.10) folgt: genau eine. $\square$

Dasselbe Argument auf $(-\infty, \lambda_0]$ (dort $\Delta \geq 2$): n startet bei $+\infty$ und darf nur nach unten kreuzen. Also gibt es dort genau einen Neumann-Eigenwert ν_0 .

6.6 Dirichlet und Neumann im Vergleich

	Dirichlet	Neumann
Randbedingung	$y(0) = y(1) = 0$	$y'(0) = y'(1) = 0$
Charakteristische Funktion	$d = y_2(1, \cdot)$	$n = y_1'(1, \cdot)$
Dreiecksmatrix	untere	obere
Δ im Eigenwert	$y_2'(1, \mu) + \frac{1}{y_2'(1, \mu)}$	$y_1(1, \nu) + \frac{1}{y_1(1, \nu)}$
Kreuzrichtung	$\operatorname{sgn} d' = \operatorname{sgn} \Delta$	$\operatorname{sgn} n' = -\operatorname{sgn} \Delta$
Lage	μ_n im Gap n	ν_n im Gap n ; $\nu_0 \leq \lambda_0$

Beide Eigenwerte liegen im selben Gap, ihre Lage darin ist aber im Allgemeinen verschieden. Die Kreuzrichtungen von d und n sind entgegengesetzt.

7 Beweis des Hauptsatzes

Beweis des Hauptsatzes: Wir setzen die bisherigen Ergebnisse zusammen.

1. *Reell, Folgen:* Die Eigenwerte sind reell (partielle Integration) und isolierte Nullstellen ganzer Funktionen.
2. *Lage:* Alle Eigenwerte liegen in $\{|\Delta| \geq 2\}$, also in einem abgeschlossenen Gap oder in $(-\infty, \lambda_0]$.
3. *Dirichlet:* Genau ein μ pro Gap, keines in $(-\infty, \lambda_0)$ (Kor. 3.8).
4. *Neumann:* Genau ein ν pro Gap (Kor. 3.13) und genau ein $\nu_0 \leq \lambda_0$ (Lemma 3.11).

Mit der Reihenfolge der Gaps aus Satz 2.3, $\lambda_0 < \lambda'_1 \leq \lambda'_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \dots$, folgt

$$\nu_0 \leq \lambda_0, \quad \mu_{2n-1}, \nu_{2n-1} \in [\lambda'_{2n-1}, \lambda'_{2n}], \quad \mu_{2n}, \nu_{2n} \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]. \quad \square$$

8 Beispiel $q = 0$

8.1 Lösungen, Monodromiematrix, Diskriminante

Die Gleichung ist $-y'' = \lambda y$. Für $\lambda = k^2 > 0$ ist

$$y_1(x, \lambda) = \cos(kx), \quad y_2(x, \lambda) = \frac{\sin(kx)}{k}.$$

Die Monodromiematrix und die Diskriminante sind

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos k & \frac{\sin k}{k} \\ -k \sin k & \cos k \end{pmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = 2 \cos k.$$

- Stabil: $|2 \cos k| < 2$, d. h. $k \notin \pi \mathbb{N}_0$.
- Periodisch ($\Delta = 2$): $k = 2m\pi$, also $\lambda_{2m-1} = \lambda_{2m} = (2m\pi)^2$, und $\lambda_0 = 0$.
- Antiperiodisch ($\Delta = -2$): $k = (2m-1)\pi$, also $\lambda'_{2m-1} = \lambda'_{2m} = ((2m-1)\pi)^2$.

Alle Gaps sind geschlossen: $M = \pm I$ bei $k = m\pi$.

8.2 Dirichlet und Neumann

Dirichlet: $d(\lambda) = \frac{\sin k}{k} = 0$ für $k = n\pi$, also $\mu_n = n^2\pi^2$, $n \geq 1$.

Neumann: $n(\lambda) = -k \sin k = 0$ für $k = n\pi$ sowie $\lambda = 0$, also $\nu_n = n^2\pi^2$, $n \geq 0$.

Für $\lambda = 0$ ist $y_1 \equiv 1$, $y_1' \equiv 0$, also $\nu_0 = 0 = \lambda_0$. Hier gilt $\nu_0 \leq \lambda_0$ mit Gleichheit. Für $\lambda < 0$ ist $n(\lambda) = k \sinh k > 0$ (mit $\lambda = -k^2$), es gibt also keinen weiteren Eigenwert.

8.3 Kontrolle des Satzes

Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned}\lambda_0 = \nu_0 = 0, \quad \lambda'_1 = \lambda'_2 = \mu_1 = \nu_1 = \pi^2, \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \mu_2 = \nu_2 = 4\pi^2, \quad \lambda'_3 = \lambda'_4 = \mu_3 = \nu_3 = 9\pi^2, \dots\end{aligned}$$

also

$$[\lambda'_{2n-1}, \lambda'_{2n}] = \{((2n-1)\pi)^2\} \ni \mu_{2n-1}, \nu_{2n-1}, \quad [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}] = \{(2n\pi)^2\} \ni \mu_{2n}, \nu_{2n},$$

und $\nu_0 = 0 \leq \lambda_0 = 0$. Bei $q = 0$ ist jedes Gap auf einen Punkt zusammengezogen und enthält genau einen Eigenwert von jeder Sorte, nämlich den Gap-Punkt selbst.

9 Zusammenfassung

Die drei zentralen Schritte des Beweises:

1. *Lage:* Aus $\det M = 1$ folgt an einem Dirichlet- oder Neumann-Eigenwert $\Delta = a + \frac{1}{a}$ und damit $|\Delta| \geq 2$.
2. *Existenz:* Die Vorzeicheninformationen an den Gap-Rändern, vor allem $\operatorname{sgn} \Delta' = -\operatorname{sgn} y_2(1, \cdot) = \operatorname{sgn} y'_1(1, \cdot)$, und der Zwischenwertsatz liefern mindestens einen Eigenwert pro Gap.
3. *Eindeutigkeit:* Die Integralidentitäten für die λ -Ableitungen liefern einfache Nullstellen. Die feste Durchgangsrichtung führt zu höchstens einem Eigenwert pro Gap.

In jedem abgeschlossenen Gap der Hill-Gleichung liegt damit genau ein Dirichlet- und genau ein Neumann-Eigenwert, und der erste Neumann-Eigenwert liegt links von λ_0 oder genau dort.

Literatur

- [1] J. Crutoi, *Eigenwerte von Hills Gleichung*, Bachelorarbeit, Universität Mannheim.
- [2] J. Pöschel, E. Trubowitz, *Inverse Spectral Theory*, Pure and Applied Mathematics 130, Academic Press, 1987.
- [3] W. Magnus, S. Winkler, *Hill's Equation*, Interscience Publishers, 1966.
- [4] M. S. P. Eastham, *The Spectral Theory of Periodic Differential Equations*, Scottish Academic Press, 1973.