Universität Mannheim

Das Oszillationstheorem

Seminar: Ausgewählte Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen und dynamische Systeme

Vorgelegt von: Emma Chi Matthäus
Studiengang: Wirtschaftsmathematik (B.Sc.)

Eingereicht bei: Prof. Dr. Martin Schmidt

November 3, 2026

Einführung

Diese Seminararbeit behandelt das Oszillationstheorem, welches das Zusammenspiel zwischen den Eigenwerten und dem Oszillationsverhalten der Lösungen der Hill-Gleichung beschreibt. Um nicht direkt ins kalte Wasser zu springen, rufen wir uns zunächst das zugrundeliegende Setting ins Gedächtnis.
Aus den vorherigen Vorträgen sind uns die Hill-Gleichung sowie das zugehörige Fundamentalsystem und dessen Ableitungen bereits bekannt. Wir betrachten hierbei ein 1-periodisches Potential $q \in L^2([0,1], R)$, welches periodisch auf ganz R fortgesetzt wird, sodass $q(x+n) = q(x)$ für alle $x \in R$ und $n \in Z$ gilt.
Das Lösungsverhalten wird durch die Fundamentallösung (bzw. Fundamentalmatrix) beschrieben:

$$F(x,\lambda,q) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda,q) & y_2(x,\lambda,q) \\ y_1'(x,\lambda,q) & y_2'(x,\lambda,q) \end{pmatrix}$$

Diese setzt sich auch auf $(x,\lambda) \in R \times C \times L^2([0,1], R)$ fort.
Wir haben gesehen, dass sich die Periodizität des Potentials q unmittelbar in der Eigenschaft

$$F(x+1,\lambda,q) = F(x,\lambda,q)M(\lambda,q)$$

widerspiegelt, wobei $M(\lambda,q) = F(1,\lambda,q)$ die sogenannte **Monodromiematrix** darstellt.
In dieser Arbeit wollen wir nun einen Schritt weitergehen und untersuchen, wie diese Lösungsstruktur das Oszillationsverhalten bestimmt. Dazu betrachten wir spezielle Randwertprobleme: Ein Parameter $\lambda \in C$ heißt **periodischer** bzw. **antiperiodischer Eigenwert**, wenn eine nichttriviale Lösung y existiert, die sich bei einer Verschiebung um eine Periode genau mit dem Faktor $+1$ (periodisch: $y(x+n) = y(x)$) bzw. -1 (antiperiodisch: $y(x+n) = (-1)^n y(x)$ für alle $n \in Z$) reproduziert.
Genau diese Eigenwerte bilden das Fundament für die Stabilitätsintervalle und die Oszillationsstruktur, die wir uns im Folgenden genauer ansehen.

Das Oszillationstheorem

Als Kernstück der vorliegenden Arbeit wird zunächst das zentrale Theorem eingeführt:

Satz 1 (Oszillationstheorem) *Sei $q \in L^2([0,1], R)$. Dann besitzt die Hill-Gleichung zwei monoton wachsende Folgen reeller periodischer und antiperiodischer Eigenwerte*

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots$$
$$\textit{und} \quad \lambda_1' \leq \lambda_2' < \lambda_3' \leq \lambda_4' < \dots,$$

die die ***Verschachtelungsungleichung***

$$\lambda_0 < \lambda_1' \leq \lambda_2' < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3' \leq \lambda_4' < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots$$

erfüllen. Ferner gilt $\lambda_n \to \infty$ sowie $\lambda_n' \to \infty$ für $n \to \infty$. Die Lösungen der Hill-Gleichung sind genau dann stabil, wenn $|\Delta(\lambda)| < 2$, und die Stabilitätsintervalle sind

$$(\lambda_0, \lambda_1'), \quad (\lambda_2', \lambda_1), \quad (\lambda_2, \lambda_3'), \quad (\lambda_4', \lambda_3), \quad \dots$$

Unser Satz hier besagt also, dass die Lösungen der Hill-Gleichung genau dann stabil, wenn der Betrag der Diskriminante kleiner als 2 ist, also $|\Delta(\lambda)| < 2$.
Die offenen Intervalle, in denen diese Stabilität vorliegt, werden durch die alternierenden Eigenwerte $(\lambda_0, \lambda_1'), (\lambda_2', \lambda_1), (\lambda_2, \lambda_3'), ...$ gebildet, welche sich mit instabilen Bereichen abwechseln, in denen $|\Delta(\lambda)| > 2$ gilt. Diese Zusammenhänge können wir in folgender Skizze genauer sehen. Die beiden waagerechten Linien repräsentieren dabei die Schwellenwerte $\gamma = \pm 2$ der Stabilitätsgrenze, während die Werte λ_n und λ_n' die Punkte auf der horizontalen Achse markieren, an denen die oszillierende Kurve diese Schwellen berührt oder schneidet. Wir können in der Skizze das Ineinandergreifen der periodischen und antiperiodischen Eigenwerte sowie die Stabilitätsintervalle (die Bereiche wo die Kurve im Streifen zwischen +2 und -2 verläuft) und die instabilen Lücken sehen.

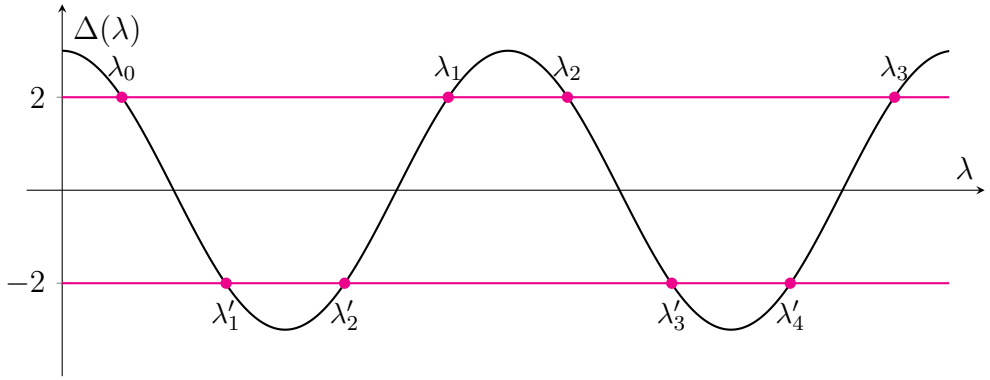


Figure 1: Schematische Darstellung der verschachtelten Eigenwerte λ_n und λ_n' entlang der Schwellenwerte $y = \pm 2$.

Um dieses Theorem nun zu beweisen betrachten wir nacheinander die zentralen Eigenschaften des Oszillationstheorems, durch die dieses bewiesen wird.

Eigenschaften des Oszillationstheorems

Beginnen wir direkt mit dem ersten Lemma, welches die erste Eigenschaft beschreibt:

Lemma 1 (Eigenwerte sind nicht komplex) *Für jedes $\lambda \in C$ mit $\mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$ besitzt die Hill-Gleichung keine stabile Lösung.*

Unser erstes Lemma schließt komplexe Eigenwerte aus und zeigt, dass das Spektrum sowie alle Stabilitätsbereiche rein reell sind.
In unserer Skizze würde Lemma 1 dafür sorgen, dass unsere λ auf der reellen Achse liegen.

[Beweis:] Lemma 1 soll durch einen Widerspruchsbeweis gezeigt werden. Wir nehmen also an, es gibt eine beschränkte Lösung $y = u + iv$, die einen Imaginärteil besitzt.
Als erstes wird nun der Eigenwert $\lambda = \mu + i\nu$ (mit $\nu \neq 0$) sowie die Lösung $y = u + iv$ in Real- und Imaginärteil $(u, v \in R)$ zerlegt.
Dies setzen wir nun in die Hill-Gleichung ein und erhalten zwei neue gekoppelte Differentialgleichungen für u'' und v'':

$$u'' = (q(x) - \mu)u + \nu v,$$
$$v'' = (q(x) - \mu)v - \nu u.$$

Die erste Gleichung wird nun mit v multipliziert und die zweite mit u.
Anschließend ziehen wir $v''u$ von $u''v$ ab:

$$u''v - v''u = (q(x) - \mu)uv + \nu v^2 - \big((q(x) - \mu)uv - \nu u^2\big) = \nu(u^2 + v^2).$$

Wir drücken die linke Seite nun als Ableitung aus: $(u'v - v'u)' = u''v - v''u$.
Eine Integration von 0 bis x liefert uns die fundamentale Identität:

$$u'(x)v(x) - v'(x)u(x) = \nu \int_0^x (u(t)^2 + v(t)^2)\,\mathrm{d}t + C.$$

Nun kommen wir zu Schritt 2: Die linke Seite bleibt beschränkt.
Da y beschränkt ist, sind nach der Floquet-Theorie auch u, v, u', v' beschränkt. Das liegt daran, dass wir sie in der Form $y(x) = e^{ipx}p(x)$ darstellen können (mit stetigem, 1-periodischem $p(x)$).
Es gibt also eine Konstante $C > 0$ mit $|u|, |v|, |u'|, |v'| \leq C$.
Damit ergibt sich für die linke Seite die Dreiecksungleichung:

$$|u'(x)v(x) - v'(x)u(x)| \leq |u'||v| + |v'||u| \leq C^2 + C^2 = 2C^2.$$

Die linke Seite kann also den festen Wert $2C^2$ niemals überschreiten.

In Schritt 3 zeigen wir, dass die rechte Seite unendlich wächst.
Da $u^2 + v^2 = |y|^2$ eine positive, 1-periodische Funktion ist, addiert sich bei jedem Intervall der Länge 1 derselbe positive Flächeninhalt K auf:

$$K = \int_0^1 |y(t)|^2\,\mathrm{d}t > 0 \quad (\text{da } \nu \neq 0).$$

Für $x = n \in N$ gilt somit für das Integral:

$$\int_0^n (u(t)^2 + v(t)^2)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} |y(t)|^2\,\mathrm{d}t = n \cdot K.$$

Für $n \to \infty$ wächst dieser Ausdruck gegen unendlich:

$$|\nu(n \cdot K) + C| \geq |\nu| \cdot n \cdot K - |C| \to \infty.$$

Dies führt zum Widerspruch: Die linke Seite ist durch $2C^2$ beschränkt, während die rechte Seite für $x \to \infty$ gegen unendlich strebt. Somit kann es für $\lambda \notin R$ keine beschränkte Lösung geben. qed.

Kommen wir nun zur nächsten Eigenschaft:

Lemma 2 (Beschränktheit des Spektrums nach unten) *Es existiert ein $\lambda^* \in R$ mit der Eigenschaft, dass für alle $\lambda \leq \lambda^*$ gilt:*

$$\Delta(\lambda) > 2.$$

Unser zweites Lemma gibt uns einen kleinsten Eigenwert λ_0.
Links von λ_0 gibt es keinen Eigenwert und $\Delta(\lambda)$ ist instabil. Unser Spektrum ist

also beschränkt.

[Beweis:] Lemma 2 zeigen wir, indem wir zunächst negative λ substituieren:

Sei $\lambda = -s^2$ mit $s > 0$, sodass für $\lambda \to -\infty$ stets $s \to +\infty$ gilt.
Durch die komplexe Transformation erhalten wir $\cos(\sqrt{\lambda}x) = \cos(isx) = \cosh(sx)$ (Hyperbelkosinus mit $\cosh(sx) = \frac{e^{sx}+e^{-sx}}{2}$).

Für die Darstellung der Lösungsfamilie und die Fehlerabschätzung betrachten wir die Diskriminante $\Delta(\lambda) = y_1(1,\lambda)+y_2'(1,\lambda)$, welche die Summe der Fundamentalsystem-Lösungen an der Stelle $x = 1$ darstellt.

Beide Lösungen verhalten sich bei x=1 im Wesentlichen wie $\cosh(s)$ plus einen Fehlerterm $E_1(s)$ bzw. $E_2(s)$, womit sich der Lösungsansatz ergibt:

$$y_1(1,\lambda) = \cosh(s) + E_1(s),$$
$$y_2'(1,\lambda) = \cosh(s) + E_2(s).$$

Mithilfe der Basic Estimates können wir die Fehlerterme $E_1(s)$ und $E_2(s)$ abschätzen.

[Basic Estimates] Für alle $x \in [0,1]$ und $\lambda \in C$ gilt:

$$|y_1(x,\lambda) - \cos(\sqrt{\lambda}x)| \le \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x + \|q\|_2\sqrt{x}),$$
$$|y_2'(x,\lambda) - \cos(\sqrt{\lambda}x)| \le \frac{\|q\|_2}{|\sqrt{\lambda}|}\exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x + \|q\|_2\sqrt{x}).$$

Wir können die Fehlerterme $|E_1(s)|, |E_2(s)|$ nun also mit $\frac{C}{s}$ abschätzen. Wächst s nun dominiert also $\frac{1}{s}$ den Bruch und wir können die Diskriminante durch einsetzen der Fehlerterme abschätzen:

$$\Delta(\lambda) = 2\cosh(s) + E_1(s) + E_2(s) \implies \Delta(\lambda) \ge 2\cosh(s) - |E_1(s)| - |E_2(s)|.$$

Da $\cosh(s)$ exponentiell wie e^s wächst und die Fehlerterme durch $\frac{1}{s}e^s$ beschränkt sind, dominiert für große s stets der Hauptterm.
Für das Grenzverhalten für $s \to \infty$ klammern wir e^s aus:

$$\Delta(\lambda) \ge e^s(1 + e^{-2s}) - \text{Fehler}.$$

Da für $s \to \infty$ der Ausdruck $e^{-2s} \to 0$ geht und der Fehler vernachlässigt werden kann, ergibt sich für das Verhalten:

$$\Delta(\lambda) \ge e^s(1) \to \infty.$$

Das exponentielle Wachstum von e^s wächst für große $s \to \infty$ stark an und übersteigt ab einem gewissen s_0 die Schranke 2 deutlich. Somit gilt für $s \ge s_0$ stets $\Delta(-s^2) > 2$.

Mit $\lambda^* = -(s_0)^2$ folgt schließlich $\Delta(\lambda) > 2$ für alle $\lambda \le \lambda^*$. Dies zeigt, dass es einen kleinsten Eigenwert λ_0 gibt (das Spektrum ist nach unten beschränkt) und im Bereich von $-\infty$ bis λ^* kein einziger Eigenwert existiert. qed.

Fahren wir fort mit Lemma 3 und 4, die am besten zusammen betrachtet werden sollten, da Lemma 3 mehr oder weniger die Grundlage für Lemma 4 bildet:

Lemma 3 (Reelität der (anti-)periodischen Eigenwerte) *Alle Nullstellen der Gleichungen*

$$\Delta(\lambda) - 2 = 0 \quad \textit{und} \quad \Delta(\lambda) + 2 = 0$$

sind reell und liegen im Bereich $\lambda > \lambda^*$.

Dieses Lemma weist im Kern nach, dass sämtliche periodische und antiperiodische Eigenwerte reell sind und strikt oberhalb von λ liegen.
Es bildet die Basis für Lemma 4, da wir hier eine Beschreibung haben, wo die Eigenwerte liegen. Unser anschließendes Lemma charakterisiert diese dann genauer.

[Beweis von Lemma 3:] Die Einträge der Monodromiematrix sind ganze Funktionen bezüglich λ. Folglich sind auch die Diskriminante $\Delta(\lambda) = y_1(1,\lambda) + y_2'(1,\lambda)$ und $\Delta(\lambda) \pm 2$ ganze Funktionen.

Für nicht-reelle λ (mit $\mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$) existieren nach Lemma 1 keine stabilen beziehungsweise beschränkten Lösungen.
Allerdings würde $\Delta(\lambda) = \pm 2$ nach der Floquet-Theorie beschränkte Lösungen erzwingen (da für die Floquet-Multiplikatoren $\rho = \pm 1$ gilt). Dies führt zu einem direkten Widerspruch mit Lemma 1.

Unterhalb der Spektralschranke λ^* gilt für die Diskriminante immer $\Delta(\lambda) > 2$. Da sie dort die Grenzen des Stabilitätsintervalls nicht schneidet, können Nullstellen für $\Delta(\lambda) = \pm 2$ erst strikt oberhalb von λ^* auftreten. qed.

Lemma 4 (Charakterisierung der Periodizität) *Die Hill-Gleichung besitzt eine nichttriviale Lösung der Periode 1 genau dann, wenn $\Delta(\lambda) = 2$, und eine nichttriviale Lösung der Periode 2 genau dann, wenn $\Delta(\lambda) = -2$.*

Durch dieses Lemma werden die Werte $\Delta(\lambda) = \pm 2$ genau als die Randpunkte, die die Stabilitätsintervalle von den Instabilitätsintervallen trennen, identifiziert.

[Beweis von Lemma 4:] In diesem Beweis betrachten wir in einer Fallunterscheidung die Diskriminante für $\lambda = \pm 2$.
Da die Hill-Gleichung keine erste Ableitung enthält, ist die Determinante der Monodromiematrix nach Liouville stets 1. Das charakteristische Polynom für die Floquet-Multiplikatoren ρ lautet somit:

$$\rho^2 - \Delta(\lambda)\rho + 1 = 0.$$

Fall 1: $\Delta(\lambda) = 2$. Das Polynom vereinfacht sich zu $(\rho - 1)^2 = 0$. Der doppelte Eigenwert $\rho = 1$ bedeutet nach der Floquet-Theorie direkt, dass eine nicht-triviale Lösung mit Periode 1 existiert. Umgekehrt erzwingt eine 1-periodische Lösung $\rho = 1$, woraus sofort $\Delta(\lambda) = 2$ folgt.

Fall 2: $\Delta(\lambda) = -2$. Das Polynom wird zu $(\rho + 1)^2 = 0$. Der Eigenwert $\rho = -1$ liefert eine antiperiodische Lösung mit $y(x+1) = -y(x)$. Zweimal angewendet ergibt sich $y(x+2) = y(x)$, also eine Lösung der Periode 2. Auch hier gilt die Umkehrung analog.

Durch die Fixierung der Werte $\Delta(\lambda) = \pm 2$ exakt als Randpunkte werden somit die Stabilitäts- von den Instabilitätsintervallen getrennt. qed.

Monotonie in den Stabilitätsintervallen

Der wohl wichtigste Abschnitt der Arbeit behandelt die Monotonie in den Stabilitätsintervallen. Wir wollen hier zeigen, dass sobald unsere Diskriminante unter 2 fällt bewegt sie sich streng monoton zur -2 und auch andersherum. Dafür zunächst folgender Satz über die Monotonie:

Satz 2 (Monotonie in den Stabilitätsintervallen) *Sei μ eine Nullstelle von $\Delta(\lambda)-2=0$ mit $\dot{\Delta}(\mu)\leq 0$. Dann gilt $\dot{\Delta}(\lambda)<0$ in jedem offenen Intervall $\mu<\lambda<\mu_1^*$, in dem $\Delta(\lambda)>-2$. Analog: Sei μ' eine Nullstelle von $\Delta(\lambda)+2=0$ mit $\dot{\Delta}(\mu')\geq 0$. Dann gilt $\dot{\Delta}(\lambda)>0$ in jedem offenen Intervall $\mu'<\lambda<\mu_1'$, in dem $\Delta(\lambda)<2$.*

Um diesen Satz zu beweisen brauchen wir zunächst die Integralidentitäten der Diskriminante und die Signum-Formel.

Lemma 5 (Integralidentitäten der Diskriminante) *Seien $y_1(x,\lambda)$ und $y_2(x,\lambda)$ die Fundamentallösungen der Hill-Gleichung und $\Delta(\lambda)=y_1(1,\lambda)+y_2'(1,\lambda)$ die Diskriminante. Mit den Kurzschreibweisen für die Auswertungen am Rand $x=1$,*

$$\eta_1:=y_1(1,\lambda),\quad \eta_2:=y_2(1,\lambda),\quad \eta_1':=y_1'(1,\lambda),\quad \eta_2':=y_2'(1,\lambda),$$

gelten die folgenden Identitäten:

$$\dot{\Delta}(\lambda)=(\eta_1-\eta_2')\int_0^1 y_1(t)y_2(t)\,\mathrm{d}t-\eta_2\int_0^1 y_1^2(t)\,\mathrm{d}t+\eta_1'\int_0^1 y_2^2(t)\,\mathrm{d}t,$$
$$\Delta^2(\lambda)-4=(\eta_1-\eta_2')^2+4\eta_1'\eta_2.$$

[Beweis:] **1. Parameterableitung & Inhomogene DGL:**
Wir leiten die Hill-Gleichung $y''+(q-\lambda)y=0$ nach dem Parameter λ ab. Wir definieren $z_i(x,\lambda):=\dot{y}_i(x,\lambda)=\frac{\partial}{\partial\lambda}y_i(x,\lambda)$ für $i\in\{1,2\}$ mit den Anfangswerten $z_i(0,\lambda)=0$ und $z_i'(0,\lambda)=0$. Die Differenzierung ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\big(y_i''+(q-\lambda)y_i\big)=z_i''+(q-\lambda)z_i-y_i=0\implies z_i''+(q-\lambda)z_i=y_i,$$

was einer inhomogenen Differentialgleichung mit dem Störterm $f(x)=y_i(x)$ entspricht.

Alternativ lässt sich die Ableitung nach λ über den aus Vortrag 2 hergeleiteten Zusammenhang zur Potentialvariation ausdrücken:

$$\frac{\partial y_i}{\partial\lambda}=-\int_0^1\frac{\partial y_i}{\partial q}(s)\,ds$$

Dies wird im Folgenden genutzt, um die Lösungen bzw. deren Ableitungen abzuschätzen.

2. Erste Identität via Variation der Konstanten:
Mittels Variation der Konstanten lautet die allgemeine Lösungsformel:

$$z(x)=\int_0^x\frac{y_1(t)y_2(x)-y_2(t)y_1(x)}{w(y_1,y_2)}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

,wobei $w(y_1,y_2)$ die Wronski-Determinante ist.

Beim Auswerten der Lösungen $z_1(x)$ und $z_2'(x)$ am Periodenende $x = 1$ erhalten wir:

$$z_1(1) = \eta_1 \int_0^1 y_1(t)y_2(t)\,\mathrm{d}t - \eta_2 \int_0^1 y_1(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Für $z_2'(1)$ mit $y_1'(1) = \eta_1', y_2'(1) = \eta_2'$ gilt entsprechend:

$$z_2'(1) = -\eta_2' \int_0^1 y_1(t)y_2(t)\,\mathrm{d}t + \eta_1' \int_0^1 y_2^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Summieren wir $\dot{\Delta}(\lambda) = z_1(1) + z_2'(1)$ ergibt sich:

$$\dot{\Delta}(\lambda) = \eta_1 \int_0^1 y_1(t)y_2(t)\,\mathrm{d}t - \eta_2 \int_0^1 y_1^2(t)\,\mathrm{d}t - \eta_2' \int_0^1 y_1(t)y_2(t)\,\mathrm{d}t + \eta_1' \int_0^1 y_2^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Also folgt nach Zusammenfassen:
$\dot{\Delta}(\lambda) = (\eta_1 - \eta_2') \int_0^1 y_1(t)y_2(t)\,\mathrm{d}t - \eta_2 \int_0^1 y_1^2(t)\,\mathrm{d}t + \eta_1' \int_0^1 y_2^2(t)\,\mathrm{d}t$

3. Zweite Identität via Liouville-Formel:
Nach dem Satz von Liouville ist die Wronski-Determinante konstant:

$$\det M(\lambda) = \eta_1\eta_2' - \eta_2\eta_1' = 1.$$

Einsetzen von $\Delta = \eta_1 + \eta_2'$ in $\Delta^2 - 4$ und Umformen ergibt:

$$\begin{aligned}\Delta^2 - 4 &= (\eta_1 + \eta_2')^2 - 4 \\ &= \eta_1^2 + 2\eta_1\eta_2' + (\eta_2')^2 - 4(\eta_1\eta_2' - \eta_2\eta_1') \\ &= \eta_1^2 - 2\eta_1\eta_2' + (\eta_2')^2 + 4\eta_1'\eta_2 \\ &= (\eta_1 - \eta_2')^2 + 4\eta_1'\eta_2.\end{aligned}$$

Somit wurden beide Integralidentitäten hergeleitet. qed.

Lemma 6 (Die Signum-Formel) *Seien y_1, y_2 die Fundamentallösungen der Hill-Gleichung und $\Delta(\lambda)$ die Diskriminante. Für $\eta_1' \neq 0$ gilt:*

$$\dot{\Delta}(\lambda) = \operatorname{sgn}(\eta_1') \left\{ \int_0^1 \left(\sqrt{|\eta_1'|}y_2 + \operatorname{sgn}(\eta_1') \frac{\eta_1 - \eta_2'}{2\sqrt{|\eta_1'|}} y_1 \right)^2 \mathrm{d}t - \frac{\Delta^2 - 4}{4|\eta_1'|} \int_0^1 y_1^2\,\mathrm{d}t \right\}.$$

[Beweis:] Aus der ersten Integralidentität können wir mit Hilfe mehrerer quadratischer Ergänzungen die Signum-Formel herleiten:

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}(\lambda) &= \eta_1' \int_0^1 y_2^2\,\mathrm{d}t + (\eta_1 - \eta_2') \int_0^1 y_1y_2\,\mathrm{d}t - \eta_2 \int_0^1 y_1^2\,\mathrm{d}t \\ &= \eta_1' \int_0^1 y_2^2\,\mathrm{d}t + (\eta_1 - \eta_2') \int_0^1 y_1y_2\,\mathrm{d}t + \operatorname{sgn}\eta_1' \left[\frac{-4\eta_1'\eta_2}{4|\eta_1'|} \right] \int_0^1 y_1^2\,\mathrm{d}t \\ &= \eta_1' \int_0^1 y_2^2\,\mathrm{d}t + (\eta_1 - \eta_2') \int_0^1 y_1y_2\,\mathrm{d}t + \operatorname{sgn}\eta_1' \left[\frac{(\eta_1 - \eta_2')^2 - (\Delta^2 - 4)}{4|\eta_1'|} \right] \int_0^1 y_1^2\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\eta_1' y_2^2 + (\eta_1 - \eta_2')y_1y_2 + \operatorname{sgn}\eta_1' \left[\frac{(\eta_1 - \eta_2')^2 - (\Delta^2 - 4)}{4|\eta_1'|} \right] y_1^2 \right) \mathrm{d}t \\ &= \operatorname{sgn}\eta_1' \left\{ \int_0^1 \left(|\eta_1'|y_2^2 + \operatorname{sgn}\eta_1'(\eta_1 - \eta_2')y_1y_2 + \frac{(\eta_1 - \eta_2')^2}{4|\eta_1'|} y_1^2 \right) \mathrm{d}t - \frac{\Delta^2 - 4}{4|\eta_1'|} \int_0^1 y_1^2\,\mathrm{d}t \right\} \\ &= \operatorname{sgn}\eta_1' \left\{ \int_0^1 \left(\sqrt{|\eta_1'|}y_2 + \operatorname{sgn}\eta_1' \frac{\eta_1 - \eta_2'}{2\sqrt{|\eta_1'|}} y_1 \right)^2 \mathrm{d}t - \frac{\Delta^2 - 4}{4|\eta_1'|} \int_0^1 y_1^2\,\mathrm{d}t \right\}. \quad \text{qed.}\end{aligned}$$

Kommen wir nun zur Durchführung des Beweises zur Monotonie in den Stabilitätsintervallen. Unsere Signum-Formel ist hierbei zunächst das entscheidende Werkzeug um das Vorzeichen der Ableitung der Diskriminante zu bestimmen:

$$\dot{\Delta}(\lambda) = \operatorname{sgn}(\eta_1') \left\{ \int_0^1 \left(\sqrt{|\eta_1'|} y_2 + \operatorname{sgn}(\eta_1') \frac{\eta_1 - \eta_2'}{2\sqrt{|\eta_1'|}} y_1 \right)^2 \mathrm{d}t - \frac{\Delta^2 - 4}{4|\eta_1'|} \int_0^1 y_1^2 \, \mathrm{d}t \right\}$$

Innerhalb eines Stabilitätsintervalls gilt $|\Delta(\lambda)| < 2 \implies \Delta^2 - 4 < 0$. In diesem Fall ist der Koeffizient

$$-\frac{\Delta^2 - 4}{4|\eta_1'|}$$

strikt positiv.
Das erste Integral ist nicht-negativ (≥ 0), da es sich um ein Quadrat handelt. Deswegen bestimmt der zweite Term das Vorzeichen:

$$-\frac{\Delta^2 - 4}{4|\eta_1'|} \int_0^1 y_1^2 \, \mathrm{d}t > 0$$

Daraus folgt direkt für das Vorzeichen der Ableitung:

$$\operatorname{sgn}(\dot{\Delta}(\lambda)) = \operatorname{sgn}(\eta_1')$$

Das bedeutet: Innerhalb der Stabilitätszonen verläuft die Diskriminante $\Delta(\lambda)$ strikt monoton und kann sich nicht umkehren.
Für den vollständigen Beweis fehlt letztlich nur noch, dass $\Delta(\lambda)$ an einer Stelle μ mit $\dot{\Delta}(\mu) = 0$ ein striktes Maximum besitzt. Durch die Identität der Monodromiematrix mit der Einheitsmatrix und die daraus resultierenden Randwerte wird die Untersuchung der Krümmung deutlich einfacher.

Unter Nutzung der Identität

$$\Delta^2 - 4 = (\eta_1 - \eta_2')^2 + 4\eta_1'\eta_2 = 0$$

folgt bei $\eta_1' = 0$, dass $\eta_1 = \eta_2'$ gilt.
Aus $\Delta = \eta_1 + \eta_2' = 2$ ergibt sich somit $\eta_1 = \eta_2' = 1$.
Für die Wronski-Determinante gilt:

$$\eta_1\eta_2' - \eta_2\eta_1' = 1 \cdot 1 - \eta_2 \cdot 0 = 1$$

Das Einsetzen in die ursprüngliche Integralform liefert:

$$\dot{\Delta}(\mu) = -\eta_2 \int_0^1 y_1^2 \, \mathrm{d}t = 0 \implies \eta_2(\mu) = 0$$

An einem solchen Punkt μ entspricht die Monodromiematrix der Einheitsmatrix, da an dieser Stelle beide linear unabhängigen Lösungen nach einer Periode exakt auf ihren Ausgangswert zurückkehren.

Wir betrachten nun die Ableitung $\dot{\Delta}(\lambda)$ und die zweite Ableitung $\ddot{\Delta}(\lambda)$ (gemäß den Angaben aus dem Vortrag zur Ableitung der Fundamentallösung).

Aus der Integralidentität und der Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt:

$$\ddot{\Delta}(\mu) < 0 \quad \text{für linear unabhängige Funktionen } y_1, y_2.$$

Dies bedeutet, dass Δ bei μ ein lokales Maximum besitzt und für $\lambda > \mu$ zwingend fällt.

Jetzt ist noch die Frage offen, ob die Funktion innerhalb des Stabilitätsintervalls umkehrt. Dies zeigen wir mit einem Widerspruchsbeweis:

Widerspruchsannahme: Es gibt ein kleinstes $\mu^* > \mu$, an dem die Ableitung erneut verschwindet ($\dot{\Delta}(\mu^*) = 0$), während die Diskriminante innerhalb der Schranken liegt.
Für μ^* gilt nach der Identität:

$$\Delta^2(\mu^*) - 4 = (\eta_1(\mu^*) - \eta_2'(\mu^*))^2 + 4\eta_1'(\mu^*)\eta_2(\mu^*)$$

Da wir uns nach Annahme im Bereich $-2 < \Delta(\mu^*) < 2$ befinden, ist die linke Seite zwingend negativ ($\Delta^2 - 4 < 0$). Das erfordert:

$$(\eta_1(\mu^*) - \eta_2'(\mu^*))^2 + 4\eta_1'(\mu^*)\eta_2(\mu^*) < 0$$

Dies ist nur möglich, wenn das Produkt $\eta_1'(\mu^*)\eta_2(\mu^*)$ negativ ist, weshalb insbesondere $\eta_1'(\mu^*) \neq 0$ gilt.

Wenden wir nun die Vorzeichenformel (Signum-Formel) an der Stelle μ^* an, so ergibt sich ein Widerspruch:
Da $\eta_1'(\mu^*) \neq 0$ und $\Delta^2 - 4 < 0$ ist, lässt sich zu dem Ausdruck in der geschweiften Klammer folgendes sagen:
Das Integral über dem Quadrat muss nicht-negativ sein (≥ 0).
Der Term $-\frac{\Delta^2-4}{4|\eta_1'|}\int_0^1 y_1^2\,\mathrm{d}t$ ist strikt positiv, da Diskriminante und Vorzeichen strikt positiv sind (> 0).

Daraus folgt unmittelbar:
$\dot{\Delta}(\mu^*) \neq 0$, dies steht jedoch im Widerspruch zu unserer Annahme: $\dot{\Delta}(\mu^*) = 0$. Also kann unsere Funktion innerhalb eines Stabilitätsintervalls nicht umkehren. Somit wurde Satz 2 gezeigt. qed.

Zum Schluss muss noch betrachtet werden, weshalb die Diskriminante außerhalb des Stabilitätsintervalls nicht ins Unendliche wegläuft, sondern wieder zum nächsten Eigenwert zurückkehrt.
Um zu zeigen, dass die Diskriminante $\Delta(\lambda)$ im Oszillationstheorem bzw. bei Sturm-Liouville- und Hill-Problemen nicht unkontrolliert gegen unendlich strebt, sondern im Instabilitätsintervall beschränkt bleibt und zwangsläufig den nächsten Eigenwert (bzw. die Bandkanten $\Delta(\lambda) = \pm 2$) wieder treffen muss, betrachten wir die zugrundeliegenden *Basic Estimates* der Fundamentallösungen.

Die Diskriminante ist als Spur der Monodromiematrix definiert durch:

$$\Delta(\lambda) = y_1(1, \lambda) + y_2'(1, \lambda),$$

wobei $y_1(x,\lambda)$ und $y_2(x,\lambda)$ die Fundamentallösungen der Differentialgleichung sind.
Wir nutzen nun erneut die Basic Estimates aus dem Beweis von Lemma 2 um unsere Diskriminante abzuschätzen:
Subtrahieren wir nun den idealen oszillatorischen Term $2\cos(\sqrt{\lambda})$ von der Diskriminante $\Delta(\lambda)$, so ergibt sich unter mehrfacher Anwendung der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
|\Delta(\lambda) - 2\cos(\sqrt{\lambda})| &= |y_1(1,\lambda) + y_2'(1,\lambda) - 2\cos(\sqrt{\lambda})| \\
&\leq |y_1(1,\lambda) - \cos(\sqrt{\lambda})| + |y_2'(1,\lambda) - \cos(\sqrt{\lambda})| \\
&\leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\exp\left(|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}| + \|q\|_2\right) + \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\exp\left(|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}| + \|q\|_2\right) \\
&= \frac{2}{|\sqrt{\lambda}|}\exp\left(|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}| + \|q\|_2\right).
\end{aligned}$$

Aus dieser Abschätzung folgt unmittelbar, dass die Abweichung der Diskriminante von der reinen Kosinus-Schwingung $2\cos(\sqrt{\lambda})$ für große $|\lambda|$ durch den Vorfaktor $\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}$ kontrolliert wird und im reellen Spektralbereich ($\mathrm{Im}\sqrt{\lambda} = 0$) gleichmäßig beschränkt bleibt.
Da die Referenzfunktion $2\cos(\sqrt{\lambda})$ periodisch zwischen -2 und 2 oszilliert und die Störterme durch die Abschätzung strikt kontrolliert sind, kann $\Delta(\lambda)$ nicht ins Unendliche divergieren.
Stattdessen erzwingt dieses asymptotische Verhalten $\Delta(\lambda) \approx 2\cos(\sqrt{\lambda})$, dass die Diskriminante die Schwellen $\Delta(\lambda) = \pm 2$ regelmäßig durchlaufen muss.
Dies schließt aus, dass das Instabilitätsintervall ins Unendliche offen bleibt. Die Diskriminante muss nach Durchlaufen des Intervalls zwingend den nächsten Eigenwert wieder treffen.

Schauen wir zuletzt nochmal kurz das Oszillationstheorem und die Monodromiematrix an den Rändern ($\Delta(\lambda) = \pm 2$) an.
Hier besteht die Gefahr, dass unsere Monodromiematrix nicht diagonalisierbar ist, falls Jordan-Blöcke auftreten. Wäre dies der Fall, würden diese ein lineares Anwachsen der Lösungen erzwingen und unser Periodizitätsverhalten wäre zerstört.
Im Rahmen den wir bisher betrachtet haben ist dies jedoch kein Problem, da wir durch das reguläre L^2-Potential und der starken asymptotischen Kontrolle durch die Basic Estimates (mit ihrem Vorfaktor $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$) solche Entartungen ausschließen.
Diese Abschätzungen garantieren, dass unser System stabil bleibt und die Diskriminante stetig durch das Intervall geführt wird. Deshalb verhält sich unsere Diskriminante gutartig und weicht nicht ins Unendliche ab und wir müssen zwangsläufig den nächsten Eigenwert treffen.

Damit wurden alle Eigenschaften des Oszillationstheorems gezeigt und dieses somit bewiesen.

Literaturverzeichnis

Jessica Crutoi (2026): *Eigenwerte von Hills Gleichung.* Bachelorarbeit, Oszillationstheorem.

W. Magnus, S. Winkler (1966): *Hill's Equation.* Interscience Publishers, Oscillatory Solutions.

Erklärung zur Verwendung von KI-Werkzeugen

Bei der Formulierung und sprachlichen Überarbeitung einzelner Textpassagen dieser Seminararbeit wurden KI-gestützte Werkzeuge als Formulierungshilfe verwendet, sowie als Unterstützung für die Erstellung von Latex-Code für einzelne Formeln.