

Seminar ausgewählte Themen
gewöhnlicher Differenzialgleichungen
HWS 26

Martin U. Schmidt

Vorbesprechung am Mittwoch, den 9.09.2026 um 17:15 im Raum B6 C401

Auf den folgenden Seiten finden Sie 10 Themenvorschläge für Vorträge. Sie behandeln mit Hilfe von der Theorie linearer gewöhnlichen Differenzialgleichungen einige Kapitel eines Buches über inverse Spektraltheorie und eines Buches über Hill's Gleichung. Vorkenntnisse aus der Vorlesung Dynamische Systeme und Stabilität sind nicht erforderlich.

A. Die Fundamentallösung

Dieser Vortrag behandelt die Seiten 1-14 des Buches “Inverse Spectral Theory” von Jürgen Pöschel und Eugene Trubowitz. Diese Buch ist sowohl in gedruckter Form als auch in elektronischer Form in der Unibibliothek verfügbar. In diesem Vortrag soll vor allem die auf den Seiten 5-6 eingeführte Funktionenfolge $(C_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ als Taylorkoeffizienten bei $q = 0$ der beiden Fundamentallösungen y_1 und y_2 als Funktionen von $q \in L^2([0, 1], \mathbb{C})$ eingeführt werden, und damit das Theorem 3 mit seinem Beweis möglichst vollständig erklärt werden. Dieser Vortrag setzt nur Kenntnisse aus Analysis I und II und aus Linearer Algebra I voraus, und benutzt dabei die Differenzierbarkeit von Funktionen zwischen normierten Vektorräumen.

Literatur: J. Pöschel, E. Trubowitz: Inverse Spectral Theory.

B. Ableitungen der Fundamentallösung

Dieser Vortrag untersucht die Ableitungen der Komponenten $y_1(x, \lambda, q)$, $y_1'(x, \lambda, q)$, $y_2(x, \lambda, q)$ und $y_2'(x, \lambda, q)$ der Fundamentallösung nach q und nach λ auf den Seiten 20-22 oben. Dabei soll auch die Ableitung von Funktionen zwischen normierten Vektorräumen (siehe mein Analysis II Skript) als lineare Abbildungen definiert werden. Insbesondere sind die Ableitungen nach q linear Abbildungen von $L^2([0, 1], \mathbb{K})$ nach $\mathbb{K}$, die wir mit den Elementen dieses Hilbertraumes identifizieren können. Deshalb definieren diese Abbildungen wieder Funktionen, die durch die Formeln im Theorem 6 berechnet werden. Der Beweis vom Theorem 6 soll also dargestellt werden. Dieser Vortrag setzt nur Kenntnisse aus Analysis I und II und aus Linearer Algebra I voraus, und benutzt dabei die Differenzierbarkeit von Funktionen zwischen normierten Vektorräumen.

Literatur: J. Pöschel, E. Trubowitz: Inverse Spectral Theory.

C. Das Oszillationstheorem I

In diesem Vortrag setzen wir zunächst die Potentiale $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ aus den ersten beiden Vorträgen periodisch so auf ganz $\mathbb{R}$ fort, dass $q(x + n) = q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Dann setzt sich die Fundamentallösung

$$F(x, \lambda, q) = \begin{pmatrix} y_1(x, \lambda, q) & y_2(x, \lambda, q) \\ y_1'(x, \lambda, q) & y_2'(x, \lambda, q) \end{pmatrix}$$

auch auf $(x, \lambda, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times L^1([0, 1], \mathbb{K})$ fort. Dabei gilt $F(x+n, \lambda, q) = F(x, \lambda, q)M(\lambda, q)$ mit $M(\lambda, q) = F(1, \lambda, q)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$. Wir nennen $\lambda \in \mathbb{C}$ einen periodischen Eigenwert, wenn dazu eine nichttriviale Lösung y existiert, die auch $y(x + n) = y(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ erfüllt, und wir nennen ein $\lambda \in \mathbb{C}$ einen anti-periodischen Eigenwert, wenn dazu eine nichttriviale Lösung y existiert, die auch $y(x + n) = (-1)^n y(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ erfüllt. In diesem Vortrag wird gezeigt, dass für jedes $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ die

periodischen Eigenwerte eine $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, und die anti-periodischen Eigenwerte eine reelle Folge $(\lambda'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind, die folgendes erfüllen:

$$\lambda_0 < \lambda'_1 \leq \lambda'_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda'_3 \leq \lambda'_4 < \lambda_3 \leq \lambda_4 \dots$$

Das ist der Satz 2.3 in der Bachelorarbeit von Jessica Crutoi, oder auch das Theorem 2.1 im zweiten Kapitel des Buches Hill's Equation von Wilhelm Magnus und Stanley Winkler auf die Situation übertragen, in der die Periode soll nicht π sondern 1 ist und das Potential Q in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ liegt und $q(x+n) = q(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ erfüllt. Der Beweis in der Bachelorarbeit von Jessica Crutoi hat den Beweis auf den Seiten 13-19 im Buch von Magnus und Winkler mithilfe der Ergebnisse aus den beiden Vorträgen A und B auf diese Situation übertragen.

Liteartur: J. Pöschel, E. Trubowitz: Inverse Spectral Theory,
W. Magnus, S. Winkler: Hill's Equation,
Bachelorarbeit von Jessica Crutoi: Eigenwerte von Hill's Gleichung.

D. Das Oszillationstheorem II

In der gleichen Situation wie im Thema C nennen wir $\lambda \in \mathbb{C}$ einen Dirichleiteigenwert, wenn dazu eine nichttriviale Lösung existiert, die $y(0) = 0 = y(1)$ erfüllt, und wir nennen ein $\lambda \in \mathbb{C}$ einen Neumanneigenwert, wenn dazu eine nichttriviale Lösung y existiert, die $y'(0) = 0 = y'(1)$ erfüllt. In diesem Vortrag wird gezeigt, dass für jedes $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ die Dirichleiteigenwerte eine reelle Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und die Neumanneigenwerte eine reelle Folge $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bilden, die folgendes erfüllen:

$$\nu_0 \leq \lambda_0 \text{ und } \mu_{2n-1}, \nu_{2n-1} \in [\lambda'_{2n-1}, \lambda'_{2n}] \text{ und } \mu_{2n}, \nu_{2n} \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}] \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Das wird in der Bachelorarbeit von Jessica Crotoi im Kapitel 3 in dem Korollar 3.8 und dem Korollar 3.13 gezeigt.

Liteartur: J. Pöschel, E. Trubowitz: Inverse Spectral Theory,
Bachelorarbeit von Jessica Crutoi: Eigenwerte von Hill's Gleichung.

E. Die Asymptotik der Dirchleteigenwerte

In diesem Vortrag werden die Theoreme 2-4 und das Korollar 1 mit ihren Beweisen aus dem zweiten Kapitel des Buches “Inverse Spectral Theory” von Jürgen Pöschel und Eugene Trubowitz dargestellt. Im Theorem 3 soll nur die Formel für Herleitung der Ableitung der Dirchleteigenwerte nach q dargestellt werden. Dieser Vortrag baut auf den Vorträgen A-B auf.

Literatur: J. Pöschel, E. Trubowitz: Inverse Spectral Theory.

F. Die Asymptotik der periodischen und der anti-periodischen Eigenwerte

In diesem Vortrag wird gezeigt, dass für jedes $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ die periodischen und anti-periodischen Eigenwerte $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(\lambda'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folgende Asymptotik haben:

$$\begin{aligned} \left(\lambda_{2n-1} - (2n)^2 \pi^2 - \int_0^1 q(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}} &\in \ell_2, & \left(\lambda_{2n} - (2n)^2 \pi^2 - \int_0^1 q(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}} &\in \ell_2, \\ \left(\lambda'_{2n-1} - (2n-1)^2 \pi^2 - \int_0^1 q(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}} &\in \ell_2, & \left(\lambda'_{2n} - (2n-1)^2 \pi^2 - \int_0^1 q(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}} &\in \ell_2. \end{aligned}$$

Für den Beweis wird zuerst das Lemma 3.4 aus der Bachelorarbeit von Lisa Mostowoj mit seinem Beweis dargestellt. Danach wird mit den Argumenten auf den Seiten 51 und 52 der gleichen Bachelorarbeit gezeigt, dass dann die Aussage aus dem Theorem 2.4 aus dem Buch von Pöschel und Trubowitz folgt.

Literatur: J. Pöschel, E. Trubowitz: Inverse Spectral Theory,
Bachelorarbeit von Lisa Spophie Mostowoj: Isospektralmengen von Hill's Gleichung.

G. Das inverse Dirichletproblem I

In diesem Vortrag werden die Theoreme 1-3 und das Lemma 1 mit ihren Beweisen aus dem dritten Kapitel des Buches “Inverse Spectral Theory” von Jürgen Pöschel und Eugene Trubowitz dargestellt. Das Lemma 2 ist eine Aussage aus der Funktionentheorie und soll nur ohne seinen Beweis dargestellt werden. Dieser Vortrag baut auf den Vorträgen A-E auf.

Literatur: J. Pöschel, E. Trubowitz: Inverse Spectral Theory.

H. Das inverse Dirichletproblem II

In diesem Vortrag wird das Theorem 2.8 aus dem zweiten Kapitel und das Lemma 3 aus dem dritten Kapitel mit ihren Beweisen aus dem zweiten Kapitel des Buches “Inverse Spectral Theory” von Jürgen Pöschel und Eugene Trubowitz dargestellt. Dieser Vortrag baut auf den Vorträgen A-D auf.

Literatur: J. Pöschel, E. Trubowitz: Inverse Spectral Theory.

I. Das inverse Dirichletproblem III

In diesem Vortrag werden die Theoreme 4-6, Lemma 4 und Korollar 1 aus dem dritten Kapitel des Buches “Inverse Spectral Theory” von Jürgen Pöschel und Eugene Trubowitz dargestellt. Dieser Vortrag baut auf den Vorträgen A-G auf.

Literatur: J. Pöschel, E. Trubowitz: Inverse Spectral Theory.

J. Isospektralmengen I

In diesem Vortrag werden die Theoreme 1-1* aus dem vierten Kapitel des Buches “Inverse Spectral Theory” von Jürgen Pöschel und Eugene Trubowitz mit ihren Beweisen dargestellt. Dieser Vortrag baut auf den Vorträgen A-G auf.

Literatur: J. Pöschel, E. Trubowitz: Inverse Spectral Theory.

K. Isospektralmengen II

In diesem Vortrag werden Lemma 1-2 und die Theorem 2-3 aus dem vierten Kapitel des Buches “Inverse Spectral Theory” von Jürgen Pöschel und Eugene Trubowitz mit ihren Beweisen dargestellt. Dieser Vortrag baut auf den Vorträgen A-H auf.

Literatur: J. Pöschel, E. Trubowitz: Inverse Spectral Theory.