



Seminararbeit

Die Asymptotik der Dirichleteigenwerte

Fakultät für Wirtschaftsinformatik und -mathematik
Universität Mannheim

Anna Gehrmann
Matr.-Nr.: 1991000

Betreuer: Prof. Dr. Martin Schmidt

Seminar: Ausgewählte Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen und dynamischer Systeme

Mannheim, 27. Oktober 2026

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Einfachheit der Eigenwerte	3
3	Der Gradient der Eigenwerte	6
4	Die Asymptotik der Dirichleteigenwerte	8
5	Asymptotik von Produkten und Quadraten	13

1 Einleitung

Wir betrachten für $q \in L^2 = L^2_{\mathbb{R}}[0, 1]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ die Differentialgleichung

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (1)$$

Eine Zahl λ heißt *Dirichleteigenwert* von q , wenn (1) eine nichttriviale Lösung y mit $y(0) = y(1) = 0$ besitzt. Eine solche Lösung heißt *Eigenfunktion* zu λ [PT87, S. 25].

Nach Korollar 1.1 aus [PT87] ist jede Lösung von (1) von der Form $y = y(0)y_1 + y'(0)y_2$. Für eine Eigenfunktion erzwingt $y(0) = 0$ daher $y = y'(0)y_2(x, \lambda, q)$, und es ist $y'(0) \neq 0$, da y sonst bei $x = 0$ eine doppelte Nullstelle hätte und nach demselben Korollar identisch verschwände. Insbesondere sind die Dirichleteigenwerte genau die Nullstellen von $\lambda \mapsto y_2(1, \lambda, q)$ [PT87, S. 26f].

Für $q = 0$ ist $y_2 = \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$. Die Dirichleteigenwerte sind dann die Zahlen $n^2\pi^2, n \geq 1$ [PT87, S. 27]. Nach dem Oszillationstheorem II ([Cru26, Korollar 3.8], vgl. Vortrag über das Oszillationstheorem II) sind die Dirichleteigenwerte reell und bilden eine aufsteigende Folge reeller Zahlen $\mu_1(q), \mu_2(q), \dots$ und μ_n liegt im n -ten Instabilitätsintervall der Diskriminante $\Delta(\lambda) = y_1(1, \lambda) + y_2'(1, \lambda)$. Wegen $\Delta(\lambda) = 2 \cos \sqrt{\lambda} + O(1/\sqrt{\lambda})$ ([Cru26, Lemma 2.2]) liegt dieses Intervall bei

$$\sqrt{\lambda} = n\pi + O(1), \text{ und es folgt } \mu_n(q) = n^2\pi^2 + O(n) \quad (2)$$

([PT87, S. 31]). Die Konstante im O -Symbol hängt dabei nach den Basic Estimates [PT87, S. 13] nur von einer Schranke für $\|q\|$ ab. In dieser Arbeit untersuchen wir, wie diese Eigenwerte von q abhängen und wie sie sich für große n verhalten. In Abschnitt 2 zeigen wir, dass alle Dirichleteigenwerte einfache Nullstellen von $y_2(1, \cdot, q)$ sind (2.1), und führen die normierten Eigenfunktionen g_n ein. In Abschnitt 3 berechnen wir den Gradienten von μ_n nach q . Dieser ist gerade g_n^2 (3.1). Damit beweisen wir in Abschnitt 4 das Hauptergebnis, 4.2:

$$\mu_n(q) = n^2\pi^2 + \int_0^1 q(t)dt + \ell^2(n), \quad (3)$$

wobei $\ell^2(n)$ für eine quadratsummierbare Folge steht. Für große n verschiebt das Potential die Eigenwerte also im Wesentlichen nur um seinen Mittelwert. Abschnitt 5 überträgt diese Asymptotik auf die Quadrate der Eigenfunktionen und verwandte Produkte (5.1).

2 Einfachheit der Eigenwerte

In diesem Kapitel zeigen wir, dass alle Dirichleteigenwerte einfache Nullstellen der Funktion $\lambda \mapsto y_2(1, \lambda)$ sind. Anschließend führen wir die normierten Eigenfunktionen g_n ein.

Notation. Wir schreiben $\dot{} = \partial/\partial\lambda$ für die Ableitung nach λ , und wie bisher $'$ für die Ableitung nach x [PT87, S. 30]. Ferner bezeichnet $[f, g] = fg' - f'g$ die Wronskideterminante zweier differenzierbarer Funktionen f, g [PT87, S. 11]. Das Argument q unterdrücken wir, wenn keine Verwechslung droht.

Theorem 2.1. *[[PT87]Theorem 2, S. 30] Sei $q \in L^2$ und λ ein Dirichleteigenwert von q . Dann gilt*

$$\dot{y}_2(1, \lambda) y_2'(1, \lambda) = \int_0^1 y_2^2(t, \lambda) dt = \|y_2(\cdot, \lambda)\|^2 > 0. \quad (4)$$

Inbesondere ist $\dot{y}_2(1, \lambda) \neq 0$, d.h. alle Nullstellen von $y_2(1, \lambda)$ sind einfach.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass für alle $q \in L^2$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}$ die Identität

$$\int_0^1 y_2^2(t, \lambda) dt = \dot{y}_2(1, \lambda) y_2'(1, \lambda) - \dot{y}_2'(1, \lambda) y_2(1, \lambda) \quad (5)$$

gilt, und werten sie danach an einem Eigenwert aus.

Die Identität (5). Sei zunächst q stetig und $\lambda \in \mathbb{C}$. Wegen $y_2'' = (q - \lambda) y_2$ ist y_2 dann zweimal stetig differenzierbar in x , und die Ableitungen nach x und λ dürfen vertauscht werden (vgl. den Beweis von [PT87, Theorem 1.6]). Differenzieren wir jetzt

$$-y_2'' + q(x) y_2 = \lambda y_2 \quad (6)$$

nach λ , dann erhalten wir mit der Produktregel für λy_2

$$-\dot{y}_2'' + q(x) \dot{y}_2 = y_2 + \lambda \dot{y}_2. \quad (7)$$

Multiplizieren wir nun (6) mit $\dot{y}_2$ und (7) mit y_2 , erhalten wir

$$-\dot{y}_2'' \dot{y}_2 + q(x) y_2 \dot{y}_2 = \lambda y_2 \dot{y}_2, \quad -\dot{y}_2'' y_2 + q(x) \dot{y}_2 y_2 = y_2^2 + \lambda \dot{y}_2 y_2. \quad (8)$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen folgt

$$-\dot{y}_2'' y_2 + y_2'' \dot{y}_2 = y_2^2, \quad (9)$$

und die Terme mit λ und q heben sich auf. Die linke Seite ist jedoch genau die Ableitung

der Wronskideterminante von $\dot{y}_2$ und y_2 (S. 11):

$$[\dot{y}_2, y_2]' = (\dot{y}_2 y_2' - y_2' \dot{y}_2)' = \dot{y}_2' y_2' + \dot{y}_2 y_2'' - y_2'' \dot{y}_2 - y_2' \dot{y}_2' = -y_2'' \dot{y}_2 + y_2' \dot{y}_2'. \quad (10)$$

Integration über $[0, 1]$ ergibt

$$\int_0^1 y_2^2(t, \lambda) dt = [\dot{y}_2, y_2](1) - [\dot{y}_2, y_2](0) \quad (11)$$

Da $y_2(0, \lambda) = 0$ und $y_2'(0, \lambda) = 1$ für alle λ , hängen die Anfangswerte von y_2 nicht von λ ab. Also folgt daraus $\dot{y}_2(0, \lambda) = y_2'(0, \lambda) = 0$. Der Randterm bei $x = 0$ verschwindet und wir erhalten unsere Identität für stetiges q (5).

Für beliebiges $q \in L^2$ folgt (5) wie im Beweis von Theorem 1.6 [PT87, S. 21]: Bei festem λ hängen beide Seiten unserer Identität stetig von $q \in L^2$ ab, und die Identität gilt für alle stetigen q , und die stetigen Funktionen liegen dicht in L^2 . Also gilt sie auf ganz L^2 .

Auswertung an einem Eigenwert von q . Sei nun λ ein Dirichleteigenwert von $q \in L^2$. Dann gilt $y_2(1, \lambda) = 0$ und (5) wird zu

$$\int_0^1 y_2^2(t, \lambda) dt = \dot{y}_2(1, \lambda) y_2'(1, \lambda). \quad (12)$$

Nach dem Vortrag über das Oszillationstheorem II ist λ reell. Da auch q reellwertig ist, ist auch $y_2(\cdot, \lambda)$ reellwertig [PT87, S. 11], also $\int_0^1 y_2^2 dt = \|y_2(\cdot, \lambda)\|^2$. Außerdem ist $y_2(\cdot, \lambda)$ stetig und wegen $y_2'(0, \lambda) = 1$ ist $y_2(\cdot, \lambda) \not\equiv 0$. Also ist das Integral der stetigen, nichtnegativen Funktion $y_2^2(\cdot, \lambda)$ positiv:

$$\dot{y}_2(1, \lambda) y_2'(1, \lambda) = \|y_2(\cdot, \lambda)\|^2 = \int_0^1 y_2^2 dt > 0.$$

Insbesondere ist $\dot{y}_2(1, \lambda) \neq 0$. Folglich ist λ eine einfache Nullstelle von $y_2(1, \cdot)$. □

Insbesondere ist die Folge der Eigenwerte aus der Einleitung streng monoton, $\mu_1(q) < \mu_2(q) < \dots$ [PT87, S. 31], und jedes μ_n ist eine einfache Nullstelle von $y_2(1, \lambda)$.

Zu jedem Eigenwert wählen wir jetzt eine fest normierte Eigenfunktion.

Definition 2.2. (*Eigenfunktion.*) Zu jedem Eigenwert μ_n ordnen wir eine eindeutige Eigenfunktion $g_n = g_n(x, q)$, normiert durch

$$\|g_n\| = 1, \quad g_n'(0) > 0$$

zu [PT87, S. 31]. Da jede Eigenfunktion ein Vielfaches von $y_2(\cdot, \mu_n)$ ist und wegen $y_2'(0, \mu_n) = 1 > 0$ ist die Normierung $g_n'(0) > 0$ mit positivem Vorfaktor erfüllt, also gilt

mit 2.1

$$g_n(x, q) = \frac{y_2(x, \mu_n)}{\|y_2(\cdot, \mu_n)\|} = \frac{y_2(x, \mu_n)}{\sqrt{\dot{y}_2(1, \mu_n) y_2'(1, \mu_n)}}. \quad (13)$$

Insbesondere ist für $q = 0$

$$g_n(x, 0) = \frac{y_2(x, \mu_n(0))}{\sqrt{\dot{y}_2(1, \mu_n(0)) y_2'(1, \mu_n(0))}} = \sqrt{2} \sin(n\pi x).$$

3 Der Gradient der Eigenwerte

Bisher war das Potential q fest. Jetzt fassen wir den n -ten Dirichleteigenwert als Funktion

$$\mu_n : L^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad q \mapsto \mu_n(q),$$

auf [PT87, S. 31] und fragen, wie er sich verändert, wenn sich das Potential q verändert. Die Antwort gibt der Gradient $\partial\mu_n/\partial q$ im Sinne von Vortrag B. Also das nach dem Darstellungssatz von Riesz eindeutige Element von L^2 , das die Ableitung $d_q\mu_n$ als Skalarprodukt darstellt [PT87, S. 20]:

$$d_q\mu_n(v) = \left\langle \frac{\partial\mu_n}{\partial q}, v \right\rangle = \int_0^1 \frac{\partial\mu_n}{\partial q}(t) v(t) dt \quad \text{für alle } v \in L^2.$$

Der Gradient ist also selbst eine Funktion in L^2 , und $\frac{\partial\mu_n}{\partial q}(t)$ bezeichnet ihren Wert an der Stelle $t \in [0, 1]$.¹ Dieselbe Schreibweise verwenden wir für die Gradienten von y_1 und y_2 aus Theorem 1.6. Der Gradient von μ_n ist bemerkenswert einfach: das Quadrat der normierten Eigenfunktion g_n aus 2.2. Diese Formel ist das wesentliche Hilfsmittel im Beweis der Asymptotik in Abschnitt 4 [PT87, S. 36].

Theorem 3.1. ([PT87, Theorem 3, S. 31]). $\mu_n, n \geq 1$, ist eine kompakte, reell analytische Funktion auf L^2 . Ihr Gradient ist

$$\frac{\partial\mu_n}{\partial q}(t) = g_n^2(t, q). \quad (14)$$

Kompaktheit und reelle Analytizität übernehmen wir ohne Beweis aus [PT87, S. 32]. Insbesondere ist μ_n differenzierbar. Wir fokussieren uns hier also lediglich auf die Herleitung der Formel für den Gradienten.

Beweis. Wir unterdrücken das Argument q und schreiben $\mu_n = \mu_n(q)$. Da $\mu_n(q)$ für jedes $q \in L^2$ ein Dirichleteigenwert von q ist, gilt

$$y_2(1, \mu_n(q), q) = 0 \quad \forall q \in L^2.$$

Die Funktion $(\lambda, q) \mapsto y_2(1, \lambda, q)$ ist analytisch [PT87, S. 10] und μ_n nach 3.1 differenzierbar. Ableiten nach q mit der Kettenregel ergibt daher [PT87, S. 33]

$$0 = \frac{\partial}{\partial q} y_2(1, \mu_n(q), q) = \dot{y}_2(1, \mu_n) \frac{\partial\mu_n}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q} y_2(1, \lambda) \Big|_{\lambda=\mu_n}. \quad (15)$$

Mit Theorem 1.6(a)[PT87, S. 21] berechnen wir den zweiten Term, für $j = 2$ und $x = 1$.

¹In [PT87] wird dafür $\partial\mu_n/\partial q(t)$ geschrieben.

Da die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_{[0,1]}$ auf $[0, 1]$ gleich 1 ist, gilt

$$\frac{\partial y_2(1, \lambda)}{\partial q}(t) = y_2(t) [y_1(t) y_2(1) - y_1(1) y_2(t)], \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Für $\lambda = \mu_n$ ist $y_2(1, \mu_n) = 0$, also bleibt

$$\left. \frac{\partial y_2(1, \lambda)}{\partial q}(t) \right|_{\lambda=\mu_n} = -y_1(1) y_2^2(t).$$

Die Wronski-Identität $y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x) = 1$ [PT87, S. 11] lautet an der Stelle $x = 1$ wegen $y_2(1, \mu_n) = 0$

$$y_1(1, \mu_n) y_2'(1, \mu_n) = 1.$$

Insbesondere ist $y_2'(1, \mu_n) \neq 0$, und der zweite Term in (15) ist

$$-y_1(1) y_2^2(t) = -\frac{1}{y_2'(1, \mu_n)} y_2^2(t, \mu_n).$$

Nach Theorem 2.1 ist $\dot{y}_2(1, \mu_n) \neq 0$. Wir können (15) also durch $\dot{y}_2(1, \mu_n)$ teilen und erhalten mit der Darstellung (13) von g_n

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial q}(t) = \frac{y_2^2(t, \mu_n)}{\dot{y}_2(1, \mu_n) y_2'(1, \mu_n)} = g_n^2(t, q).$$

□

4 Die Asymptotik der Dirichleteigenwerte

Nach (2) kennen wir bisher nur die grobe Lage der Eigenwerte, $\mu_n(q) = n^2\pi^2 + O(n)$. Diese Abschätzung verfeinern wir nun [PT87, S. 35]. Für $q = 0$ gilt exakt $\mu_n = n^2\pi^2$ und $g_n = \sqrt{2}\sin n\pi x$. Das folgende Theorem besagt, dass ein Potential $q \in L^2$ hieran für große n wenig ändert: Die Eigenwerte werden bis auf einen quadratsummierbaren Rest um den Mittelwert von q verschoben, und die Eigenfunktionen stimmen bis auf $O(1/n)$ mit denen für $q = 0$ überein.

Notation. Mit ℓ^2 bezeichnen wir den Hilbertraum aller reellen Folgen $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ mit $\sum_{n \geq 1} \alpha_n^2 < \infty$. Analog zu $O(1/n)$ schreiben wir $\ell^2(n)$ für eine beliebige Folge in ℓ^2 . Die Gleichung $\alpha_n = \beta_n + \ell^2(n)$ bedeutet also $\alpha_n = \beta_n + \lambda_n$ mit $\sum_{n \geq 1} \lambda_n^2 < \infty$ [PT87, S. 35].

Für den Beweis des nächsten Theorems brauchen wir, dass die Koeffizienten $\langle \cos 2\pi nx, q \rangle$ quadratsummierbar sind. Das folgt aus dem folgenden Lemma, welches wir hier kurz skizzieren. Dabei heißt ein Orthonormalsystem in L^2 *Orthonormalbasis*, wenn es orthogonal und normiert ist, und der Abschluss seiner linearen Hülle ganz L^2 ist.

Lemma 4.1. *Die Funktionen*

$$1, \quad \sqrt{2} \cos 2\pi nx, \quad \sqrt{2} \sin 2\pi nx \quad (n \geq 1)$$

bilden eine Orthonormalbasis von L^2 .

Beweis. Wir skizzieren die Beweisidee hier nur kurz. Die Orthonormalität rechnet man mit den Additionstheoremen direkt nach. Die trigonometrischen Polynome, also die endlichen Linearkombinationen der Basisfunktionen, bilden eine Algebra, die die Konstanten enthält und die Punkte trennt.² Nach dem Satz von Stone-Weierstraß [Sch24, Satz 9.48] liegen sie daher bezüglich der Supremumsnorm dicht in den stetigen periodischen Funktionen auf $[0, 1]$, d.h. den stetigen Funktionen f mit $f(0) = f(1)$. Wegen

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \|f\|_\infty$$

(denn $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ für alle x , und $[0, 1]$ hat die Länge 1) gilt die Dichtheit erst recht bezüglich der L^2 -Norm. Weil außerdem die stetigen periodischen Funktionen dicht in L^2 liegen, liegt die lineare Hülle dicht in L^2 . $\square$

²Genauer wendet man den Satz von Stone-Weierstraß auf den Kreis an, also auf $[0, 1]$ mit identifizierten Endpunkten 0 und 1. Das ist nötig, weil jedes trigonometrische Polynom in 0 und 1 denselben Wert hat, die Punkte 0 und 1 also nicht getrennt werden. Auf dem Kreis trennen dagegen schon $\cos 2\pi x$ und $\sin 2\pi x$ die Punkte, denn $x \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ ist auf $[0, 1)$ injektiv. Die stetigen Funktionen auf dem Kreis sind gerade die stetigen periodischen Funktionen auf $[0, 1]$.

Theorem 4.2. ([PT87, Theorem 4, S. 35]). Für $q \in L^2$ gilt

$$\mu_n(q) = n^2\pi^2 + \int_0^1 q(t) dt - \langle \cos 2\pi nx, q \rangle + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (16)$$

$$= n^2\pi^2 + \int_0^1 q(t) dt + \ell^2(n) \quad (17)$$

sowie

$$g_n(x, q) = \sqrt{2} \sin \pi nx + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (18)$$

$$g'_n(x, q) = \sqrt{2}\pi n \cos \pi nx + O(1). \quad (19)$$

Diese Abschätzungen gelten gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von $[0, 1] \times L^2$.

Beweis. Wir iterieren Abschätzungen für μ_n und g_n und verschärfen diese dabei schrittweise. Alle Abschätzungen gelten gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von $[0, 1] \times L^2$ [PT87, S. 36], d.h. die Konstanten in den O -Symbolen hängen nur von einer Schranke für $\|q\|$ ab. Wir schreiben $\mu_n = \mu_n(q)$ und $g_n(x) = g_n(x, q)$. Dabei benutzen wir mehrfach, dass für beschränkte Funktionen f stets $f \cdot O(\alpha_n) = O(\alpha_n)$ und $O(\alpha_n) \cdot O(\beta_n) = O(\alpha_n \beta_n)$ gilt. Insbesondere verschwinden Faktoren wie $\sin \pi nx$ und $\cos \pi nx$ im O -Symbol.

Schritt 1: Grobe Lage der Eigenwerte. Nach (2) gilt

$$\sqrt{\mu_n} = n\pi + O(1). \quad (20)$$

Schritt 2: Vorläufige Abschätzung von g_n . Nach dem Vortrag über das Oszillationstheorem II ist μ_n reell, und wegen $\mu_n = n^2\pi^2 + O(n)$, ist $\mu_n > 0$ für große n . Dann ist also $\sqrt{\mu_n}$ reell und es gilt $\text{Im } \sqrt{\mu_n} = 0$. Außerdem gilt nach (20) $\sqrt{\mu_n} = O(n)$ und $1/\sqrt{\mu_n} = O(1/n)$. Die Basic Estimates [PT87, Theorem 1.3, S. 13] liefern daher für y_2

$$\left| y_2(x, \mu_n) - \frac{\sin \sqrt{\mu_n} x}{\sqrt{\mu_n}} \right| \leq \frac{1}{\mu_n} e^{\|q\|\sqrt{x}} \leq \frac{e^{\|q\|}}{\mu_n},$$

also

$$y_2(x, \mu_n) = \frac{\sin \sqrt{\mu_n} x}{\sqrt{\mu_n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (21)$$

Jetzt fehlt uns noch der Nenner um g_n zu bestimmen. Wir berechnen also die Norm von $y_2(\cdot, \mu_n)$. Schreiben wir (21) als $y_2 = s + r$ mit $s = \sin(\sqrt{\mu_n} x)/\sqrt{\mu_n} = O(1/n)$ und $r = O(1/n^2)$, so ist $y_2^2 = (s + r)^2 = s^2 + 2sr + r^2 = s^2 + O(1/n^3)$. Mit der Identität

$2 \sin^2 ax = 1 - \cos 2ax$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 y_2^2(t, \mu_n) dt &= \int_0^1 \frac{\sin^2 \sqrt{\mu_n} t}{\mu_n} dt + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \frac{1}{2\mu_n} \int_0^1 (1 - \cos 2\sqrt{\mu_n} t) dt + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \frac{1}{2\mu_n} \left(1 - \frac{\sin 2\sqrt{\mu_n}}{2\sqrt{\mu_n}}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \frac{1}{2\mu_n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).
\end{aligned} \tag{22}$$

Im letzten Schritt haben wir $\sin 2\sqrt{\mu_n}/(2\sqrt{\mu_n}) = O(1/n)$ und $2\mu_n \cdot O(1/n^3) = O(1/n)$ wegen $\mu_n = O(n^2)$ benutzt. Durch Wurzelziehen und Invertieren folgt

$$\|y_2(\cdot, \mu_n)\|^{-1} = \sqrt{2}\sqrt{\mu_n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{23}$$

Nach (13) ist $g_n = y_2(\cdot, \mu_n)/\|y_2(\cdot, \mu_n)\|$. Mit (21), (23) und $\sqrt{\mu_n} \cdot O(1/n^2) = O(1/n)$ erhalten wir die vorläufige Abschätzung [PT87, S. 36]

$$g_n(x) = \sqrt{2}\sqrt{\mu_n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(\frac{\sin \sqrt{\mu_n} x}{\sqrt{\mu_n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \sqrt{2} \sin \sqrt{\mu_n} x + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{24}$$

Den Ausdruck $\sin \sqrt{\mu_n} x$ können wir hier noch nicht durch $\sin n\pi x$ ersetzen, da wir $\sqrt{\mu_n}$ nach (20) nur bis auf $O(1)$ kennen.

Schritt 3: Asymptotik von g_n . Bis jetzt wissen wir $\mu_n = n^2\pi^2 + O(n)$. Jetzt verbessern wir diese Abschätzung mit der Gradientenformel 3.1 ([PT87, S. 31]). Dazu verbinden wir das Nullpotential mit q durch die Strecke tq , $0 \leq t \leq 1$. Am Anfangspunkt kennen wir den Eigenwert: $\mu_n(0) = n^2\pi^2$. Da μ_n nach Theorem 3.1 reell analytisch ist, ist $t \mapsto \mu_n(tq)$ stetig differenzierbar und nach 3.1 angewandt auf das Potential tq , gilt

$$\frac{d}{dt} \mu_n(tq) = \left\langle \frac{\partial \mu_n}{\partial q}(tq), q \right\rangle = \langle g_n^2(\cdot, tq), q \rangle.$$

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt [PT87, S. 36]

$$\mu_n - n^2\pi^2 = \mu_n(q) - \mu_n(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \mu_n(tq) dt = \int_0^1 \langle g_n^2(\cdot, tq), q \rangle dt. \tag{25}$$

Um das Integral abzuschätzen brauchen wir $g_n(x)$ (24) für alle Potentiale tq . Wegen $\|tq\| \leq \|q\|$ und der Gleichmäßigkeit gilt (24) für alle $g_n(\cdot, tq)$, $0 \leq t \leq 1$, mit denselben Konstanten [PT87, S. 37]. Insbesondere ist g_n beschränkt: Es gibt eine Konstante C mit $|g_n(x, tq)| \leq C$ für alle großen n und alle $x, t \in [0, 1]$. Mit der Cauchy-Schwarz-

Ungleichung $\int_0^1 |q| dx \leq \|q\|$ folgt aus (25)

$$|\mu_n - n^2\pi^2| \leq \int_0^1 \int_0^1 g_n^2(x, tq) |q(x)| dx dt \leq C^2 \|q\|,$$

also

$$\mu_n = n^2\pi^2 + O(1). \quad (26)$$

Für $\sqrt{\mu_n}$ bedeutet das mit der 3. binomischen Formel wegen $\sqrt{\mu_n} + n\pi \geq n\pi$

$$\sqrt{\mu_n} - n\pi = \frac{\mu_n - n^2\pi^2}{\sqrt{\mu_n} + n\pi} = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (27)$$

Nach dem Mittelwertsatz gilt $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$ und ebenso $|\cos a - \cos b| \leq |a - b|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Für $x \in [0, 1]$ ist daher nach (27)

$$|\sin \sqrt{\mu_n} x \sin n\pi x| \leq |\sqrt{\mu_n} - n\pi| x \leq |\sqrt{\mu_n} - n\pi| = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

und aus (24) folgt

$$g_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (28)$$

Schritt 4: Asymptotik von μ_n . Wie in Schritt 3 gilt (28) auch für $g_n(\cdot, tq)$ gleichmäßig in $t \in [0, 1]$. Beim Quadrieren ist der Mischterm $2\sqrt{2} \sin(n\pi x) \cdot O(1/n)$ von der Ordnung $O(1/n)$ und das Quadrat des Fehlerterms sogar $O(1/n^2)$. Zusammen ergibt das $O(1/n)$. Mit $2 \sin^2 ax = 1 - \cos 2ax$ folgt

$$g_n^2(x, tq) = 2 \sin^2 n\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \cos 2n\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Der Hauptterm hängt nicht mehr von t ab. Einsetzen in (25) ergibt [PT87, S. 37]

$$\begin{aligned} \mu_n - n^2\pi^2 &= \int_0^1 \left\langle 1 - \cos 2\pi n x + O\left(\frac{1}{n}\right), q \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 q(x) dx - \langle \cos 2\pi n x, q \rangle + O\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned} \quad (29)$$

denn für einen Fehlerterm r_n mit $|r_n(x, t)| \leq C/n$ ist $|\int_0^1 \langle r_n, q \rangle dt| \leq \frac{C}{n} \|q\|$. Das ist (16). Daraus folgt (17): Für eine ONB $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt $q = \sum_n \langle f_n, q \rangle f_n$, und damit auch

$$\|q\|^2 = \left\| \sum_n \langle f_n, q \rangle f_n \right\|^2 = \sum_n |\langle f_n, q \rangle|^2.$$

Für unsere Basis aus 4.1 folgt daher

$$\|q\|^2 = \langle 1, q \rangle^2 + \sum_{n \geq 1} \langle \sqrt{2} \cos 2\pi n x, q \rangle^2 + \sum_{n \geq 1} \langle \sqrt{2} \sin 2\pi n x, q \rangle^2.$$

Da alle Summanden Quadrate reeller Zahlen sind und damit nicht negativ, und wegen $\langle \sqrt{2} \cos 2\pi n x, q \rangle = \sqrt{2} \langle \cos 2\pi n x, q \rangle$ folgt

$$\sum_{n \geq 1} \langle \cos 2\pi n x, q \rangle^2 = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \langle \sqrt{2} \cos 2\pi n x, q \rangle^2 \leq \frac{1}{2} \|q\|^2 < \infty,$$

d.h. $\langle \cos 2\pi n x, q \rangle = \ell^2(n)$, wobei die Schranke wieder nur von $\|q\|$ abhängt. Weiter $O(1/n)$ ist wegen $\sum_{n \geq 1} n^{-2} < \infty$ ebenfalls quadratsummierbar und die Summe zweier quadratsummierbarer Folgen ist wieder quadratsummierbar. Damit folgt

$$\mu_n - n^2 \pi^2 = \int_0^1 q(t) dt - \langle \cos 2\pi n x, q \rangle + O\left(\frac{1}{n}\right) = \int_0^1 q(t) dt - \ell^2(n),$$

also

$$\mu_n = n^2 \pi^2 + \int_0^1 q(t) dt + \ell^2(n).$$

Schritt 5: Asymptotik von g'_n . Die Basic Estimate für y'_2 [PT87, Theorem 1.3, S. 13] liefert wie in Schritt 2

$$\left| y'_2(x, \mu_n) - \cos \sqrt{\mu_n} x \right| \leq \frac{\|q\|}{\sqrt{\mu_n}} e^{\|q\| \sqrt{x}} \leq \frac{\|q\| e^{\|q\|}}{\sqrt{\mu_n}}.$$

Mit (27) und dem Mittelwertsatz für den Kosinus folgt

$$y'_2(x, \mu_n) = \cos \sqrt{\mu_n} x + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_n}}\right) = \cos \pi n x + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Da $\|y_2(\cdot, \mu_n)\|$ nicht von x abhängt, ist $g'_n = y'_2(\cdot, \mu_n) / \|y_2(\cdot, \mu_n)\|$. Mit (23) erhalten wir

$$\begin{aligned} g'_n(x) &= \sqrt{2} \sqrt{\mu_n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) (\cos n \pi x + O\left(\frac{1}{n}\right)) \\ &= \sqrt{2 \mu_n} \cos n \pi x + O(1) = \sqrt{2} n \pi \cos n \pi x + O(1). \end{aligned} \tag{30}$$

Damit haben wir $\sqrt{\mu_n} = O(n)$ und im letzten Schritt (27) benutzt und somit alle Aussagen des Theorems gezeigt. $\square$

5 Asymptotik von Produkten und Quadraten

Neben μ_n und g_n benötigt man auch asymptotische Abschätzungen für die Quadrate der Eigenfunktionen und für die Produkte

$$a_n(x, q) = y_1(x, \mu_n) y_2(x, \mu_n), \quad n \geq 1 \quad (31)$$

[PT87, S. 37]. Sie folgen aus Theorem 4.2.

Korollar 5.1. [PT87, Korollar 1, S. 38] Für $q \in L^2$ gilt

$$g_n^2 = 1 - \cos 2\pi n x + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (32)$$

$$\frac{d}{dx} g_n^2 = 2\pi n \sin 2\pi n x + O(1) \quad (33)$$

und

$$a_n = \frac{1}{2\pi n} \sin 2\pi n x + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (34)$$

$$\frac{d}{dx} a_n = \cos 2\pi n x + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (35)$$

Diese Abschätzungen gelten gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von $[0, 1] \times L^2$.

Beweis. Wie im Beweis von Theorem 4.2 schreiben wir $\mu_n = \mu_n(q)$ und betrachten große n , sodass $\mu_n > 0$ ist. Wir benutzen die dort genannten Rechenregeln für das O -Symbol. Die Konstanten in den O -Symbolen hängen wieder nur von einer Schranke von $\|q\|$ ab.

Die Abschätzungen für g_n^2 . Die Abschätzung (32) haben wir bereits in Schritt 4 des Beweises von 4.2 durch Quadrieren von (18) erhalten.

Für (33) dürfen wir (32) nicht einfach ableiten, da über die Ableitung des Fehlerterms nichts bekannt ist. Stattdessen wenden wir die Kettenregel an und setzen (18) und (19) ein:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} g_n^2 &= 2g_n g_n' = 2\left(\sqrt{2} \sin n\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\sqrt{2}n\pi \cos n\pi x + O(1)\right) \\ &= 2\left(2n\pi \sin n\pi x \cos n\pi x + \sqrt{2} \sin n\pi x O(1) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2}n\pi \cos n\pi x O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)O(1)\right) \\ &= 2\left(2n\pi \sin n\pi x \cos n\pi x + O(1)\right) \\ &= 2n\pi \sin 2n\pi x + O(1). \end{aligned} \quad (36)$$

Beim Ausmultiplizieren sind die beiden Mischterme von der Ordnung $O(1)$ und das Produkt der Fehlerterme ist $O(1/n)$. Mit $2 \sin a \cos a = \sin 2a$ folgt die letzte Gleichung.

Abschätzungen für y_1, y_2 und ihre Ableitungen. Für die Abschätzungen von a_n benötigen wir die Lösungen y_1, y_2 an der Stelle $\lambda = \mu_n$ [PT87, S. 38]. Da $\mu_n > 0$ ist, ist $\operatorname{Im} \sqrt{\mu_n} = 0$, und die Basic Estimates [PT87, Theorem 1.3, S. 13] liefern wie in Schritt 2 des Beweises von 4.2

$$\begin{aligned} y_1(x, \mu_n) &= \cos \sqrt{\mu_n} x + O\left(\frac{1}{n}\right), & y_2(x, \mu_n) &= \frac{\sin \sqrt{\mu_n} x}{\sqrt{\mu_n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ y_1'(x, \mu_n) &= -\sqrt{\mu_n} \sin \sqrt{\mu_n} x + O(1), & y_2'(x, \mu_n) &= \cos \sqrt{\mu_n} x + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (37)$$

Hierbei haben wir wieder $1/\sqrt{\mu_n} = O(1/n)$ benutzt. Wir ersetzen nun $\sqrt{\mu_n}$ durch $n\pi$. Nach (27) ist $\sqrt{\mu_n} = n\pi + O(1/n)$. Mit dem Mittelwertsatz folgt daher wie in Schritt 3 des Beweises von 4.2

$$\cos \sqrt{\mu_n} x = \cos n\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sin \sqrt{\mu_n} x = \sin n\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (38)$$

Außerdem gilt

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_n}} - \frac{1}{\pi n} = \frac{n\pi - \sqrt{\mu_n}}{\pi n \sqrt{\mu_n}} = O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (39)$$

da der Zähler nach (27) von der Ordnung $O(1/n)$ und der Nenner von der Größenordnung n^2 ist. Setzen wir diese beiden Resultate in (37) ein, erhalten wir [PT87, S. 38]

$$y_1(x, \mu_n) = \cos \pi n x + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (40)$$

$$y_2(x, \mu_n) = \left(\frac{1}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \left(\sin \pi n x + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{\pi n} \sin \pi n x + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (41)$$

$$y_1'(x, \mu_n) = -\left(\pi n + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(\sin \pi n x + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O(1) = -\pi n \sin \pi n x + O(1), \quad (42)$$

$$y_2'(x, \mu_n) = \cos \pi n x + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (43)$$

Die letzte Abschätzung kennen wir bereits aus Schritt 5 des Beweises von 4.2.

Die Abschätzungen für a_n . Mit (40), (41) und $2 \sin a \cos a = \sin 2a$ folgt

$$\begin{aligned} a_n &= y_1 y_2 \big|_{\mu_n} = \left(\cos \pi n x + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(\frac{1}{\pi n} \sin \pi n x + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\pi n} \cos \pi n x \sin \pi n x + \cos \pi n x O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{\pi n} \sin \pi n x O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi n} \sin 2\pi n x + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned} \quad (44)$$

denn beide Mischterme sind der Größenordnung $O(1/n^2)$ und das Produkt der Fehlerterme ist der Größenordnung $O(1/n^3)$. Für (35) verwenden wir die Produktregel. Mit

(40)–(43) gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} a_n &= (y_1 y_2' + y_1' y_2) \big|_{\mu_n} \\
&= \left(\cos \pi n x + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left(\cos \pi n x + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
&\quad + \left(-\pi n \sin \pi n x + O(1) \right) \left(\frac{1}{\pi n} \sin \pi n x + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\
&= \cos^2 \pi n x + 2 \cos \pi n x O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \sin^2 \pi n x - \pi n \sin \pi n x O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (45) \\
&\quad + \frac{1}{\pi n} \sin \pi n x O(1) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \cos^2 \pi n x - \sin^2 \pi n x + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \cos 2\pi n x + O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Dabei sind die Mischterme alle der Größenordnung $O(1/n)$ und wir haben im letzten Schritt wieder die Abwandlung des Additionstheorems $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$ benutzt. Da keine der Konstanten von x und alle nur von einer Schranke für $\|q\|$ abhängen, gelten sämtliche Abschätzungen gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von $[0, 1] \times L^2$. $\square$

Literatur

- [Cru26] Jessica Crutoi. „Eigenwerte von Hills Gleichung“. Bachelorarbeit. Universität Mannheim, 2026.
- [PT87] Jürgen Pöschel und Eugene Trubowitz. *Inverse spectral theory*. eng. Pure and applied mathematics; 130. Boston: Academic Press, 1987. ISBN: 1281755591.
- [Sch24] Martin U. Schmidt. „Analysis 2“. Vorlesungsskript, Universität Mannheim, Sommersemester. 2024.