

Universität Mannheim

Seminar: Ausgewählte Themen gewöhnlicher
Differentialgleichungen und dynamische Systeme

Ableitungen der Fundamentallösung

Seminararbeit

Verfasserin: Tuba Chaudhry

Dozent: Prof. Dr. Martin U. Schmidt

Literaturgrundlage: J. Pöschel, E. Trubowitz, *Inverse Spectral Theory*

Oktober 2026

Inhaltsverzeichnis

1	Fundamentallösungen und Fundamentalmatrix	2
2	Abhängigkeit von λ und q	4
3	Ableitung bezüglich des Potentials: Theorem 6(a)	4
3.1	Ableitung zwischen normierten Räumen	4
3.2	Rieszscher Darstellungssatz und Gradient	5
3.3	Variation des Potentials und Ableitung nach t	6
3.4	Anwendung von Theorem 2	8
3.5	Bestimmung des Gradienten und Theorem 6(a)	9
4	Ableitung bezüglich λ: Theorem 6(b)	11

1 Fundamentallösungen und Fundamentalmatrix

Wir betrachten die lineare Differentialgleichung

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

wobei

$$q \in L^2([0, 1], \mathbb{C})$$

das Potential und

$$\lambda \in \mathbb{C}$$

ein komplexer Parameter ist.

Zu dieser Differentialgleichung betrachten wir die beiden Fundamentallösungen

$$y_1(x, \lambda, q) \quad \text{und} \quad y_2(x, \lambda, q),$$

die durch die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} y_1(0, \lambda, q) &= 1, & y_1'(0, \lambda, q) &= 0, \\ y_2(0, \lambda, q) &= 0, & y_2'(0, \lambda, q) &= 1 \end{aligned}$$

eindeutig bestimmt sind.

Jede Lösung der Differentialgleichung lässt sich eindeutig in der Form

$$y(x) = y(0)y_1(x, \lambda, q) + y'(0)y_2(x, \lambda, q)$$

darstellen.

Die Koeffizienten dieser Linearkombination sind also gerade die Anfangswerte $y(0)$ und $y'(0)$.

Für die folgenden Untersuchungen ist es sinnvoll, nicht nur die beiden Fundamentallösungen, sondern gleichzeitig auch ihre ersten Ableitungen zu betrachten. Dazu fassen wir sie in der Fundamentalmatrix

$$Y(x, \lambda, q) = \begin{pmatrix} y_1(x, \lambda, q) & y_2(x, \lambda, q) \\ y_1'(x, \lambda, q) & y_2'(x, \lambda, q) \end{pmatrix}$$

zusammen.

Die Bedeutung dieser Matrix wird deutlich, wenn die Lösung y gemeinsam mit ihrer Ableitung betrachtet wird. Aus

$$y(x) = y(0)y_1(x, \lambda, q) + y'(0)y_2(x, \lambda, q)$$

erhält man durch ableiten nach x

$$y'(x) = y(0)y_1'(x, \lambda, q) + y'(0)y_2'(x, \lambda, q).$$

Beide Gleichungen können gemeinsam in Matrixform geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = Y(x, \lambda, q) \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}.$$

Die Fundamentalmatrix beschreibt damit, wie die Anfangsdaten

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$$

auf den Lösungsvektor an der Stelle x abgebildet werden.

Dies lässt sich auch über die Darstellung der Differentialgleichung als System erster Ordnung erkennen. Setzt man

$$u(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix},$$

so folgt aus

$$-y'' + qy = \lambda y$$

die Gleichung

$$y'' = (q - \lambda)y.$$

Damit ist die Differentialgleichung äquivalent zu

$$u'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(x) - \lambda & 0 \end{pmatrix} u(x).$$

Entsprechend erfüllt die Fundamentalmatrix

$$Y'(x, \lambda, q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(x) - \lambda & 0 \end{pmatrix} Y(x, \lambda, q).$$

Aus den Anfangsbedingungen der Fundamentallösungen folgt

$$Y(0, \lambda, q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Die Darstellung

$$u(x) = Y(x, \lambda, q)u(0)$$

zeigt, dass die Fundamentalmatrix die Entwicklung des Anfangswerts $u(0)$ zum Lösungsvektor $u(x)$ beschreibt.

2 Abhängigkeit von λ und q

Im Folgenden betrachten wir, wie die Fundamentallösungen von den Parametern λ und q abhängen.

Für festes $x \in [0, 1]$ sind

$$y_j(x, \lambda, q) \quad \text{und} \quad y'_j(x, \lambda, q), \quad j = 1, 2,$$

analytisch in den Parametern (λ, q) [1].

Dabei ist die Rolle der beiden Parameter unterschiedlich.

Für festes x und q sind

$$\lambda \longmapsto y_j(x, \lambda, q)$$

und entsprechend auch

$$\lambda \longmapsto y'_j(x, \lambda, q)$$

ganze Funktionen des komplexen Parameters λ .

Das Potential q ist dagegen kein skalarer Parameter, sondern selbst eine Funktion aus dem Raum

$$L^2([0, 1], \mathbb{C}).$$

Für die Ableitung bezüglich q betrachten wir somit eine Ableitung zwischen Banachräumen.

Die Funktion y_j lässt sich lokal um ein beliebiges Potential q entwickeln. Für eine kleine Störung

$$h \in L^2([0, 1], \mathbb{C})$$

gilt in erster Ordnung

$$y_j(x, \lambda, q + h) = y_j(x, \lambda, q) + d_q y_j(x, \lambda, q)(h) + o(\|h\|_{L^2}).$$

Dabei ist

$$d_q y_j(x, \lambda, q)(h)$$

der lineare Term der Taylorentwicklung und beschreibt die Änderung von y_j in erster Ordnung bei einer kleinen Störung des Potentials.

Im Folgenden soll die Ableitung $d_q y_j$ explizit bestimmt werden.

3 Ableitung bezüglich des Potentials: Theorem 6(a)

3.1 Ableitung zwischen normierten Räumen

Da das Potential q selbst eine Funktion ist, benötigen wir zunächst den Begriff der Ableitung zwischen normierten Räumen.

Seien X und Y normierte Vektorräume und

$$f : U \subset X \longrightarrow Y,$$

wobei U offen sei.

Die Abbildung f heißt in $x_0 \in U$ differenzierbar, falls eine beschränkte lineare Abbildung

$$Df(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$$

existiert, sodass

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Äquivalent kann dies in der Form

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)h + o(\|h\|_X)$$

geschrieben werden. [2]

Für festes

$$x \in [0, 1] \quad \text{und} \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

betrachten wir nun die Abbildung

$$q \longmapsto y_j(x, \lambda, q), \quad j = 1, 2.$$

Genauer gilt

$$y_j(x, \lambda, \cdot) : L^2([0, 1], \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Der Raum $L^2([0, 1], \mathbb{C})$ ist ein Hilbertraum und damit insbesondere ein Banachraum. Auch $\mathbb{C}$ ist ein Banachraum.

Da y_j bezüglich q differenzierbar ist, ist

$$d_q y_j(x, \lambda, q) \in \mathcal{L}(L^2([0, 1], \mathbb{C}), \mathbb{C}).$$

Die Ableitung ist somit eine beschränkte lineare Abbildung.

3.2 Rieszscher Darstellungssatz und Gradient

Da

$$d_q y_j : L^2([0, 1], \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine beschränkte lineare Abbildung ist und $L^2([0, 1], \mathbb{C})$ ein Hilbertraum ist, können wir den Rieszschen Darstellungssatz anwenden.

Dieser besagt, dass zu jeder stetigen linearen Abbildung

$$\varphi : H \longrightarrow \mathbb{K}$$

auf einem Hilbertraum H ein eindeutig bestimmtes Element $g \in H$ existiert, sodass

$$\varphi(v) = \langle v, g \rangle$$

für alle $v \in H$ gilt [3].

Da wir komplexwertige Potentiale $q \in L^2([0, 1], \mathbb{C})$ zulassen, verwenden wir das positiv definite Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(s) \overline{g(s)} ds.$$

Auf die Ableitung $d_q y_j$ angewendet liefert der Rieszsche Darstellungssatz daher ein eindeutiges

$$g \in L^2([0, 1], \mathbb{C})$$

mit

$$d_q y_j(v) = \langle v, g \rangle.$$

In der Notation von Pöschel und Trubowitz wird der Gradient von y_j bezüglich des Potentials q so bezeichnet, dass

$$g = \frac{\overline{\partial y_j}}{\partial q}.$$

Damit gilt

$$d_q y_j(v) = \left\langle v, \frac{\overline{\partial y_j}}{\partial q} \right\rangle.$$

Unser Ziel ist nun, den Gradienten $\frac{\partial y_j}{\partial q}$ explizit zu bestimmen.

3.3 Variation des Potentials und Ableitung nach t

Um die Ableitung bezüglich q konkret zu berechnen, verändern wir das Potential in einer festen Richtung

$$v \in L^2([0, 1], \mathbb{C})$$

und setzen

$$q_t = q + t v.$$

Damit betrachten wir die Abbildung

$$t \longmapsto y_j(x, \lambda, q + t v).$$

Für $t = 0$ gilt $q_t = q$, und damit

$$\left. \frac{d}{dt} y_j(x, \lambda, q + t v) \right|_{t=0} = d_q y_j(x, \lambda, q)(v).$$

Für das gestörte Potential $q + t v$ gilt

$$-y_j'' + (q + t v) y_j = \lambda y_j.$$

Dabei hängt

$$y_j = y_j(x, \lambda, q + t v)$$

selbst ebenfalls von t ab.

Wir differenzieren die Gleichung nach t :

$$-\frac{d}{dt} y_j'' + \frac{d}{dt} ((q + t v) y_j) = \lambda \frac{d}{dt} y_j.$$

Mit der Produktregel ergibt sich formal

$$-\left(\frac{dy_j}{dt}\right)'' + v y_j + (q + t v) \frac{dy_j}{dt} = \lambda \frac{dy_j}{dt}.$$

Für $t = 0$ gilt

$$\left. \frac{dy_j}{dt} \right|_{t=0} = d_q y_j(v).$$

Damit folgt

$$-(d_q y_j(v))'' + q d_q y_j(v) + v y_j = \lambda d_q y_j(v),$$

also

$$-(d_q y_j(v))'' + q d_q y_j(v) = \lambda d_q y_j(v) - v y_j.$$

Da die Anfangsbedingungen der Fundamentallösungen nicht vom Potential q abhängen, verschwinden die Anfangswerte der q -Ableitung:

$$d_q y_j(v)(0) = 0, \quad (d_q y_j(v))'(0) = 0.$$

Bei dieser Rechnung wurde die Ableitung bezüglich des Potentials q mit der zweiten Ableitung nach x vertauscht. Genauer wurde verwendet, dass

$$d_q(y_j'')(v) = (d_q y_j(v))''.$$

Um diesen Schritt zu begründen, betrachten wir zunächst stetige Potentiale

$$q \in C([0, 1]).$$

Für solche Potentiale ist y_j zweimal stetig differenzierbar bezüglich x , und die Ableitung bezüglich q darf mit der zweiten Ableitung bezüglich x vertauscht werden. Damit gilt die Vertauschung der Ableitungen zunächst für stetige Potentiale.

Wir leiten die folgende Integralformel daher zunächst für $q \in C([0, 1])$ her und erweitern sie anschließend auf allgemeine Potentiale aus $L^2([0, 1])$.

3.4 Anwendung von Theorem 2

Wir verwenden nun die Lösungsformel für das zugehörige inhomogene Anfangswertproblem. Für

$$-y'' + qy = \lambda y - f$$

mit den Anfangswerten

$$y(0) = a, \quad y'(0) = b$$

ist die Lösung nach Theorem 2 aus [1] gegeben durch

$$y(x) = a y_1(x) + b y_2(x) + \int_0^x [y_1(s)y_2(x) - y_1(x)y_2(s)] f(s) ds.$$

Wir setzen

$$z = d_q y_j(v).$$

Dann erfüllt z die Gleichung

$$-z'' + qz = \lambda z - v y_j.$$

Im Vergleich mit der inhomogenen Gleichung ist also

$$f = v y_j.$$

Außerdem gelten die Anfangswerte

$$z(0) = 0, \quad z'(0) = 0.$$

Damit folgt aus Theorem 2

$$z(x) = 0 \cdot y_1(x) + 0 \cdot y_2(x) + \int_0^x [y_1(s)y_2(x) - y_1(x)y_2(s)] v(s) y_j(s) ds.$$

Da $z = d_q y_j(v)$, erhalten wir

$$d_q y_j(v) = \int_0^x y_j(s) [y_1(s)y_2(x) - y_1(x)y_2(s)] v(s) ds.$$

Die bisherige Herleitung gilt zunächst für stetige Potentiale $q \in C([0, 1])$.

Da $C([0, 1])$ dicht in $L^2([0, 1])$ liegt, gibt es zu jedem $q \in L^2([0, 1])$ eine Folge

$$q_n \in C([0, 1])$$

mit

$$q_n \rightarrow q \quad \text{in } L^2.$$

Für jedes q_n gilt die zuvor hergeleitete Integralformel. Da beide Seiten dieser Formel stetig von q in der L^2 -Norm abhängen, gilt sie auch im Grenzfalle für q .

Damit gilt die Integralformel nicht nur für stetige Potentiale, sondern für alle

$$q \in L^2([0, 1]).$$

3.5 Bestimmung des Gradienten und Theorem 6(a)

Die Riesz-Darstellung bezieht sich auf das Skalarprodukt im Raum $L^2([0, 1], \mathbb{C})$. Deshalb schreiben wir das Integral über das gesamte Intervall $[0, 1]$.

Dazu verwenden wir die Indikatorfunktion

$$\mathbf{1}_{[0,x]}(s) = \begin{cases} 1, & 0 \leq s \leq x, \\ 0, & x < s \leq 1. \end{cases}$$

Damit gilt

$$d_q y_j(v) = \int_0^1 v(s) y_j(s) [y_1(s) y_2(x) - y_1(x) y_2(s)] \mathbf{1}_{[0,x]}(s) ds.$$

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gilt

$$d_q y_j(v) = \left\langle v, \overline{\frac{\partial y_j}{\partial q}} \right\rangle.$$

Mit der Definition des komplexen Skalarprodukts folgt

$$\begin{aligned} d_q y_j(v) &= \int_0^1 v(s) \overline{\frac{\partial y_j}{\partial q}(s)} ds \\ &= \int_0^1 v(s) \frac{\partial y_j}{\partial q}(s) ds. \end{aligned}$$

Vergleicht man dies mit der zuvor erhaltenen Integralformel, so ergibt sich

$$\frac{\partial y_j(x, \lambda, q)}{\partial q}(s) = y_j(s) [y_1(s) y_2(x) - y_1(x) y_2(s)] \mathbf{1}_{[0,x]}(s).$$

Dies ist die erste Formel aus Theorem 6(a).

Um nun auch die Ableitung von y'_j bezüglich des Potentials zu bestimmen, gehen wir von der zuvor erhaltenen Integralformel

$$d_q y_j(v) = \int_0^x y_j(s) [y_1(s) y_2(x) - y_1(x) y_2(s)] v(s) ds$$

aus und differenzieren diese nach x . Wir setzen

$$f(x, s) = y_j(s) [y_1(s)y_2(x) - y_1(x)y_2(s)] v(s).$$

Dann gilt

$$d_q y_j(v) = \int_0^x f(x, s) ds.$$

Für die Ableitung des Integrals verwenden wir die Leibnizregel für Parameterintegrale [4]. Diese folgt im Wesentlichen aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Kettenregel.

Für

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx$$

gilt

$$\frac{d}{dt} F(t) = f(t, b(t)) b'(t) - f(t, a(t)) a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx.$$

In unserem Fall ist die untere Integrationsgrenze konstant gleich 0 und die obere Integrationsgrenze gleich x . Daher gilt $a'(x) = 0$ und $b'(x) = 1$. Die Leibnizregel vereinfacht sich somit zu

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(x, s) ds = f(x, x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, s) ds.$$

Der Randterm verschwindet, da für $s = x$

$$y_1(s)y_2(x) - y_1(x)y_2(s) = y_1(x)y_2(x) - y_1(x)y_2(x) = 0$$

gilt. Damit bleibt nur der Integralterm übrig.

Für die partielle Ableitung nach x erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, s) = y_j(s) [y_1(s)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(s)] v(s).$$

Daraus folgt

$$d_q y_j'(v) = \int_0^x y_j(s) [y_1(s)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(s)] v(s) ds.$$

Wie bereits zuvor schreiben wir das Integral über das gesamte Intervall $[0, 1]$:

$$d_q y_j'(v) = \int_0^1 v(s) y_j(s) [y_1(s)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(s)] \mathbf{1}_{[0, x]}(s) ds.$$

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gilt

$$d_q y'_j(v) = \left\langle v, \frac{\partial y'_j}{\partial q} \right\rangle.$$

Somit erhalten wir

$$\frac{\partial y'_j(x, \lambda, q)}{\partial q}(s) = y_j(s) [y_1(s) y'_2(x) - y'_1(x) y_2(s)] \mathbf{1}_{[0, x]}(s).$$

Zusammengefasst gilt für $j = 1, 2$:

$$\frac{\partial y_j(x, \lambda, q)}{\partial q}(s) = y_j(s) [y_1(s) y_2(x) - y_1(x) y_2(s)] \mathbf{1}_{[0, x]}(s),$$

sowie

$$\frac{\partial y'_j(x, \lambda, q)}{\partial q}(s) = y_j(s) [y_1(s) y'_2(x) - y'_1(x) y_2(s)] \mathbf{1}_{[0, x]}(s).$$

Die Gradienten sind außerdem gemeinsam stetig bezüglich x , λ und q . Das bedeutet: Gelten

$$x_n \rightarrow x, \quad \lambda_n \rightarrow \lambda, \quad q_n \rightarrow q \quad \text{in } L^2,$$

so konvergieren auch die entsprechenden Gradienten im L^2 -Raum gegen die Gradienten zu (x, λ, q) .

4 Ableitung bezüglich λ : Theorem 6(b)

Nachdem die Ableitungen bezüglich des Potentials q bestimmt wurden, kann daraus auch die Ableitung bezüglich des komplexen Parameters λ hergeleitet werden.

Ausgangspunkt ist erneut die Differentialgleichung

$$-y''_j + q y_j = \lambda y_j.$$

Wir verändern nun den Parameter λ zu $\lambda + t$. Dann gilt

$$-y''_j + q y_j = (\lambda + t) y_j.$$

Bringt man den zusätzlichen Term $t y_j$ auf die linke Seite, erhält man

$$-y''_j + (q - t) y_j = \lambda y_j.$$

Eine Änderung des Parameters λ um t kann also äquivalent als Änderung des Potentials von q zu $q - t$ beschrieben werden. Daher gilt

$$y_j(x, \lambda + t, q) = y_j(x, \lambda, q - t).$$

Da

$$q - t = q + t(-1),$$

ist dies eine Variation des Potentials in Richtung der konstanten Funktion -1 .

Differenzieren wir beide Seiten nach t und setzen anschließend $t = 0$, so ergibt sich

$$\left. \frac{d}{dt} y_j(x, \lambda + t, q) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} y_j(x, \lambda, q + t(-1)) \right|_{t=0}.$$

Somit gilt

$$\frac{\partial y_j}{\partial \lambda} = d_q y_j(-1).$$

Aus Teil (a) wissen wir

$$d_q y_j(v) = \left\langle v, \overline{\frac{\partial y_j}{\partial q}} \right\rangle.$$

Für die konstante Richtung $v = -1$ erhalten wir daher

$$d_q y_j(-1) = \left\langle -1, \overline{\frac{\partial y_j}{\partial q}} \right\rangle = - \int_0^1 \frac{\partial y_j}{\partial q}(s) ds.$$

Damit folgt

$$\frac{\partial y_j}{\partial \lambda} = - \int_0^1 \frac{\partial y_j}{\partial q}(s) ds.$$

Für y'_j verläuft die Rechnung analog:

$$\frac{\partial y'_j}{\partial \lambda} = - \int_0^1 \frac{\partial y'_j}{\partial q}(s) ds.$$

Damit sind auch die Aussagen aus Theorem 6(b) gezeigt.

Literatur

- [1] J. Pöschel und E. Trubowitz, *Inverse Spectral Theory*, Academic Press, 1987.
- [2] M. U. Schmidt, *Analysis I/II*, Vorlesungsskript, HS 2025/FS 2026.
- [3] C. Gerhardt, *Analysis II*, Satz 6.8.8: Darstellungssatz von Fréchet–Riesz.
- [4] M. H. Protter und C. B. Morrey Jr., *Intermediate Calculus*, 2. Auflage, Springer, New York, 1985, S. 421–426.