

Ausarbeitung zum Seminarvortrag "Bifurkation - eine Einleitung"

Kateryna Stolyarova

März 2019

1 Einleitung

"Bifurkation" ist ein lateinisches Wort zusammengesetzt aus "bi" - zwei und "furca" - Gabel und wird üblicherweise als "Verzweigung" oder "Gabelung" übersetzt. In der Medizin bezeichnet Bifurkation die Verzweigung von Blutgefäßen und in der Geographie ist es die Verzweigung von Gewässern, in der Mathematik hingegen ist bei einer Bifurkation eine qualitative Änderung des betrachteten Systems zu beobachten. Genauer:

Im FSS18 haben wir in der VL "Dynamische Systeme und Stabilität" hyperbolische Fixpunkte kennengelernt, welche ihr qualitatives Verhalten bei kleinen Störungen des Systems nicht verändern. Jetzt betrachten wir dagegen nicht-hyperbolische Fixpunkte, welche durch die Änderung eines sogenannten Kontrollparameters eine qualitative Änderung des Systems hervorrufen können.

Man nehme zum Beispiel ein nichtlineares **DGL-System** 1.Ordnung beschrieben durch die allgemeine Darstellung $\dot{x} = f(x)$ mit f der Funktion, welche die DGL beschreibt (*also die Änderung des Zustands eines Systems in Abhängigkeit von der Zeit*). Dieser Funktion $f(x)$ fügt man nun noch einen variablen Parameter " ε " hinzu, sodass wir nun die Gleichung $\dot{x} = f(x, \varepsilon)$ vorliegen haben. Diesen Parameter ε ist nun unser **Kontrollparameter** und wenn wir diesen variieren, kann es zu einer **plötzlichen qualitativen Änderung** des Systems kommen, sodass die sogenannte **Bifurkation** vorliegt.

Im Falle einer Bifurkation verändert sich die **Struktur und Anzahl der Fixpunkte** eines DGL-Systems, wenn der **Bifurkationspunkt** erreicht wird. Zur Untersuchung von dieser qualitativen Änderung werden die **Methoden der linearen Stabilitätsanalyse** angewendet, zudem betrachten wir anfangs die topologische-, die C^1 - und die lineare-Konjugation im Laufe dieser Untersuchungen, sodass ich diese Konzepte nun nochmals kurz erläutern werde.

2 Grundlagen

2.1 Differentialgleichungssysteme

Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung in der eine Funktion in Verhältnis zu ihren Ableitungen gesetzt wird. Die Lösung einer solchen Gleichung muss dann die gegebenen Vorschriften erfüllen. Ein DGL-System ist somit ein System von mehreren Differentialgleichungen, welche üblicherweise voneinander abhängig sind und nicht separat gelöst werden können. Aus der VL "Dynamische Systeme und Stabilität" ist uns die folgende Schreibweise für gewöhnliche DGL-Systeme n-ter Ordnung in expliziter Darstellung bekannt:

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t)), \text{ mit } f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Wobei $x(t)$ die gesuchte \mathbb{R}^m -wertige Funktion ist und f eine reelle Funktion, welche die Differentialgleichungsvorschrift definiert. Da wir im Folgenden nur noch DGL-Systeme 1.Ordnung betrachten, möchte ich an dieser Stelle nochmal erwähnen, dass jedes DGL-System n-ter Ordnung in ein DGL-System 1.Ordnung überführt werden kann. Ist das DGL-System zudem linear, so können wir f auch mit Hilfe der zugehörigen $m \times m$ -Matrix A darstellen, in welcher die Funktionsvorschrift von f für jede einzelne Komponente zusammengefasst ist:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

Bis jetzt haben wir DGL-Systeme definiert, welche von t abhängig sind, also *nicht autonom*, bei der Untersuchung von Bifurkationen beschäftigen wir uns jedoch mit *autonomen* DGL-Systemen, sodass wir das

DGL-System auch wie folgt darstellen können:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

Matrix A liefert bei der Stabilitätsuntersuchung von Fixpunkten des DGL-Systems die entscheidenden Kriterien. Liegt das DGL-System also nicht in linearer Form vor, so müssen wir es linearisieren, um die gewünschte Form der Gleichung zu bekommen.

2.2 Grundlegende Stabilitätskriterien nichtlinearer DGL-Systeme

Ein Fixpunkt oder eine Ruhelage eines DGL-Systems wird grundsätzlich mit Hilfe folgender Gleichung definiert: $f(x) = 0$. Wir untersuchen das Stabilitätsverhalten der Fixpunkte des nichtlinearen DGL-System

$$\dot{x} = f(x)$$

Dazu stören wir den Gleichgewichtszustand von diesem Fixpunkt durch einen sich in unmittelbarer Nähe befindenden benachbarten Punkt im Phasenraum $|x_{str}| \ll 1$, also $x = x_{FP} + x_{str}$. Dann betrachten wir $\dot{x} = \dot{x}_{FP} + \dot{x}_{str}$ und linearisieren das DGL-System in der Umgebung von x_{FP} , d.h. wir entwickeln f in eine Taylorreihe bis zum ersten Glied:

$$\dot{x} = f(x_{FP}) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_{FP}}(x - x_{FP}) + \mathcal{O}(x_{str}^2) = f(x_{FP}) + \frac{\delta f}{\delta x}|_{x_{FP}}x_{str} + \mathcal{O}(x_{str}^2)$$

Sei nun

$$\frac{\delta f}{\delta x}|_{x_{FP}} =: J(x_{FP})$$

die (für Fixpunkte x_{FP} konstante) Jacobi-Matrix unseres linearisierten DGL-Systems und wir vernachlässigen $\mathcal{O}(x_{str}^2)$, da dieser genügend schnell klein wird. Dann ergibt sich folgendes linearisiertes DGL-System, mit welchem wir unsere Stabilitätsuntersuchungen durchführen können:

$$\dot{x}_{str} = J(x_{FP})x_{str}$$

Für den Fall, dass die Eigenwerte von J keine verschwindenden Realteile haben, gelten, unter anderen, die nach Hartmann und Grobman aus der VL bekannten Stabilitätskriterien:

- alle $\text{Re}(\text{EW } J) < 0$, dann FP stabil
- mindst. ein $\text{Re}(\text{EW } J) > 0$, dann FP instabil

Nützlich ist zudem, dass wenn man eine quadratische Diagonalmatrix betrachtet, so kann man die Eigenwerte direkt an der Diagonalen ablesen.

2.3 Topologische, differenzierbare und lineare Konjugation und Homöomorphismen

Betrachtet man zwei unterschiedliche lineare Differentialgleichungen, welche mit demselben Phasenportrait beschrieben werden können und somit das gleiche qualitative Verhalten aufweisen, so ist man daran interessiert das quantitative Verhalten der Lösungen dieser DGL genauer zu betrachten und zu vergleichen. Deshalb suchen wir eine bijektive Transformation, welche die Lösung der ersten Differentialgleichung in die Lösung der zweiten Differentialgleichung überführen kann. Zur Veranschaulichung definieren wir folgende lineare Gleichungen:

$$\dot{x} = Ax \text{ und } \dot{y} = By, \text{ in } \mathbb{R}$$

A und B $n \times n$ -Matrizen. Lösungen zu den DGL sind: $x(t) = e^{At}x(0)$ und $y(t) = e^{Bt}y(0)$ mit maximalem Intervall \mathbb{R} .

Ein *Homöomorphismus* ist eine bijektive, stetige Abbildung mit stetiger Inversen. Ein *Diffeomorphismus* ist ein bijektive, stetig differenzierbare Abbildung mit stetig differenzierbarer Inversen.

Die zwei Lösungen dieser Differentialgleichungen sind:

- *topologisch konjugiert*, falls ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben ist, sodass gilt:

$$h(e^{At}x) = e^{Bt}h(x) \text{ bzw. } h \circ \varphi_t = \psi_t \circ h, \forall t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

Wobei $\varphi_t, \psi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \forall t \in \mathbb{R}$ Transformationen gegeben durch $\varphi_t(x) = e^{At}x$ und $\psi_t(x) = e^{Bt}x$.

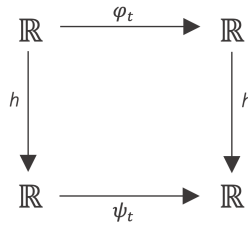


Abbildung 1: Kommutatives Diagramm zur Veranschaulichung

- *streng differenzierbar konjugiert*, falls ein Diffeomorphismus h vorliegt, sodass Relation (1) hält.
- *linear konjugiert*, falls eine invertierbare, lineare Transformation h gegeben ist, sodass Relation (1) hält.

Zudem gelten folgende Aussagen (vgl. Barreira & Valls, Seite 87-94):

1. Die Lösungen der DGLen sind stetig differenzierbar konjugiert \Leftrightarrow die Lösungen der DGLen sind linear konjugiert
2. Die Lösungen der DGLen sind stetig differenzierbar konjugiert \Rightarrow die Lösungen der DGLen sind topologisch konjugiert.
3. Die Lösungen der DGLen sind linear konjugiert \Leftrightarrow A und B haben die selbe Jordan-Matrix.
4. Eine quadratische Matrix ist hyperbolisch, wenn alle Eigenwerte einen nicht-verschwindenden Realteil haben. Wir definieren $m(A) := \# \text{algebraische Vielfachheit der Eigenwerte von A mit positivem Realteil}$. Seien nun A und B quadratisch und hyperbolisch, dann gilt: $m(A) = m(B) \Rightarrow$ die Lösungen der DGL sind topologisch konjugiert.

2.4 Hyperbolischer und nicht-hyperbolischer Fixpunkt mit *Hartman und Grobman*

Ein hyperbolischer Fixpunkt kann auf verschiedene Arten definiert werden. Die Grundlegende Idee ist, dass ein hyperbolischer Fixpunkt sein Stabilitätsverhalten durch kleine Störungen nicht beeinflussen lässt. Aus einer uns bekannten Definition aus der VL, können wir ableiten, dass: ein Fixpunkt einer linearen DGL dadurch charakterisiert werden kann, dass das Spektrum der zugehörigen Jacobi-Matrix A sich in *stabil* und *instabil* zerlegen lässt: $\sigma(A) = \sigma_u(A) \cup \sigma_s(A)$. D.h. es liegen keine Eigenwerte mit verschwindendem Realteil vor. Ein nicht-hyperbolischer Fixpunkt ist somit gegeben, falls mindestens ein Eigenwert mit verschwindendem Realteil existiert.

Betrachten wir nun den *Satz von Hartman und Grobman*, so liefert dieser eine für uns nützliche Aussage: Wenn ein hyperbolischer Fixpunkt vorliegt, so können wir das zugehörige System durch Linearisierung vereinfachen und dann entsprechende qualitative Aussagen treffen. Liegt ein nicht-hyperbolischer Fixpunkt und somit wahrscheinlich eine Bifurkation vor, so ist das nicht möglich.

3 Erstes Beispiel zur Veranschaulichung

Wir betrachten folgendes lineares DGL-System:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= x \\
\dot{y} &= (1 + \varepsilon)y, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Dieses kann man auch wie folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Passend zu dem von uns betrachteten Thema, hängt die Gleichung von dem Kontrollparameter ε ab. Um also das qualitative Verhalten von dem einzigen Fixpunkt dieser Gleichung zu betrachten, ggf. dem Ursprung $(x, y)_F P = (0, 0)$, betrachten wir die Änderungen des DGL-Systems in Abhängigkeit von den ε .

Um herauszufinden, bei welchem ε_0 eine Bifurkation vorliegt, suchen wir nach den Parametern, welche keine "Ineinander-Überführung" von zwei Lösungen des DGL-Systems in beliebig naher Umgebung zulassen. D.h. wir wollen herausfinden unter welchen Bedingungen diese zwei Lösungen des DGL-Systems nicht linear-, stetig differenzierbar- oder topologisch-Konjugiert sind. Zur Veranschaulichung betrachten wir kurz die zugehörigen Phasenportraits:

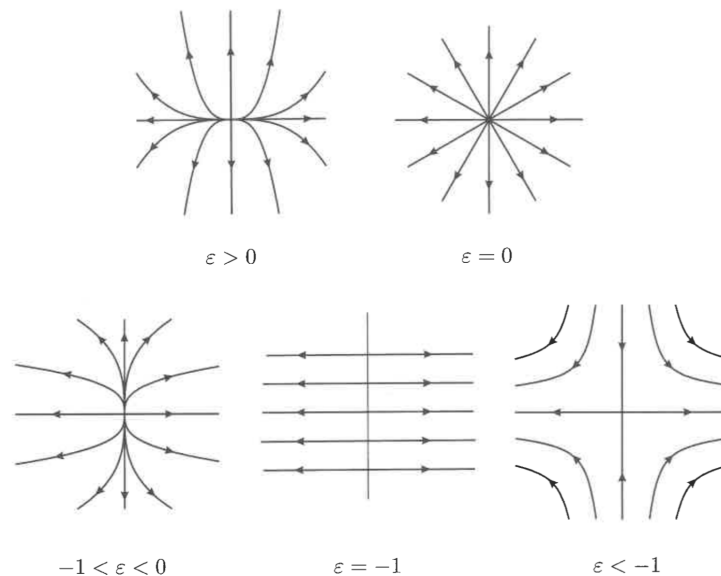


Abbildung 2: Phasenportraits zum ersten Beispiel

Es fällt auf, dass bei $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = -1$ eine qualitative Änderung der Phasenportraits zu beobachten ist. Zudem kann schon vorweggenommen werden, dass bei $\varepsilon = -1$ eine Bifurkation vorliegt, da dort das qualitative Verhalten der Lösung des DGL-Systems sich grundlegend von den anderen unterscheidet. Um genaue Aussagen über das Stabilitätsverhalten des Fixpunktes treffen zu können, betrachten wir das Spektrum und die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A .

Da A in Diagonalform vorliegt, sieht man sofort, dass $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = (1 + \varepsilon)$ die einzigen reellen ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) Eigenwerte sind und, dass die Eigenwerte von ε abhängen. Zudem stellt man schnell fest, dass für beliebige $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ die zugehörigen Jacobi-Matrizen niemals gleich werden können, da $(1 + \varepsilon_1) \neq (1 + \varepsilon_2)$ gilt, und somit auch keine Lösungen des DGL-Systems, abhängig von ε_1 und ε_2 beliebig nah aneinander, linear bzw. stetig differenzierbar konjugiert sind. Jedoch ist der Fixpunkt bei $\varepsilon_0 = 0$ immer noch hyperbolisch, da das neutrale Spektrum von A leer ist und $\sigma(A)$ sich in stabil und instabil zerlegen lässt.

Was $\varepsilon_0 = -1$ angeht, so ergeben sich folgende Eigenwerte zum zugehörigen DGL-System: $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 0$ und somit ist Matrix A nicht mehr hyperbolisch. Zudem wissen wir aber, dass für alle $\varepsilon \neq -1$ gilt, dass ein hyperbolischer Fixpunkt vorliegt. Des weiteren sind die Lösungen für alle $\varepsilon_{0/1} > -1$ topologisch konjugiert und für alle $\varepsilon_{0/1} < -1$ sind entsprechende Lösungen in unmittelbarer Nähe topologisch konjugiert. Letztendlich können aber zwei Lösungen für $\varepsilon_1 < -1$ und $\varepsilon_1 > -1$ nicht topologisch konjugiert sein, also liegt in $\varepsilon = -1$ eine Bifurkation vor.

4 Formale Definition

Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion, $f \in C^1$, und

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^k \quad (2)$$

4.1 Definition Bifurkation

In (2) ist keine **Bifurkation** in $\varepsilon = \varepsilon_0$ gegeben, wenn $\forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^k$ in beliebig naher Umgebung von ε_0 folgendes gegeben ist:

Ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion $\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \tau(t, x)$ streng monoton steigend in $x \in \mathbb{R}$, sodass

$$h(\varphi_t(x)) = \psi_{\tau(t,x)}(h(x)), \forall t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

wobei $\varphi_t(z), \psi_t(z) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen dieser linearen Anfangswertprobleme sind:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \varepsilon_0) \\ x(0) = z \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, \varepsilon_1) \\ x(0) = z \end{cases}$$

Alternativ 1 kann man sagen, dass eine Bifurkation in $\varepsilon = \varepsilon_0$ vorliegt, wenn in beliebig naher Umgebung von ε_0 ein ε_1 existiert, sodass die Lösungen der DGL-Systeme

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon_0) \text{ und } \dot{x} = f(x, \varepsilon_1)$$

nicht durch einen Homöomorphismus ineinander überführt werden können und dabei ihr qualitatives Verhalten behalten.

Alternativ 2 ist eine Bifurkation eine Änderung der Dynamik des DGL-Systems abhängig von einem oder mehreren Parametern. Dabei ist die qualitative Änderung dadurch charakterisiert, dass die Struktur des Verlaufs des Systems sich ändert indem Fixpunkte "vernichtet", "erschaffen" oder "umgekehrt" werden.

Alternativ 3 ist ein Anzeiger für eine Bifurkation in $\varepsilon = \varepsilon_0$, dass die Determinante der Jacobi-Matrix des DGL-Systems abgeleitet an den Koordinaten des Fixpunktes verschwindet: $\det(\frac{\partial f}{\partial x}) = 0$ und somit ein nicht-hyperbolischer Fixpunkt vorliegt.

5 Beispiel: Keine Bifurkation trotz nicht-hyperbolischem Fixpunkt

Wir betrachten folgendes lineares DGL-System:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 + \varepsilon^2)y \\ \dot{y} &= -(1 + \varepsilon^2)x, \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dies kann man auch wie folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (1 + \varepsilon^2) \\ -(1 + \varepsilon^2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Der Fixpunkt dieser Abbildung ist gegeben durch den Ursprung $(0,0)$ und zudem sind die periodischen Orbits dieses DGL-Systems definiert mit der skalierten Periode: $\frac{2\pi}{(1+\varepsilon^2)}$.

Bei der Betrachtung von A ergeben sich zudem imaginäre Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \pm \sqrt{-(1 + \varepsilon^2)}$. Um das qualitative Verhalten des einzigen Fixpunktes dieses DGL-Systems zu betrachten, ggf. der Ursprung $(x, y)_{FP} = (0, 0)$, überführen wir die Gleichung deshalb in Polarkoordinaten:

$$\begin{cases} \dot{r} = (\sqrt{x^2 + y^2}) = 0 \\ \dot{\theta} = (\arctan(\frac{y}{x})) = -(1 + \varepsilon^2) \end{cases}$$

Die gesuchte Transformation, welche das Vorhandensein einer Bifurkation ausschließt, ist dann gegeben durch:

$$\varphi_t(x) = \psi_{t \frac{1+\varepsilon_0^2}{1+\varepsilon_1^2}} = \psi_{\tau(t,x)}$$

wobei φ_t und ψ_t definiert sind wie oben und $h(x) = x$ sowie $\tau(x) = t \frac{1+\varepsilon_0^2}{1+\varepsilon_1^2}$. Die Funktion $\tau(x)$ beschreibt hierbei die Geschwindigkeit der Änderung der Zeit. Den gegebenen Homöomorphismus bekommt man durch Lösen des Polarkoordinaten-DGL-Systems und Einsetzen sowie Umformen der Ergebnisse in das Original-DGL-System.

6 Transkritische Bifurkation

Auf lateinisch bedeutet *trans* so viel wie "über, jenseits" und die Transkritische Bifurkation ist dadurch charakterisiert, dass bei dem einzigen Bifunktionspunkt des DGL-Systems $\varepsilon_0 = 0$ die Stabilitätseigenschaften

von zwei gegebenen Fixpunkten ausgetauscht werden bzw. ineinander übergehen.
Gegeben sei die nichtlineare DGL

$$\dot{x} = \varepsilon x - x^2 = x(\varepsilon - x)$$

Die einzigen Fixpunkte der DGL sind gegeben in den Fällen $x_{FP} = 0$ und $x_{FP} = \varepsilon$. Betrachten wir nun die qualitativen Eigenschaften dieser Fixpunkte gegeben verschiedener ε . Dazu linearisieren wir die DGL und betrachten die zugehörige einelementige Jakobimatrix $J = (-2x_{FP} + \varepsilon)$. Die Betrachtung der folgenden Phasenportraits verrät uns schon, dass der einzige Bifurkationspunkt bei $\varepsilon = 0$ vorliegt.

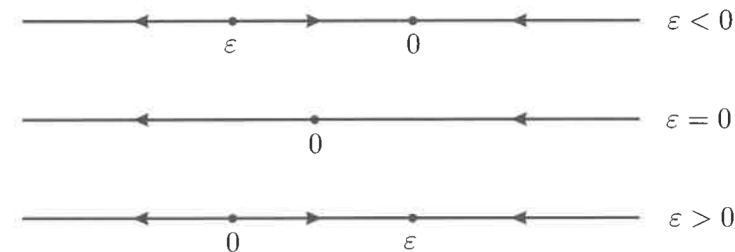


Abbildung 3: Phasenportraits zur Transkritischen Bifurkation

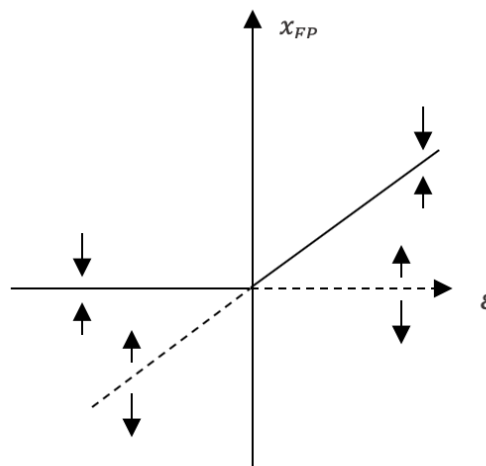
Sei $\varepsilon < 0$:

- und $x_{FP} = 0$, dann $J = (-2 * 0 + \varepsilon) = \varepsilon < 0$ mit ε einziger Eigenwert von J und da $\varepsilon \in \mathbb{R}$, sind alle Realteile der Jacobi-Matrix negativ und ein stabiler Knoten liegt vor
- und $x_{FP} = \varepsilon$, dann $J = (-2 * \varepsilon + \varepsilon) = -\varepsilon > 0$ und somit ist der Fixpunkt ein instabiler Sattelpunkt

Sei $\varepsilon > 0$, dann ist das Stabilitätsverhalten des Fixpunktes genau umgekehrt.

Sei $\varepsilon = 0$, dann ist die Jacobimatrix an der Stelle $x_{FP} = \varepsilon = 0$ gegeben durch $J = 0$ und da keine Eigenwerte mit Realteil $\neq 0$ existieren, liegt ein nicht-hyperbolischer Fixpunkt vor und somit ein Hinweis auf eine Bifurkation.

Betrachtet man die zugehörige Stabilitätsgraphik, so sieht man, dass der Fixpunkt beim Übergang durch $\varepsilon = 0$ sein Stabilitätsverhalten ändert, also können wir ziemlich sicher von einer Bifurkation ausgehen.



7 Sattelnoden Bifurkation

Charakteristisch für die Sattelnoden Bifurkation ist, dass ein Bifurkationspunkt in $\varepsilon_0 = 0$ existiert und zwei Fixpunkte vernichtet werden, sobald sie in diesem Punkt miteinander kollidieren.

Gegeben sei das nichtlineare DGL-System

$$\dot{x} = \varepsilon - x^2$$

Der Fixpunkt der Gleichung ist gegeben in Abhängigkeit von ε . Sei $\varepsilon > 0$, so gibt es zwei Fixpunkte $x_{FP1} = \sqrt{\varepsilon}$ und $x_{FP2} = -\sqrt{\varepsilon}$. Sei $\varepsilon = 0$, so ist der einzige Fixpunkt im Ursprung bei $x_{FP} = 0$. Sei $\varepsilon < 0$, so sieht man sofort, dass es keine Fixpunkte gibt. Zur Veranschaulichung dann folgende Phasenportraits:

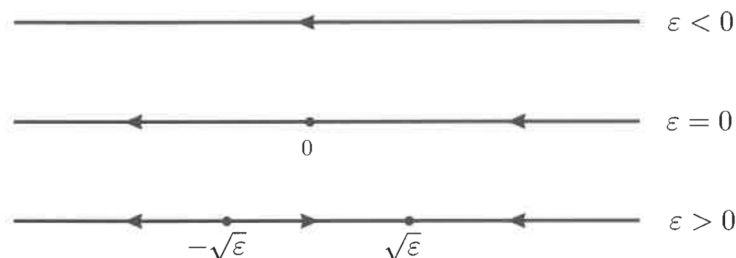
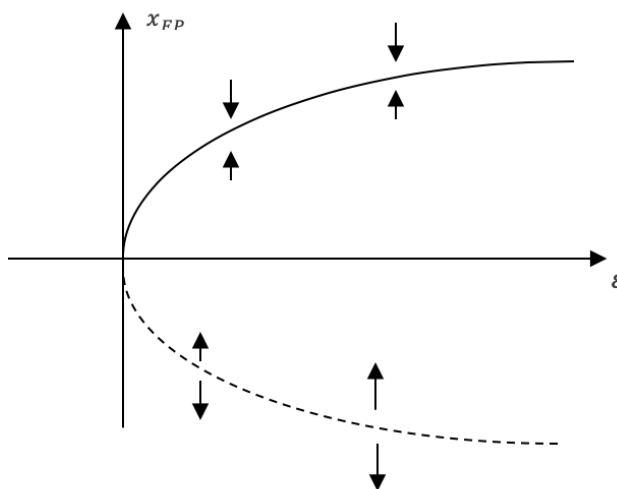


Abbildung 4: Phasenportraits zur Sattelpunkt Bifurkation

Sei also $\varepsilon = 0$, linearisierten DGL-Systems gegeben durch $J = (-2x_{FP}) = 0$. Auf Grund von fehlenden Eigenwerten mit Realteilen $\neq 0$ liegt hier ein nicht-hyperbolischer Fixpunkt und wahrscheinlich eine Bifurkation vor.

Sei wiederum $\varepsilon > 0$, dann gilt für $x_{FP1} = \sqrt{\varepsilon}$ gerade $J = -2\sqrt{\varepsilon} < 0$ und somit ein stabiler Knoten und für $x_{FP2} = -\sqrt{\varepsilon}$ ist $J = 2\sqrt{\varepsilon} > 0$ ein instabiler Sattelpunkt.

Folgende Stabilitätsgraphik veranschaulicht nochmal den vorliegenden Sachverhalt und unterstützt die Annahme, dass $\varepsilon_0 = 0$ ein Bifurkationspunkt ist.



8 Beispiel Sattelnoden im DGL-System 2.Ordnung

Betrachten wir jetzt noch kurz folgendes nichtlineares DGL-System 2.Ordnung

$$\dot{x} = \varepsilon - x^2$$

$$\dot{y} = y$$

Hierbei entspricht die erste Gleichung der DGL bei Betrachtung der Sattelnoden Bifurkation. Die Fixpunkte sind wieder variabel abhängig vom Vorzeichen von ε wobei y dabei stets bei $y = 0$ festgehalten werden kann.

Die Jacobimatrix des linearisierten DGL-Systems ist $J = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Es gilt für $\varepsilon > 0$, dass die zwei Fixpunkte des DGL-Systems bei $(x, y)_{FP} = (\sqrt{\varepsilon}, 0)$ und $(x, y)_{FP} = (-\sqrt{\varepsilon}, 0)$ liegen. Für $\varepsilon < 0$ existieren in diesem System keine Fixpunkte und der einzige Bifurkationspunkt ist wiederum $\varepsilon_0 = 0$. Denn dann hat die Jacobimatrix des linearisierten DGL-Systems einen Eigenwert mit verschwindendem Realteil und ein nicht-hyperbolischer Fixpunkt liegt vor.

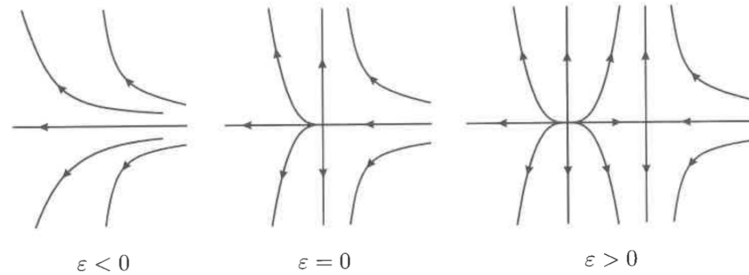


Abbildung 5: Phasenportraits zum Beispiel

Hier wird deutlich warum die Bifurkation im vorangehenden Beispiel als "Sattelknoten Bifurkation" bezeichnet wird, denn bei dem Übergang von $\varepsilon > 0$ zu $\varepsilon < 0$ verschwindet sowohl der instabile Sattelpunkt als auch der stabile Knoten, welcher in den Phasenportraits gut zu erkennen ist.

Hinweis: Im Phasenportrait zu $\varepsilon = 0$ kreuzt die einzige vertikale Linie die horizontale Linie im Ursprung 0 und im Phasenportrait zu $\varepsilon > 0$ kreuzen die zwei vertikalen Linien die horizontale Linie in $-\sqrt{\varepsilon}$ und $\sqrt{\varepsilon}$.

9 Beispiel Pitchfork Bifurkation

Das Wort "Pitchfork" kommt aus dem englischen und wird übersetzt als "Heugabel/Mistgabel" und die Wahl von dieser Bezeichnung wird ersichtlich, sobald man die Stabilitätsgraphik am Ende dieses Beispiels sieht. Die Pitchfork Bifurkation wird dadurch charakterisiert, dass der einzige Bifurkationspunkt in $\varepsilon_0 = 0$ liegt und beim Durchgang durch diesen zwei Dinge passieren: Erstens, das Stabilitätsverhalten des Fixpunktes ändert sich und zweitens, entstehen zwei neue Äste, also zwei neue Fixpunkte. Betrachten wir also folgende nichtlineare DGL

$$\dot{x} = \varepsilon x - x^3 = x(\varepsilon - x^2)$$

Die Fixpunkte dieser DGL sind wieder abhängig von dem Vorzeichen von ε . Wenn gilt: $\varepsilon \leq 0$, dann ist $x_{FP1} = 0$ der einzige Fixpunkt. Wenn aber $\varepsilon > 0$, so gibt es zwei weitere Fixpunkte $x_{FP2} = \sqrt{\varepsilon}$ und $x_{FP3} = -\sqrt{\varepsilon}$. Die zugehörigen Phasenportraits zeigen veranschaulichen, dass bei $\varepsilon_0 = 0$ eine Bifurkation vorliegen muss.

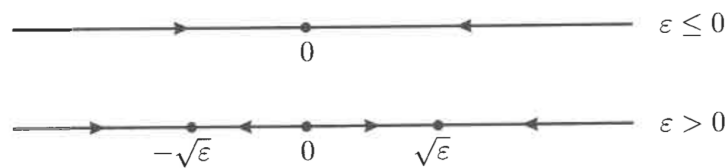


Abbildung 6: Phasenportraits zum Beispiel

Betrachten wir nun die einelementige Jacobimatrix des linearisierten DGL-Systems: $J = (\varepsilon - 3x_{FP}^2)$. Sei $\varepsilon > 0$

- und $x_{FP} = 0$, dann $J = \varepsilon > 0$ und ein instabiler Fixpunkt liegt vor
- und $x_{FP} = \sqrt{\varepsilon}$, dann $J = -2\varepsilon < 0$ und ein stabiler Knoten liegt vor
- und $x_{FP} = -\sqrt{\varepsilon}$, dann $J = -2\varepsilon < 0$ und ein weiterer stabiler Knoten liegt vor

Sei wiederum $\varepsilon < 0$, dann ist an der Stelle $x_{FP} = 0$ die Jacobi-Matrix $J = \varepsilon < 0$ ein stabiler Knoten gegeben. Im Falle $\varepsilon = 0$ und $x_{FP} = 0$ ist $J = 0$ und wir haben unsere Bifurkation. Die Heugabel lässt sich nun in der folgenden Stabilitätsgraphik unschwer erkennen:

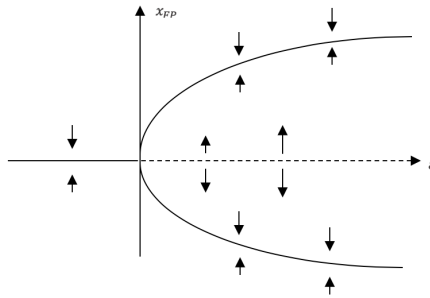


Abbildung 7: Die "Heugabel"

10 Beispiel Hopf-Bifurkation

Dieses letzte Beispiel einer Bifurkation unterscheidet sich in einigen Punkten grundlegend von den vorherigen. Erstens, wurde diese Verzweigung nach dem deutschamerikanischen Mathematiker E.F.F. Hopf benannt und nicht nach dem Muster der Stabilitätsgraphik/des Phasenportraits; zweitens, bekommen wir nun erstmals komplexen Eigenwerte; drittens, liegt jetzt nicht einfach ein weiterer "Eigenwert-Null-Fall" (*und somit ein nicht-hyperbolische Fixpunkt*) vor und viertens, wird das DGL-System komplexer:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varepsilon x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= \varepsilon y + x - y(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

Man kann direkt sehen, dass der einzige Fixpunkt hier bei $(x, y)_{FP} = (0, 0)$ vorliegt. Betrachtet man nun wie gewohnt die Jakobimatrix des linearisierten DGL-Systems $J = \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$, so ergeben sich Eigenwerte mit einer komplexen Komponente ($\lambda_{1/2} = \varepsilon \pm \sqrt{-1} = \varepsilon \pm i$). Zur Veranschaulichung erstmal das Phasenportrait:

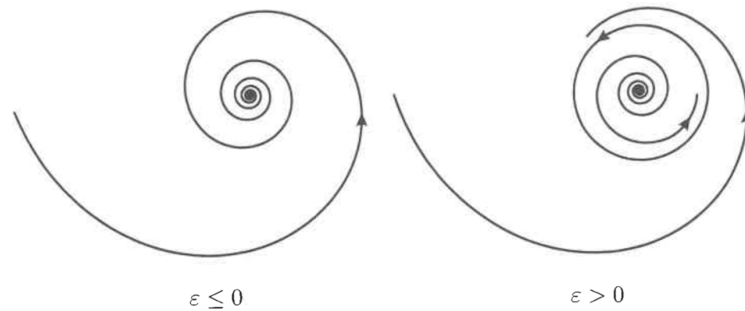


Abbildung 8: Phasenportraits zur Hopf-Bifurkation Standard

Wie bis jetzt immer, gilt für $\text{Re}(\lambda_{1/2}) = \varepsilon > 0$ bzw. < 0 ist der Fixpunkt des Systems instabil bzw. stabil. Im Falle $\varepsilon = 0$ wechselt der Fixpunkt sein Stabilitätsverhalten. Doch um herauszufinden, wie genau sich das DGL-System in Abhängigkeit vom Kontrollparameter verhält, wenn $t \rightarrow \infty$, betrachten wir die zugehörigen Polarkoordinaten:

Aus $x = r \cos(\theta)$ und $y = r \sin(\theta)$ ergibt sich das LGS:

$$\begin{aligned}(I) \quad & -\dot{r} \cos(\theta) + r \dot{\theta} \sin(\theta) - r \sin(\theta) + r(\varepsilon - r^2) \cos(\theta) = 0 \\ (II) \quad & -\dot{r} \sin(\theta) - r \dot{\theta} \cos(\theta) + r \cos(\theta) + r(\varepsilon - r^2) \sin(\theta) = 0\end{aligned}$$

Und wenn man das LGS auflöst mit $I \times \cos(\theta) + II \times \sin(\theta)$ und $I \times -\sin(\theta) + II \times \cos(\theta)$. Dann ergeben sich folgende Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \varepsilon r - r^3 \\ \dot{\theta} &= 1\end{aligned}$$

Die erste Zeile der Gleichung stimmt überein mit dem Pitchfork-Beispiel, sodass wir dort die gleichen Fixpunkte beobachten können, d.h. in $r_{FP} = 0, \forall \varepsilon$, und $r_{FP} = \sqrt{\varepsilon}, \forall \varepsilon > 0$. Zudem gilt $r \geq 0$ und deshalb ist

$r_{FP} = -\sqrt{\varepsilon}$ ausgeschlossen.

Da $\dot{\theta}$ konstant, ergibt sich folgende Jacobi-Matrix des linearisierten Systems: $J = \begin{pmatrix} -3r_{FP}^2 + \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

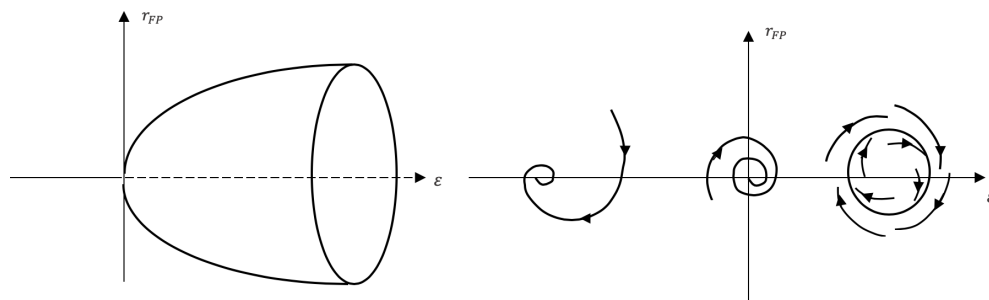
und wir betrachten nun das Stabilitätsverhalten der Fixpunkte in Abhängigkeit von ε und r .

Sei $r_{FP} = 0$, dann ist $J = \varepsilon$ und somit ist der Fixpunkt stabil falls $\varepsilon < 0$, instabil falls $\varepsilon > 0$ und sein Stabilitätsverhalten wechselt im Falle $\varepsilon = 0$.

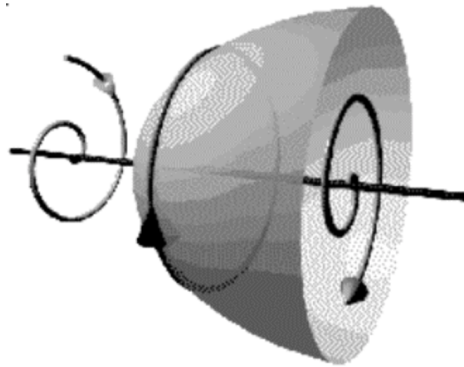
Sei nun $r_{FP} = \sqrt{\varepsilon}$ und $\varepsilon > 0$, dann ist $J = -2\varepsilon < 0$ und da r ein Polarkoordinatenpunkt ist, erhalten wir stabile Kreisbahnlinien. Wir betrachten nun einen *Grenzzzyklus*, also einen periodischen Orbit, dessen Amplitude mit $\sqrt{\varepsilon}$ wächst. Es gilt

- $r < \sqrt{\varepsilon}$ ist im Zyklus und $\dot{r} = \varepsilon r - r^3 > 0$, somit beobachten wir Trajektorien, welche dem Rand des Grenzzzyklus entgegenlaufen
- $r = \sqrt{\varepsilon}$ in der geschlossenen Kurve des Zyklus und $\dot{r} = 0$
- $r > \sqrt{\varepsilon}$ außerhalb des Zyklus und $\dot{r} < 0$, somit laufen die Trajektorien zum Grenzzzyklus hin

Genauer ist das dann in diesen Graphiken zu erkennen:



Hier in der rechten Graphik zu, dass in der linken Spirale die Zeit langsamer fließt als in der mittigen Spirale



Zusammenfassend die Abhängigkeit des DGL-Systems vom Kontrollparameter ε :

- für $\varepsilon < 0$ streben die Trajektorien zum einzigen stabilen Fixpunkt $r_{FP} = 0$
- für $\varepsilon > 0$ streben die Trajektorien von dem instabilen Fixpunkt $r_{FP} = 0$ weg (hin zum $\sqrt{\varepsilon}$ -Grenzzzyklus, also zum zweiten Fixpunkt $r_{FP} = \sqrt{\varepsilon}$)
- für $\varepsilon = 0$ wechselt das Stabilitätsverhalten des Fixpunktes und der Grenzzzyklus wird erschaffen

Das DGL-System hängt somit ab einem bestimmten ε^* von dem Kontrollparameter ab.

11 Literaturverzeichnis und Quellen

1. Einleitung:

- "Bifurkation (Mathematik)", [https://de.wikipedia.org/wiki/Bifurkation_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Bifurkation_(Mathematik)), 03.03.19
- S.264-265, "Die Erforschung des Chaos", J. Argyris, G.Faust, M.Haase
- "alexanderrack.eu/bifurkation",
<http://www.alexanderrack.eu/bifurkation/3.DreiFragenzurBifurkation.html>, 10.03.19

2. Grundlagen

- "Dynamische Systeme", FS 18 Skript, M.Schmidt
- S.54-55, "Die Erforschung des Chaos", J. Argyris, G.Faust, M.Haase
- S.87-94, "Ordinary Differential Equations", L.Barreira, C.Valls

3. Definition

- S.203, "Ordinary Differential Equations", L.Barreira, C.Valls
- "alexanderrack.eu/bifurkation",
<http://www.alexanderrack.eu/bifurkation/3.DreiFragenzurBifurkation.html>, 10.03.19

4. Beispiele

- S.265-274, "Die Erforschung des Chaos", J. Argyris, G.Faust, M.Haase
- S.201-206, "Ordinary Differential Equations", L.Barreira, C.Valls
- "alexanderrack.eu/inhalt", <http://www.alexanderrack.eu/bifurkation/inhalt.html>, 12.03.19

5. Abbildungen

- Abbildung 2-7: S.201-206, "Ordinary Differential Equations", L.Barreira, C.Valls
- "Hopf in 3D", "alexanderrack.eu/bifurkation/7.Hopf", <http://www.alexanderrack.eu/bifurkation/7.Hopf.html>, 20.03.19