

# Kapitel 7

## Differenzierbare Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$$

### 7.1 Definition der Ableitung

**Definition 7.1.** Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  eine Funktion auf einer Teilmenge  $X$  von  $\mathbb{R}$  (bzw.  $\mathbb{C}$ ), die eine Umgebung von  $x_0 \in X$  ist. Dann heißt  $f$  im Punkt  $x_0$  (komplex) differenzierbar, wenn es ein  $f'(x_0) \in \mathbb{K}$  gibt, so dass die folgende Funktion stetig in  $x_0$  ist:

$$X \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{für } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{für } x = x_0 \end{cases}.$$

Wenn  $X$  offen und  $f$  in allen  $x \in X$  differenzierbar ist, heißt  $f$  differenzierbar und die Funktion  $f' : X \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $x \mapsto f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$  heißt Ableitung von  $f$ .

**Satz 7.2.** Sei  $f$  im Punkt  $x_0$  differenzierbar, dann ist  $f$  im Punkt  $x_0$  auch stetig.

**Beweis:**

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Also folgt die Aussage aus den Rechenregeln für Folgen und daraus, dass  $x \mapsto (x - x_0)$  stetig ist. Hierbei benutzen wir das Kriterium (iii) aus Satz 5.14 **q.e.d.**

**Definition 7.3.** Das Differential von  $f$  im Punkt  $x_0$  ist die lineare Abbildung  $df(x_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $h \mapsto f'(x_0)h$ . Die Gerade  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)\}$  heißt für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$ . Dabei ist

$$\text{Graph}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}.$$

Die Sekante durch zwei Punkte  $(x_0, f(x_0)) \neq (x_1, f(x_1))$  des Graphen ist gegeben durch

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}(f(x_1) - f(x_0))\}.$$

Im Grenzwert  $x_1 \rightarrow x_0$  nähert sich die Sekante durch die Punkte  $(x_0, f(x_0))$  und  $(x_1, f(x_1))$  an die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  an.

**Beispiel 7.4.** (i)  $f(x) = |x|$ . Für  $x_0 = 0$  ist  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$  Also

ist  $f$  im Punkt  $x_0 = 0$  stetig aber nicht differenzierbar.

(ii)  $f(x) = c \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$  für alle  $x \neq x_0$ . Also ist  $f$  differenzierbar mit  $f'(x) = 0$ .

(iii)  $f(x) = x \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$  für alle  $x \neq x_0$ . Also ist  $f$  differenzierbar mit  $f'(x) = 1$ .

(iv)  $f(x) = x^n$  für  $n \in \mathbb{N}$ .  $\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \dots + x_0^{n-1}$  für alle  $x \neq x_0$ . Also ist  $f$  differenzierbar mit  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

(v) Sei  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihenfunktion mit Konvergenzradius  $R > 0$ . Dann ist  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n$  auch ein Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R$  und wegen Satz 4.27 (iv) stetig. Deshalb ist  $f$  in  $x = 0$  differenzierbar mit  $f'(0) = a_1$ . Aus Satz 4.28 (ii) folgt, dass  $f$  für alle  $x \in B(0, R)$  in  $x$  differenzierbar und die Ableitung  $f'(x)$  gegeben ist durch die Potenzreihe  $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  mit Konvergenzradius  $R$ .

(vi)

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x).$$

(vii)

$$\sin'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1) x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x).$$

(viii)

$$\cos'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k x^{2k-1}}{(2k)!} = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l x^{2l+1}}{(2l+1)!} = -\sin(x).$$

## 7.2 Rechenregeln der Ableitung

**Satz 7.5.** Seien  $f, g : X \rightarrow \mathbb{K}$  in  $x_0$  differenzierbar und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dann sind auch die Funktionen  $\lambda f$ ,  $f + g$  und  $f \cdot g$  in  $x_0$  differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} (\lambda f)'(x_0) &= \lambda f'(x_0) & (f + g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) \\ (f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) & & \text{(Leibnizregel).} \end{aligned}$$

Wenn  $f(x_0) \neq 0$  dann ist  $X' = f^{-1}[\mathbb{K} \setminus \{0\}]$  wegen Satz 7.2 eine Umgebung von  $x_0$  und  $\frac{1}{f} : X' \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$  in  $x_0$  differenzierbar mit  $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$ .

**Beweis:** Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\lambda f(x) - \lambda f(x_0)}{x - x_0} &= \lambda \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} && \text{und} \\ \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x_0 - x_0} && \text{und} \\ \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0) && \text{und} \\ \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right) \frac{1}{x - x_0} &= -\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x)f(x_0)(x - x_0)}. \end{aligned}$$

Also folgt die Aussage aus Beispiel 5.19 und Satz 7.2.

**q.e.d.**

**Satz 7.6** (Kettenregel). Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow \mathbb{K}$  Funktionen und  $X \subset \mathbb{R}$  eine Umgebung von  $x_0$  und  $Y \subset \mathbb{R}$  eine Umgebung von  $f(x_0)$ . Wenn  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist und  $g$  in  $f(x_0)$ , dann ist  $g \circ f$  in  $x_0$  differenzierbar mit

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

**Beweis:**  $\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , wobei wir den linken Faktor für  $f(x) = f(x_0) = y_0$  durch  $g'(y_0)$  ersetzen. Dieser linke Faktor ist die Komposition von  $x \mapsto f(x)$  mit  $y \mapsto \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$  für  $y \neq y_0$  und  $y_0 \rightarrow g'(y_0)$ , also wegen Satz 5.16 und Satz 7.2 in  $x_0$  stetig. Also folgt die Behauptung aus Beispiel 5.19. **q.e.d.**

**Satz 7.7** (Ableitung der Umkehrfunktion). Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine bijektive Funktion von einer Umgebung  $X \subset \mathbb{R}$  von  $x_0$  auf eine Umgebung  $Y \subset \mathbb{R}$  von  $y_0 = f(x_0)$ . Wenn  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist mit  $f'(x_0) \neq 0$  und entweder  $f$  auf einer Umgebung von  $x_0$  oder  $f^{-1}$  in  $y_0$  stetig ist, dann ist auch  $f^{-1}$  in  $y_0$  differenzierbar mit  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ .

**Beweis:**  $\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$  für  $y = f(x)$  und  $y_0 = f(x_0)$ . Die erste der beiden folgenden Funktionen ist die Komposition von  $y \rightarrow f^{-1}(y)$  mit der zweiten

$$y \mapsto \begin{cases} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} & \text{für } y \neq y_0 \\ \frac{1}{f'(x_0)} & \text{für } y = y_0 \end{cases} \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} & \text{für } x \neq x_0 \Leftrightarrow f(x) \neq f(x_0) \\ \frac{1}{f'(x_0)} & \text{für } x = x_0 \end{cases}.$$

Der Satz folgt aus Korollar 5.16, Beispiel 5.19 (iii) und Korollar 6.5.

**q.e.d.**

**Beispiel 7.8. (i)**  $\ln \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x)$

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{x} \text{ mit } \exp(y) = x.$$

**(ii)**  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad x \mapsto \arcsin(x)$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ mit } \sin(y) = x \text{ und } x^2 \neq 1.$$

**(iii)**  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \quad x \mapsto \arccos(x)$

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(y)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ mit } \cos(y) = x \text{ und } x^2 \neq 1.$$

**(iv)**  $\cdot^\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}.$

$$(\cdot^\alpha)'(x) = \exp(\alpha \ln(x))' = \exp(\alpha \ln(x)) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

**(v)**  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto a^x, a \in \mathbb{R}^+.$

$$(a)'(x) = \exp(x \cdot \ln(a))' = \exp(x \ln(a)) \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x.$$

**(vi) Quotientenregel.** Seien  $f$  und  $g$  in  $x_0$  differenzierbar und  $g(x_0) \neq 0$ . Dann ist  $\frac{f}{g}$  in  $x_0$  differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)}{g^2(x_0)} g'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

**(vii)**  $x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x) \cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

**(viii)**  $x \mapsto \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

$$\cot'(x) = \frac{-\sin(x) \sin(x) - \cos(x) \cos(x)}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}.$$

(ix)  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x \mapsto \arctan(x)$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2} \text{ mit } \tan(y) = x.$$

(x)  $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi), \quad x \mapsto \operatorname{arccot}(x)$

$$\operatorname{arccot}'(x) = \frac{-1}{1 + \cot^2(y)} = \frac{-1}{1 + x^2} \text{ mit } \cot(y) = x.$$

(xi)  $\log_a \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x) \quad \log_a'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{x \ln(a)}.$

(xii)  $x^x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto x^x$

$$(x^x)' = \exp(x \cdot \ln(x))' = \exp(x \cdot \ln(x)) \left( \ln(x) + x \frac{1}{x} \right) = (\ln(x) + 1) \cdot x^x.$$

(xiii)  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0 \pm} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0 \pm} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 & \text{für } x = 0 \\ 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist zwar differenzierbar, aber  $f'$  ist im Punkt  $x = 0$  nicht stetig.

## 7.3 Mittelwertsatz und Monotonie

**Definition 7.9** (lokale Maxima und Minima). *Eine reelle Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$  hat bei  $x_0 \in (a, b)$  ein lokales Maximum bzw. Minimum, falls es ein  $\epsilon > 0$  gibt, so dass  $f(x) \leq f(x_0)$  bzw.  $f(x) \geq f(x_0)$  für alle  $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$  gilt.*

Wenn für eine bei  $x_0$  differenzierbaren Funktion  $f'(x_0)$  nicht verschwindet, dann gibt es ein  $\epsilon > 0$ , so dass  $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < |f'(x_0)|$  für alle  $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$  gilt. Dort hat  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  das gleiche Vorzeichen wie  $f'(x_0)$ . Dann gilt entweder  $f(x) < f(x_0)$  für  $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$  und  $f(x) > f(x_0)$  für  $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$  oder  $f(x) > f(x_0)$  für  $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$  und  $f(x) < f(x_0)$  für  $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$ . Eine differenzierbare Funktion kann also nur an den Nullstellen der Ableitung lokale Extremwerte besitzen.

**Definition 7.10** (kritischer Punkt und kritischer Wert). *Eine Nullstelle der Ableitung einer differenzierbaren Funktion heißt kritischer Punkt. Der entsprechende Funktionswert heißt kritischer Wert.*

Kandidaten für die Minima und Maxima einer stetigen Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sind

- (i) Kritische Punkte in  $(a, b)$ ,
- (ii) Randpunkte, also entweder  $a$  oder  $b$ ,
- (iii) und Punkte in  $(a, b)$  an denen  $f$  nicht differenzierbar ist.

**Satz 7.11** (Satz von Rolle). *Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Falls  $f(a) = f(b)$ , dann existiert ein  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f'(x_0) = 0$ .*

**Beweis:** Wegen Korollar 5.17 gibt es  $x_1, x_2 \in [a, b]$  mit  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$  für alle  $x \in [a, b]$ . Wenn  $x_1$  und  $x_2$  beide am Rand liegen  $x_1, x_2 \in \{a, b\}$  dann muss  $f$  konstant gleich  $f(a) = f(b)$  sein. Also gilt dann  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Andernfalls muss es einen lokalen Extremwert in  $(a, b)$  geben, an dem die Ableitung verschwindet. **q.e.d.**

**Satz 7.12** (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). *Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Dann existiert ein  $x_0 \in (a, b)$  mit*

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0) \quad \text{für } g(b) \neq g(a), g'(x_0) \neq 0 \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Die Tangente an  $\{(f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b]\}$  in  $(f(x_0), g(x_0))$  verläuft also parallel zu der Verbindungsgeraden der Endpunkte  $(f(a), g(a))$  und  $(f(b), g(b))$ .

**Beweis:**  $x \mapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$  erfüllt die Voraussetzungen von Satz 7.11. Die Ableitung ist Null für  $(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0)$ . **q.e.d.**

**Satz 7.13** (Mittelwertsatz). *Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x)$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Dann existiert ein  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .*

**Beweis:** Wende den verallgemeinerten Mittelwertsatz auf  $f$  und  $\mathbb{1}_{[a, b]}$  an. **q.e.d.**

**Satz 7.14** (Schränkensatz). *Eine auf  $(a, b)$  differenzierbare stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann Lipschitzstetig, wenn die Lipschitzkonst.  $L \geq |f'(x)|$  für alle  $x \in (a, b)$ .*

**Beweis:** Für  $x < y \in [a, b]$  gibt es wegen dem Mittelwertsatz ein  $x_0 \in (x, y)$  mit  $f(y) - f(x) = f'(x_0)(y - x)$ . Dann folgt  $|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$  aus  $|f'(x_0)| \leq L$ . Umgekehrt folgt  $|f'(x)| = \lim_{y \rightarrow x} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq L$  aus  $|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$ . **q.e.d.**

**Satz 7.15** (Ableitung und Monotonie). *Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Dann gilt*

- (i)  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in (a, b) \iff f$  ist konstant.
- (ii)  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in (a, b) \iff f$  ist monoton steigend.
- (iii)  $f'(x) \leq 0$  für alle  $x \in (a, b) \iff f$  ist monoton fallend.

(iv)  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in (a, b)$  und der Abschluss der Menge  $\{x \in (a, b) \mid f'(x) > 0\}$  ist  $[a, b] \iff f$  ist streng monoton steigend.

(v)  $f'(x) \leq 0$  für alle  $x \in (a, b)$  und der Abschluss der Menge  $\{x \in (a, b) \mid f'(x) < 0\}$  ist  $[a, b] \iff f$  ist streng monoton fallend.

**Beweis:** Weil eine Funktion genau dann konstant ist, wenn sie monoton steigend und monoton fallend ist, folgt (i) aus (ii) und (iii). Wir beweisen nur (ii) und (iv). Für  $a \leq x < y \leq b$  erfüllt  $f : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$  die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Aus  $f'(x_0) \geq 0$  für alle  $x_0 \in (a, b)$  folgt  $f(y) - f(x) \geq 0$ , und  $f$  ist monoton wachsend. Umgekehrt folgt  $f(x_0) > f(x)$  für ein  $x > x_0$  aus  $f'(x_0) < 0$  und  $f$  ist nicht monoton steigend. Es folgt (ii). Monoton wachsende  $f$  sind genau dann streng monoton, wenn es kein  $a \leq x < y \leq b$  gibt mit  $f(x) = f(y)$ . Auf  $[x, y]$  ist dann  $f$  konstant und  $f'(z) = 0$  für  $z \in (x, y)$ . Weil jede offene Menge ein solches Intervall enthält folgt (iv). **q.e.d.**

**Korollar 7.16** (Isolierte kritische Punkte). Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $x_0 \in (a, b)$  ein kritischer Punkt.

(i) Sei  $f'$  bei  $x_0$  differenzierbar und  $f''(x_0) > 0$ . Dann ist  $x_0$  ein lokales Minimum.

(ii) Sei  $f'$  bei  $x_0$  differenzierbar und  $f''(x_0) < 0$ . Dann ist  $x_0$  ein lokales Maximum.

(iii) Wenn es ein  $\epsilon > 0$  gibt, so dass  $f'(x) \leq 0$  für  $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$  und  $f'(x) \geq 0$  für  $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$  gilt, dann ist  $x_0$  ein lokales Minimum.

(iv) Wenn es ein  $\epsilon > 0$  gibt, so dass  $f'(x) \geq 0$  für  $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$  und  $f'(x) \leq 0$  für  $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$  gilt, dann ist  $x_0$  ein lokales Maximum. **q.e.d.**

**Beispiel 7.17.** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto (x + 1)e^{-x}$  hat die Ableitung  $f'(x) = (1 - (x + 1))e^{-x} = -xe^{-x}$ . Also ist sie auf  $(-\infty, 0]$  streng monoton wachsend und auf  $[0, \infty)$  streng monoton fallend. Insbesondere ist  $f(0) = 1$  ein globales Maximum. Also gilt  $x + 1 \leq e^x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $y \leq e^{y-1}$  für alle  $y = x + 1 \in \mathbb{R}$ .

## 7.4 Regel von de L'Hopital

**Definition 7.18** (Grenzwerte von Funktionswerten). Für eine Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{K}$  existiert der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$  genau dann, wenn für ein  $f(a) \in \mathbb{K}$  die Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in (a, b) \\ f(a) & \text{für } x = a \end{cases} \quad \text{stetig bei } x = a \text{ ist. Wir schreiben dann } \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a).$$

Der analoge Grenzwert  $x \rightarrow b$  wird mit  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$  bezeichnet. Aufgrund der Definition der Stetigkeit existiert der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$  also genau dann, wenn es ein  $f(a) \in \mathbb{K}$  und für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, mit dem  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$  aus

$|x - a| < \delta$  folgt. Wegen Satz 5.14 ist das äquivalent dazu, dass für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $(a, b)$ , die gegen  $a$  konvergiert, die Folge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $f(a)$  konvergiert.

**Satz 7.19** (1. Regel von de L'Hopital). *Seien  $\infty < a < b < \infty$  und  $f$  und  $g$  auf  $(a, b)$  differenzierbare Funktionen mit  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$ . Wenn der Grenzwert*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existiert, dann existiert auch } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ und es gilt } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Bemerkung 7.20.** *Wenn die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow a^+} g'(x)$  existieren und der*

*zweite nicht verschwindet, dann existiert auch  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$  mit  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow a^+} g'(x)}$ .*

**Beweis:** Wenn der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert, ist  $g'(x) \neq 0$  für  $x \in (a, b')$  mit  $a < b' \leq b$ . Aus dem Mittelwertsatz folgt  $g(x) = g(x) - g(a) \neq 0$  für  $x \in (a, b')$ . Die auf  $[a, b')$  stetig fortgesetzten Funktionen  $f$  und  $g$  erfüllen die Voraussetzungen des Verallgemeinerten Mittelwertsatzes. Deshalb gibt es für jedes  $x \in (a, b')$  ein  $x_0 \in (a, x)$  so dass  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$  gilt. Wenn also der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert, dann existiert auch der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . **q.e.d.**

**Satz 7.21** (2. Regel von de L'Hopital). *Unter derselben Voraussetzung wie bei der 1.Regel von de L'Hopital, nur gelte  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$  statt  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ , gilt dieselbe Schlussfolgerung.*

**Beweis\*:** Wenn  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert, gibt es  $b' \in (a, b)$  mit  $g'(x) \neq 0$  für  $x \in (a, b')$ . Für  $a < x < y < b'$  folgt  $g(y) \neq g(x)$  aus dem Mittelwertsatz, und wegen dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gibt es  $x_0 \in (x, y)$  mit  $\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ . Wenn  $f$  und  $g$  die Voraussetzungen der 2. Regel von de L'Hopital erfüllen, dann gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $y \in (a, b')$ , so dass es für alle  $x_0 \in (a, y)$  gilt  $|\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$  mit  $\alpha = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Dann folgt  $\alpha - \frac{\epsilon}{2} < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < \alpha + \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $x \in (a, y)$ . Wegen  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$  gibt es ein  $y_0 \in (a, y)$  so dass für alle  $x \in (a, y_0)$  gilt  $g(x) > \max\{g(y), 0\}$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right) (g(x) - g(y)) + f(y) &< f(x) < \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right) (g(x) - g(y)) + f(y) \quad \text{oder} \\ \left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{f(y) - g(y) \left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right)}{g(x)} &< \frac{f(x)}{g(x)} < \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{f(y) - g(y) \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Wegen  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$  gibt es dann auch ein  $y_1 \in (a, y_0)$ , so dass für alle  $x \in (a, y_1)$  gilt  $\alpha - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha + \epsilon$ . Also gilt  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . **q.e.d.**

Die analogen Aussagen für die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow b^-}$  gelten natürlich auch. Grenzwerte der Form  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  definieren wir als die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(1/x)$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(1/x)$ . Wegen der Kettenregel gilt dann

$$\frac{df\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} \left(\frac{dg\left(\frac{1}{x}\right)}{dx}\right)^{-1} = \frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{-1}{x^2} g'\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1} = f'\left(\frac{1}{x}\right) / g'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Deshalb gelten die analogen Aussagen auch für diese Grenzwerte.

## 7.5 Konvexität und Ableitungen

**Definition 7.22.** Eine reelle Funktion auf einem Intervall heißt konvex bzw. streng konvex, wenn für alle  $a \neq b$  im Definitionsbereich und alle  $t \in (0, 1)$  folgendes gilt

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b) \quad \text{bzw.} \quad f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b).$$

**Satz 7.23.** Für eine reelle Funktion  $f$  auf einem Intervall  $I$  ist folgendes äquivalent:

(i)  $f$  ist konvex

(ii) Für  $[a, b] \subset I$  und  $x \in (a, b)$  gilt 
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(iii) Für  $[a, b] \subset I$  und  $x \in (a, b)$  gilt 
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

(iv) Für  $[a, b] \subset I$  und  $x \in (a, b)$  gilt 
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Die analogen Äquivalenzen zu streng konvex gelten, wenn  $\leq$  durch  $<$  ersetzt wird.

**Beweis:** Wir können wegen der Symmetrie  $(a, b, t) \leftrightarrow (b, a, 1-t)$  in (i)  $a < b$  annehmen. Dann sei  $x = (1-t)a + tb \in (a, b) \Leftrightarrow t = \frac{x-a}{b-a} \in (0, 1)$ . Also ist (i) äquivalent zu

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \quad \Leftrightarrow \quad (b-a)f(x) \leq (b-x)f(a) + (x-a)f(b).$$

Ersetzen wir entweder  $(b-x) = (b-a) - (x-a)$ , oder  $(x-a) = (b-a) - (b-x)$  oder  $(b-a) = (b-x) + (x-a)$ , dann ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned} (b-a)(f(x) - f(a)) &\leq (x-a)(f(b) - f(a)) && \Leftrightarrow && \text{(ii)} \\ (b-a)(f(x) - f(b)) &\leq (b-x)(f(a) - f(b)) && \Leftrightarrow && \text{(iii)} \\ (b-x)(f(x) - f(a)) &\leq (x-a)(f(b) - f(x)) && \Leftrightarrow && \text{(iv)}. \end{aligned}$$

Die analogen Aussagen für streng konvex lassen sich genauso beweisen, wenn wir alle Ungleichungen  $\leq$  durch  $<$  ersetzen. **q.e.d.**

**Korollar 7.24.** Für eine stetige reelle Funktion auf einem Intervall  $I$ , die im Inneren von  $I$  differenzierbar ist, ist folgendes äquivalent:

(i)  $f$  ist (streng) konvex

(ii)  $f'$  ist (streng) monoton wachsend

**Beweis:** (i) $\Rightarrow$ (ii): Seien  $a < x < b$  Punkte im Inneren von  $I$ . Die Grenzwerte  $x \rightarrow a+$  in (ii) und  $x \rightarrow b-$  in (iii) aus Satz 7.23 zeigen  $f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$  und damit (ii). (ii) $\Rightarrow$ (i): Für  $[a, b] \subset I$  und  $x \in (a, b)$  gibt es wegen dem Mittelwertsatz  $y \in (a, x)$  und  $z \in (x, b)$  mit  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(y) \leq f'(z) = \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$ . Aus Satz 7.23 (iv) folgt (i). **q.e.d.**

**Korollar 7.25.** Für eine stetige reelle Funktion auf einem Intervall, die im Inneren zweimal differenzierbar ist, ist folgendes äquivalent

(i)  $f$  ist (streng) konvex.

(ii)  $f''(x) \geq 0$  im Inneren des Intervalls (und der Abschluss der Menge  $\{x \mid f''(x) > 0\}$  ist das ganze Intervall).

Dieses Korollar folgt sofort aus Korollar 7.24 und Satz 7.15. **q.e.d.**

Wenn wir die Ungleichungen zwischen den Funktionswerten alle umdrehen, so erhalten wir die analogen Aussagen für konkave Funktionen. Also ist eine Funktion  $f$  genau dann (streng) konkav, wenn die negative Funktion  $-f$  (streng) konvex ist.

**Übungsaufgabe 7.26.** Zeige, dass die Umkehrfunktion einer (streng) konvexen bijektiven (streng) monoton wachsenden Funktion (streng) konkav ist.

**Beispiel 7.27.** (i)  $f(x) = x^2 \implies f'' = 2$ . Also ist  $f$  streng konvex.

(ii)  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ,  $x \mapsto \sqrt{x} \implies f'' = \frac{-1}{4x^{3/2}}$ . Also ist  $f$  streng konkav.

(iii)  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $x \mapsto \exp(x) \implies \exp'' = \exp$ . Also ist  $\exp$  streng konvex.

(iv)  $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \ln(x) \implies \ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$ . Also ist  $\ln$  streng konkav.

## 7.6 Konvexität und Ungleichungen

**Satz 7.28** (Ungleichung von Jensen)\*: Sei  $f$  eine reelle konvexe Funktion auf einem Intervall. Seien  $x_1, \dots, x_n$  im Definitionsbereich und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  positive Zahlen, die  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$  erfüllen. Dann gilt

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Wenn  $f$  streng konvex ist, dann gilt Gleichheit nur für  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

**Beweis\*:** durch vollständige Induktion:

(i) Für  $n = 1$  muss  $\lambda_1 = 1$  sein, so dass die Aussage klar ist.

(ii) Die Aussage gelte für  $n \in \mathbb{N}$ . Seien  $x_1, \dots, x_{n+1}$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$  wie gefordert. Dann definieren wir  $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$  und  $x = \frac{\lambda_1}{\lambda}x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda}x_n$ . Also gilt  $\lambda_{n+1} = 1 - \lambda$  und  $\frac{\lambda_1}{\lambda} + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda} = 1$ . Dann folgt aus der Induktionsvoraussetzung  $f(x) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda}f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda}f(x_n)$ . Wenn  $f$  streng konvex ist, dann gilt Gleichheit nur für  $x_1 = \dots = x_n$ . Weil  $f$  konvex ist folgt aber  $f(\lambda x + (1 - \lambda)x_{n+1}) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x_{n+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$ . Wenn  $f$  streng konvex ist, dann gilt Gleichheit wieder nur für  $x_{n+1} = x = x_1 = \dots = x_n$ . **q.e.d.**

**Korollar 7.29** (Ungleichung arithmetisches-geometrisches Mittel)\* Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  positive Zahlen mit  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ . Dann gilt für positive Zahlen  $x_1, \dots, x_n$

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Insbesondere gilt  $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ . Gleichheit gilt nun für  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

**Beweis\***:  $-\ln$  ist streng konvex. Also folgt aus Jensen's Ungleichung

$$\begin{aligned} -\ln(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) &\leq -\lambda_1 \ln x_1 - \dots - \lambda_n \ln x_n \\ \iff \lambda_1 \ln x_1 + \dots + \lambda_n \ln x_n &\leq \ln(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \end{aligned}$$

Wegen der Monotonie von  $\exp$  folgt:

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} = \exp(\lambda_1 \ln x_1 + \dots + \lambda_n \ln x_n) \leq \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Ersetzen wir  $x_1, \dots, x_n$  durch  $y_1^{1/\lambda_1}, \dots, y_n^{1/\lambda_n}$  so erhalten wir

**Korollar 7.30\*** Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  positive Zahlen mit  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ . Dann gilt

$$y_1 \cdots y_n \leq \lambda_1 y_1^{1/\lambda_1} + \dots + \lambda_n y_n^{1/\lambda_n}$$

für alle  $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^+$ . Gleichheit gilt nur für  $y_1^{1/\lambda_1} = y_2^{1/\lambda_2} = \dots = y_n^{1/\lambda_n}$ . **q.e.d.**

**Korollar 7.31** (Young'sche Ungleichung). Seien  $p, q \in \mathbb{R}^+$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^+ \text{ und Gleichheit nur } x^p = y^q.$$

**Beweis:** Wegen der strengen Monotonie von  $\ln$  ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$\ln(xy) = \frac{1}{p} \ln(a) + \frac{1}{q} \ln(b) \leq \ln\left(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b\right) = \ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \quad \text{mit } a = x^p \text{ und } b = y^q.$$

Weil  $\ln$  streng konkav ist, gilt diese Ungleichung und Gleichheit nur für  $a = b$ . **q.e.d.**

## 7.7 Taylorreihen

Auf offenen Intervallen  $I$  (Teilmenge von  $\mathbb{R}$ ) ist die Ableitung  $f'$  einer differenzierbaren Funktion  $f$  wieder eine Funktion auf  $I$ . Die Bildung der Ableitung ist also eine lineare Abbildung  $\frac{d}{dx}$ , die differenzierbaren Funktionen auf  $I$ , Funktionen auf  $I$  zuordnet. Wenn die Ableitung wieder differenzierbar ist, können wir diese Abbildung nochmal anwenden und erhalten  $(\frac{d}{dx})^2 f = f''$  die zweite Ableitung von  $f$ . Durch  $n$ -faches Anwenden erhalten wir gegebenenfalls dann die  $n$ -te Ableitung  $(\frac{d}{dx})^n f = f^{(n)}$ .

**Definition 7.32.** Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und alle offenen Teilmengen  $I \subset \mathbb{R}$  sei  $C^n(I)$  die Menge aller  $n$ -mal stetig differenzierbaren reellen Funktionen auf  $I$ , und  $C^\infty(I)$  die Menge aller beliebig oft differenzierbaren reellen Funktionen auf  $I$ .

$$C(I) = C^0(I) \supset C^1(I) \supset \dots \supset C^n(I) \supset \dots \supset C^\infty(I)$$

**Beispiel 7.33.** (i)  $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$ , weil  $\exp^{(n)} = \exp$ .

(ii) für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  ist  $x \mapsto x^n \in C^\infty(\mathbb{R})$ , weil  $(x^n)^{(n)} = n!$  und  $(x^n)^{(m)} = 0$  für  $m > n$ .

(iii) für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $x \mapsto x^{-n} \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ , weil  $(x \mapsto x^{-n})^{(m)} =$

$$x \mapsto \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-m+1)}{x^{n+m}} = (-1)^m \frac{(n+m-1)(n+m-2)\dots n}{x^{n+m}}.$$

(iv)  $\ln \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$  weil  $\ln^{(m)}(x) = \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{x^m}$  für  $m \geq 1$  und mit  $0! = 1$ .

**Übungsaufgabe 7.34.** Zeige mit vollständiger Induktion für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

(i)  $\frac{d^n}{dx^n} f \cdot g = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$  für alle  $f, g \in C^n(I)$  (Verallgemeinerte Leibnizregel).

(ii)  $C^n(I)$  ist eine Unteralgebra von  $C(I)$ .

Aus der Rechenregel und der Kettenregel folgt auch

**Korollar 7.35.** (i) Die Komposition von  $n$ -mal (stetig) differenzierbaren Funktionen ist wieder  $n$ -mal (stetig) differenzierbar.

(ii) Die Umkehrfunktion einer  $n$ -mal (stetig) differenzierbaren bijektiven Funktion ist  $n$ -mal (stetig) differenzierbar, wenn die Ableitung keine Nullstellen hat. **q.e.d.**

**Definition 7.36.** (Taylor-Polynom) Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$   $n$ -mal differenzierbar, d.h. es gibt eine offene Umgebung  $O \subset I$  von  $x_0$ , so dass die Einschränkung von  $f$  auf  $O$  in  $C^{n-1}(O)$  liegt, und  $f^{(n-1)}$  in  $x_0$  differenzierbar ist. Dann heißt

$$T_{n,x_0}(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}f^{(2)}(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

das Taylorpolynom von  $f$  der Ordnung  $n$  in  $x_0$ .

Offenbar hat das Taylorpolynom der Ordnung  $n$  in  $x_0$  die gleichen Ableitungen bis zur Ordnung  $n$  wie  $f$  an dem Punkt  $x_0$ . Es ist das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad  $n$ , das an der Stelle  $x_0$  die Ableitungen  $f(x_0), f^{(1)}(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$  besitzt:

$$p(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + \dots + c_n(x-x_0)^n \implies p(x_0) = c_0, p^{(1)}(x_0) = c_1, \dots, p^{(n)}(x_0) = n!c_n.$$

**Satz 7.37** (Taylorformel). *Sei  $f \in C^n((a, b))$  auf  $(a, b)$   $n+1$ -mal differenzierbar. Dann gibt es für jedes  $x_0 \neq x \in (a, b)$  ein  $\xi \in (x_0, x)$  bzw.  $\xi \in (x, x_0)$ , so dass*

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \text{gilt.}$$

**Beweis:** Sei  $x \in (a, b)$  und  $g(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$  für  $t \in (a, b)$ . Dann gilt

$$g'(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Außerdem sei  $h(t) = (x-t)^{n+1}$  und  $h'(t) = -(n+1)(x-t)^n$ . Dann folgt aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz, dass es ein  $\xi \in (x_0, x)$  bzw.  $\xi \in (x, x_0)$  gibt mit

$$(g(x) - g(x_0))h'(\xi) = (h(x) - h(x_0))g'(\xi).$$

Es gilt aber  $g(x) - g(x_0) = f(x) - T_{n,x_0}(x)$  und  $h(x) - h(x_0) = -(x-x_0)^{n+1}$ . Also folgt  $f(x) - T_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)^{n+1}}{n!(n+1)(x-\xi)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ . **q.e.d.**

**Definition 7.38** (Taylorreihe). *Für  $f \in C^\infty((a, b))$  und  $x_0 \in (a, b)$  heißt die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$  Taylorreihe von  $f$  in  $x_0$ .*

Für  $f \in C^\infty((a, b))$  und  $x_0, x \in (a, b)$  gibt es drei Möglichkeiten:

- (i) Die Taylorreihe von  $f$  in  $x_0$  konvergiert an dem Punkt  $x$  gegen  $f(x)$ .
- (ii) Die Taylorreihe von  $f$  in  $x_0$  konvergiert an dem Punkt  $x$ , aber nicht gegen  $f(x)$ .
- (iii) Die Taylorreihe von  $f$  in  $x_0$  konvergiert an dem Punkt  $x$  nicht.

**Korollar 7.39.** *Sei  $f \in C^\infty((a, b))$  und  $x \neq x_0 \in (a, b)$ . Dann konvergiert die Taylorreihe von  $f$  in  $x_0$  an dem Punkt  $x$  gegen  $f(x)$ , wenn auf  $\xi \in (x_0, x)$  bzw.  $(x, x_0)$  die Folge  $(\frac{|f^{(n)}(\xi)|}{n!}|x-x_0|^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  gleichmäßig gegen Null konvergiert. **q.e.d.***

**Satz 7.40.** *Für jede Potenzreihenfunktion  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  mit Konvergenzradius  $R > 0$  und jedes  $|x_0| < R$  hat die Taylorreihe von  $f(x)$  in  $x_0$  einen Konvergenzradius nicht kleiner als  $R - |x_0|$ , und konvergiert auf  $B(x_0, R - |x_0|)$  gegen  $f$ .*

**Beweis:** Wegen Beispiel 7.4 (v) stimmen bei  $x_0 = 0$  die Ableitungen von  $f$  bis zur Ordnung  $N$  mit den entsprechenden Ableitungen von  $\sum_{n=0}^N a_n x^n$  überein. Deshalb sind  $T_{n,0} = \sum_{n=0}^N a_n x^n$  die Taylorpolynome von  $f$  bei  $x_0 = 0$  und  $f$  ist dort die Taylorreihe. Dann folgt die Aussage aus dem Identitätssatz für Potenzreihenfunktionen (ii). **q.e.d.**

**Definition 7.41.** Eine Funktion  $f \in C^\infty(I)$  heißt reellanalytisch bei  $x_0$ , falls die Taylorreihe bei  $x_0$  einen Konvergenzradius größer als Null hat und auf einer Umgebung von  $x_0$  gegen  $f(x)$  konvergiert. Sie heißt reellanalytisch, wenn das für alle  $x_0 \in I$  gilt.

Also sind alle Potenzreihenfunktionen im Inneren ihres Konvergenzbereiches reellanalytisch. Umgekehrt sind alle reellanalytischen Funktionen Potenzreihenfunktionen.

Aus dem Identitätssatz für Potenzreihenfunktionen folgt

**Korollar 7.42\*:** Zwei reellanalytische Funktionen in  $C^\infty((a, b))$  stimmen genau dann auf  $(a, b)$  überein, wenn ihre Taylorreihen für ein  $x_0 \in (a, b)$  übereinstimmen. **q.e.d.**

**Beispiel 7.43. (i)** Alle Polynome und die Funktionen  $\exp, \sin, \cos, x \mapsto a^x$  sind reellanalytische Funktionen auf ganz  $\mathbb{R}$ .

**(ii)** Wegen Satz 4.27 (iv) gibt es für jede Potenzreihenfunktion  $f$  mit  $f(0) \neq 0$  und Konvergenzradius  $R > 0$  ein  $r > 0$ , so dass  $|\frac{f(0)-f(x)}{f(0)}| \leq \frac{Lr}{|f(0)|} < 1$  für alle  $x \in B(0, r)$  gilt. Weil  $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$  auf  $x \in [0, 1)$  stetig ist, konvergiert die Potenzreihenfunktion  $\frac{1}{f(0)} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{f(0)-f(x)}{f(0)})^n$  für  $x \in B(0, r)$  gegen  $\frac{1}{f(0)} \frac{1}{1-(f(0)-f(x))/f(0)} = \frac{1}{f(x)}$ . Aus dem Identitätssatz für Potenzreihenfunktionen folgt, dass der Quotient zweier Potenzreihenfunktionen reellanalytisch ist, solange beide Potenzreihenfunktionen absolut konvergieren und der Nenner nicht verschwindet. Also sind alle rationalen Funktionen und  $\tan$  und  $\cot$  auf dem Definitionsbereich reellanalytisch.

$$\text{(iii)} f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0, \end{cases} \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

mit einem Polynom  $p_n$  vom Grad  $2n$ , das induktiv definiert ist durch

$$p_{n+1}(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2}(p_n(\frac{1}{x}) - p_n'(\frac{1}{x})), \quad p_0 = 1.$$

Wegen der 2. Regel von L'Hopital und der Monotonie von  $e^x$  gilt für  $\alpha, \beta > 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^\alpha}{\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\exp(-x^{-\alpha})}{x^\beta} = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} -x^{-\alpha} \left(1 + \beta \frac{\ln x}{x^{-\alpha}}\right)\right) = 0.$$

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist dann  $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$  stetig, und wegen dem Mittelwertsatz

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Die Taylorreihe von  $f$  verschwindet bei  $x_0 = 0$  mit allen Ableitungen. Also ist  $f$  bei  $x_0 = 0$  nicht reellanalytisch aber auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .