Dynamische Systeme

FS 18

Martin U. Schmidt

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1.1 Einführung

Definition 1.1. *Ein dynamisches System ist eine Halbgruppe G zusammen mit einer stetigen Abbildung*

$$\Phi : G \times M \to M$$

auf einem metrischen Raum M die folgendes erfüllt:

(i) $\Phi(0, x) = x$ *für alle* $x \in M$

(ii) $\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x)$ *für alle* $x \in M, s, t \in G$

Dabei ist G im zeitkontinuierlichen Fall entweder $G = \mathbb{R}$ oder $G = \mathbb{R}_0^+$ und im im zeitdiskreten Fall $G = \mathbb{Z}$ oder $G = \mathbb{N}_0$. M heißt Phasenraum.

Der Parameter aus G ist dabei typischerweise die Zeit. Im zeitdiskreten Fall betrachten wir nur den Verlauf zu einer Folge von Zeitpunkten, die voneinander durch gleichlange Zeitabstände getrennt sind. Die beiden Bedingungen (i) und (ii) bedeuten, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} G \to &\text{ stetige Abbildungen von } M \text{ auf sich selber} \\ t \mapsto \Phi(t, \cdot) : &\quad M \to M, \quad x \mapsto \Phi(t, x). \end{aligned}$$

ein (Halb-)Gruppenhomomorphismus ist. Weil die Halbgruppe $\mathbb{N}_0$ und die Gruppe $\mathbb{Z}$ frei von 1 erzeugt werden, haben wir folgende einfach Charakterisierung von zeitdiskreten dynamischen Systemen.

Übungsaufgabe 1.2. *Ein dynamisches System Φ mit $G = \mathbb{Z}$ oder $G = \mathbb{N}_0$ erfüllt $\Phi(n, x) = A^n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $A : M \to M, \quad x \mapsto A(x) = \Phi(1, x)$. Wenn $G = \mathbb{Z}$, dann ist A ein Homöomorphismus und es gilt $\Phi(n, x) = A^n(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Umgekehrt definiert jede stetige Abbildung $A : M \to M$ ein dynamisches System mit $G = \mathbb{N}_0$ und jeder Homöomorphismus $A : M \to M$ ein dynamisches System mit $G = \mathbb{Z}$.*

Übungsaufgabe 1.3. *Sei Φ ein zeitkontinuierliches dynamisches System auf einem reellen Vektorraum M dessen Abbildung Φ partiell nach t differenzierbar ist. Dann ist für alle $x \in M$ die Bahn $t \mapsto \Phi(t, x)$ eine Lösung der Differentialgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, x) = F(\Phi(t, x)) \quad \mathit{mit} \quad F(x) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(0, x).$$

Wir werden später sehen, dass diese zeitkontinuierlichen dynamischen Systeme eindeutig durch eine gewöhnliche Differentialgleichung bestimmt sind und umgekehrt viele gewöhnliche Differentialgleichung ein zeitkontinuierliches System definieren. Deshalb steht die Theorie der zeitkontinuierlichen dynamischen Systeme in sehr enger Verbindung zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Um einen gegebenen zeitlichen Verlauf zu einem dynamischen System zu machen, müssen wir zu allererst den Phasenraum richtig wählen. Von der richtigen Wahl des Phasenraumes hängt es nämlich oft ab, ob ein zeitlicher Verlauf überhaupt als dynamisches System beschrieben werden kann. Ein Beispiel, das die Entwicklung der Theorie der dynamischen Systeme ganz wesentlich angestoßen hat, sind die Newtonschen Gleichungen. In einem Kraftfeld F wird die Beschleunigung eines Punktteilchens beschrieben durch die Gleichung

$$\frac{d}{dt}m\dot{x} = m\ddot{x} = F$$

Hier ist m die Masse der Punkteteilchen und $t \mapsto x(t)$ die Funktion der Koordinaten in Abhängigkeit von der Zeit. Die zeitliche Ableitung bezeichnen wir durch einen Punkt. Wenn F von x und $\dot{x}$ und t abhängt, erhalten wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t)).$$

Die entsprechenden zeitlichen Verläufe der Koordinaten können nur dann durch ein dynamisches System beschrieben werden, wenn wir den Phasenraum so wählen, dass er neben den Koordinaten x auch die Geschwindigkeit des Punktteilchens enthält. Wenn die Kraft auch noch von der Zeit t abhängt, müssen wir sogar auch noch die Zeit zu den Freiheitsgraden des Phasenraums hinzufügen.

Ein anderes Beispiel für die Wichtigkeit der richtigen Wahl des Phasenraums sind Fibonaccis Kaninchen, oder allgemeinere Rekursionsformeln.

Fibonaccis Kaninchen 1.4. *Leonardo von Pisa hat schon 1202 ein Populationsmodell mit diskreter Zeit $n = 0, 1, 2, ...$ untersucht. Ein neugeborenes Kaninchenpaar wird in einen umzäunten Garten gesetzt. Jedes Kaninchenpaar erzeugt während seines Lebens jeden Monat ein weiteres Paar. Ein neugeborenes Paar wird nach einem Monat fruchtbar und bekommt somit nach zwei Monaten seine ersten Nachkommen. Es soll angenommen werden, dass die Kaninchen nie sterben. Bezeichnen wir mit k_n die Anzahl Kaninchenpaare nach n Monaten, dann ist $k_0 = k_1 = 1$ (das erste Paar) und $k_2 = 2$, da das erste Paar seine ersten Nachkommen nach zwei Monaten bekommt. Auch im dritten Monat bekommt nur das erste Paar neue Nachkommen, es ist also $k_3 = 3$. Im vierten Monat leben noch alle Kaninchen aus dem dritten Monat und die Paare, die nach zwei Monaten schon da waren, bekommen Nachwuchs. Es ist also $k_4 = k_3 + k_2$. Allgemein erhält man die Rekursionsgleichung*

$$k_{n+1} = k_n + k_{n-1} \quad \textit{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dabei steht der 1. Term k_n für die Anzahl der Kaninchen, die schon da sind, während der 2. Term k_{n-1} die Anzahl der im $(n+1)$-ten Monat neu geborenen Kaninchenpaare angibt. Um aus dieser Rekursionsformel ein zeitdiskretes dynamisches System zu machen, muss man den Phasenraum als die Menge aller Paare (k_n, k_{n-1}), das heißt man muß zu der Anzahl der Kaninchenpaare im jeweiligen Jahr die Anzahl im vorherigen Jahr hinzufügen. Das entsprechende dynamische System lässt sich dann einfach lösen.

Man kann dieses dynamische System mit einem generierenden Funktional lösen. Sei

$$K(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{n!} t^n.$$

Dann ist die Ableitung von $K(t)$ das generierende Funktional von

$$\dot{K}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{n!} n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_{n+1}}{n!} t^n.$$

Also folgt aus der Rekursionsgleichung

$$\ddot{K}(t) = \dot{K}(t) + K(t) \quad \text{mit den Anfangswerten} \quad K(0) = 1 = \dot{K}(0).$$

Somit haben wir diese Rekursionsformal also in eine Differentialgleichung übersetzt und die Startswerte in ein sogenanntes Anfangswertproblem dieser Differentialgleichung. Weil in dieser Differentialgleichung Ableitungen bis zur zweiten Ordnung auftauchen, werden wir bei der Integration zweimal integrieren müssen und entsprechend zwei Integrationskonstanten auftauchen. Deshalb müssen wir zwei Anfangswerte vorgeben.

Ganz ähnlich wie bei den Newtonschen Gleichungen müssen wir zu der Folge k_n mit generierendem Funktional $K(t)$ die Folge k_{n+1} mit generierendem Funktional $\dot{K}(t)$ hinzufügen, um ein dynamisches System zu erhalten. Im nächsten Abschnitt lernen wir, solche Differentialgleichungen zu lösen. Wenn das entsprechende Anfangswertproblem gelöst ist, und die Lösung im Punkt $t = 0$ auch glatt ist, dann ergibt ihre Taylorreihe eine Lösung von Fibonaccis Kaninchen. Es stellt sich heraus, dass diese Lösung sogar auf ganz $t \in \mathbb{C}$ eine konvergente Potenzreihe definiert.

Diese Erweiterungen des Phasenraums im Fall der Newtonschen Gleichungen und im Fall von Fibonaccis Kaninchen sind miteinander verwandt. Ganz allgemein muss der Phasenraum groß genug gewählt werden um ein dynamisches System zu erhalten.

Man kann Fibonaccis Kanichen oder allgemeiner Rekursionsgleichungen auch mit einem anderen generierenden Funktional lösen. Wir stellen diese andere Methode hier vor, weil mit ihr auch andere Rekursionsgleichungen gelöst werden können. Sei diesmal

$$K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n z^n.$$

Dann können wir die Rekursionsformel direkt in folgende Gleichung umschreiben

$$\frac{K(z) - k_0 - k_1 z}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} k_{n+1} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (k_n + k_{n-1}) z^n = K(z) - k_0 + zK(z).$$

Wenn wir diese Gleichung nach $K(z)$ auflösen erhalten wir

$$K(z) = \frac{k_0 + (k_1 - k_0)z}{1 - z - z^2}.$$

Mit den Anfangswerten $k_0 = 1 = k_1$ ergibt das

$$K(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}.$$

Das ist offenbar eine gebrochen rationale Funktion, die auf dem Komplement der Nullstellen des Nenners analytisch ist und als konvergente Potenzreihe geschrieben werden kann. Durch Partialbruchzerlegung können wir diese Potenzreihe auch ausrechen und damit die Fibonaccis Folge lösen. Seien $z_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $z_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ die beiden Lösungen von $z^2 + z - 1 = 0$. Dann gibt es zwei eindeutige reelle Zahlen α und β mit

$$\frac{1}{1 - z - z^2} = \frac{\alpha}{z - z_1} + \frac{\beta}{z - z_2}.$$

Durch Multiplikation mit dem Nenner erhalten wir

$$\alpha(z_2 - z_1) = -1 \quad \beta(z_1 - z_2) = -1.$$

Mithilfe der geometrischen Reihe ist die Potenzreihe $K(z)$ gegeben durch

$$K(z) = \frac{1}{(z_2 - z_1)z_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_1}\right)^n + \frac{1}{(z_1 - z_2)z_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_2}\right)^n.$$

Definition 1.5. *$x \in M$ heißt Fixpunkt oder Ruhelage eines dynamischen Systems $\Phi : G \times M \to M$, wenn $\Phi(g, x) = x \quad \forall g \in G$.*

Beispiel 1.6. *Der einzige Fixpunkt der Abbildung $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x$ ist $x = 0$.*

Definition 1.7. (i) *Für $x \in M$ heißt $\{\Phi(g, x) \mid g \in G\}$ Orbit oder Trajektorie (durch x), die Abbildung $\Phi(\cdot, x) : G \to M, \quad g \mapsto \Phi(g, x)$ heißt Bahnkurve (durch x).*

(ii) *Ein Orbit durch x heißt periodisch mit Periode $g \in G$, wenn $g > 0$ und $\Phi(g, x) = x$. Eine Periode heißt Minimalperiode, wenn $\Phi(\tilde{g}, x) \neq x$ für $0 < \tilde{g} < g$.*

Proposition 1.8. *Wenn G eine Gruppe ist, dann definiert die Zugehörigkeit zu einem Orbit eine Äquivalenzrelation auf dem Phasenraum.*

Beweis: Wir definieren also für $x_1, x_2 \in M$

$$x_1 \sim x_2, \text{ falls } x_2 \in \Phi(G, x_1).$$

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, denn

(i) Wegen $\Phi(0, \cdot) = \mathbb{1}_M$ ist immer $x \sim x$.

(ii) Gilt $x_2 = \Phi(t, x_1)$, dann folgt $x_1 = \Phi(-t, x_2)$ aus $\Phi(t_2, \cdot) \circ \Phi(t_1, \cdot) = \Phi(t_1 + t_2, \cdot)$ und $\Phi(0, \cdot) = \mathbb{1}_M$. Die Relation ist damit symmetrisch ($x_1 \sim x_2 \Rightarrow x_2 \sim x_1$).

(iii) Gilt $x_2 = \Phi(t_1, x_1)$ und $x_3 = \Phi(t_2, x_2)$, dann folgt $x_3 = \Phi(t_1 + t_2)(x_1)$. Die Relation ist damit transitiv ($x_1 \sim x_2, x_2 \sim x_3 \Rightarrow x_1 \sim x_3$). **q.e.d.**

Beispiel 1.9. *Sei $M = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und $\Phi : \mathbb{Z} \times M \to M$ gegeben durch die Drehung $\Phi(n, z) = e^{2\pi i \alpha n} \cdot z$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist jeder Orbit genau dann periodisch, wenn $\alpha \in \mathbb{Q}$, also $\alpha = \frac{q}{p}, q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Die Minimalperiode ist dann p.*

Man ist nicht nur an einzelnen Bahnen interessiert, sondern auch am Verhalten benachbarter Bahnen. Z.B. ist es beruhigend, dass auch bei einer kleinen Veränderung der Geschwindigkeit der Erde, z.B. durch Meteroiteneinschlag, ihre neue Bahn auf Dauer in der Nähe der alten bleibt. Die Untersuchung der Stabilität von solchen Fixpunkten wird uns im zweiten Kapitel beschäftigen.

1.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wenn die Abbildung Φ eines zeitkontinuierlichen dynamischen Systems auf einem Vektorraum $M = V$ partiell nach t differenzierbar ist, dann können wir die Bedingung (ii) bei $s = 0$ nach s differenzieren und erhalten

$$\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t} = F(\Phi(t,x)) \quad \text{mit} \qquad F : V \to V \qquad x \mapsto F(x) = \frac{\partial \Phi(0,x)}{\partial t}.$$

Also erfüllen alle Trajektorien durch den Anfangspunkt $x_0 \in M$ die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{q}(t) = F(q(t))$ mit dem Anfangswert $q(0) = q_0$. Differentialgleichungen sind Gleichungen, die Funktionen zu ihren Ableitungen in Beziehung setzen. Wenn diese Funktionen von mehreren Variablen abhängen, dann sind die Ableitungen, die in der entsprechenden Differentialgleichung mit der Funktion in Beziehung gebracht werden, partielle Ableitungen. Dann spricht man von partiellen Differentialgleichungen. Typischerweise sind Differentialgleichungen im folgenden Sinne *lokale* Gleichungen, dass sie nur die Werte einer gesuchten Funktion und endlich vieler Ableitungen für *einen* Wert der Variablen miteinender in Beziehung bringen. Mit gewöhnlichen Differentialgleichungen werden also im Allgemeinen Gleichungen von der folgenden Form bezeichnet

$$F(t, q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(k)}(t)) = 0.$$

Hierbei ist $t \mapsto q(t)$ die gesuchte Funktion, die auch vektorwertig sein kann.

Definition 1.10. *Differentialgleichungen von der Form*

$$F(t, q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(k)}(t)) = 0$$

heißen gewöhnliche Differentialgleichungen.

Historisch wurden solche Differentialgleichungen von Newton gleichzeitig mit der Entdeckung der Differentialrechnung eingeführt, um die Bewegung von massiven Teilchen im Gravitationsfeld zu beschreiben. Im einfachsten Fall eines Punktteilchens im Schwerefeld nehmen die Newton'schen Gleichungen folgende Form an:

$$m\ddot{q}(t) = F(t, q(t), \dot{q}(t)),$$

wobei $F(t, q(t), \dot{q}(t))$ die auf das Punktteilchen wirkende Kraft darstellt. Im einfachsten Fall $F = -mg$ taucht nur die zweite Ableitung der gesuchten Koordinatenfunktion von q des Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit auf, so dass wir deren Lösung aus der Differential- und Integralrechnung schon kennen:

$$q(t) = q_0 + q_1(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}.$$

Die Lösung können wir aus der Differentialgleichung durch zweimaliges Integrieren der linken und rechten Seite erhalten. Das Ziel unserer Untersuchung einer Differentialgleichung ist dabei möglichst alle Lösungen zu bestimmen und dann solche zusätzlichen Eigenschaften der Lösungen zu finden, die die Lösung eindeutig festlegen.

Definition 1.11. *Eine Lösung ist eine Funktion q, die so oft differenzierbar ist, dass alle in der Differentialgleichung vorkommenden Ableitungen existieren, und die zusammen mit diesen Ableitungen die Differentialgleichung erfüllt.*

In der Differentialgleichung

$$m\ddot{q} = -mg$$

hängen m (die Masse des Teilchens) und g (das Schwerefeld) nicht von t ab. Deshalb ist die Differentialgleichung äquivalent zu

$$\ddot{q} = -g.$$

Wenn wir die linke und die rechte Seite integrieren erhalten wir nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\dot{q}(t) - \dot{q}(t_0) = -g(t - t_0) \text{ bzw.} \quad \dot{q}(t) = \dot{q}(t_0) - g(t - t_0).$$

Nach nochmaligem Integrieren erhalten wir schließlich

$$q(t) = q(t_0) + \dot{q}(t_0)(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}.$$

Die Funktion $q(t) = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + q_1(t - t_0) + q_0$ ist auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und es gilt:

$$\dot{q}(t) = -g(t - t_0) + q_1 \text{ und} \quad \ddot{q}(t) = -g.$$

Also sind alle Lösungen von der Form

$$q(t) = -\frac{g(t - t_0)^2}{2} + q_1(t - t_0) + q_0, \text{ wobei } q(t_0) = q_0 \text{ und } \frac{dq}{dt}(t_0) = q_1.$$

Damit haben wir in diesem einfachen Beispiel unser Ziel erreicht.

Zusammenfassung 1.12. *Die höchste vorkommende Ableitung der Differentialgleichung $m\ddot{q} = -gm$ ist die zweite Ableitung. Durch geeignetes zweimaliges Integrieren konnten wir die Differentialgleichung lösen. Dabei entstanden zwei Integrationskonstanten und die Lösungen waren dann eindeutig durch die Wahl dieser Integrationskonstanten bestimmt. Diese Integrationskonstanten konnten wir schließlich als die*

Werte der Lösung und ihrer ersten Ableitung zu dem Zeitpunkt t_0 interpretieren. Deshalb ist der Lösungsraum dieser Differentialgleichung zweidimensional und wird parametrisiert durch $(q(t_0), \dot{q}(t_0)) \in \mathbb{R}^2$. Zu jeder solchen Wahl eines Anfangszustandes $(q(t_0), \dot{q}(t_0)) = (q_0, q_1)$ gibt es dann genau eine Lösung, die gegeben ist durch

$$q(t) = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + q_1(t - t_0) + q_0.$$

Typischerweise beschreiben solche Differentialgleichungen die zeitliche Entwicklung von veränderlichen Größen in der Natur. Diese Differentialgleichungen geben dann ein kausales Verhalten der veränderlichen Größen vor. Durch das Lösen der Differentialgleichung können wir aus der Kenntnis der veränderlichen Größen und genügend vieler Ableitungen von ihnen zu einem (Anfangs-)Zeitpunkt t_0 das Verhalten von ihnen sowohl in der Zukunft, als auch in der Vergangenheit ausrechnen und damit ihr Verhalten in der Zukunft vorhersagen und auf ihr Verhalten in der Vergangenheit zurückschließen. Die Anzahl der Ableitungen, die wir zum Zeitpunkt t_0 kennen müssen, ist gegeben durch die Anzahl der Integrationskonstanten, also die Anzahl der Integrale, die wir benötigen, um die Gleichung zu lösen. Da im Allgemeinen auch die Funktionswerte vorgegeben werden, also die Nullte-Ableitung, sollten alle Ableitungen bis zu einer Ordnung niedriger als der höchsten vorkommenden Ableitung vorgeben werden.

Definition 1.13. *Die Ordnung einer Differentialgleichung ist die höchste vorkommende Ordnung aller auftauchenden Ableitungen einer Differentialgleichung.*

Definition 1.14. *(Anfangswertproblem) Die Suche nach einer Lösung q einer gewöhnlichen Differentialgleichung der Ordnung n, die an einem Wert t_0 der Variablen t (nach der abgeleitet wird) zusammen mit den ersten $n-1$ Ableitungen die Werte*

$$q(t_0) = q_0,\, \dot{q}(t_0) = q_1,\, \ldots,\, q^{(n-1)}(t_0) = q_{n-1}$$

annimmt, heißt Anfangswertproblem.

Aufgrund unserer Vorüberlegungen erwarten wir, dass jedes solche Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung hat. Wir werden später auch Bedingungen angeben, unter denen wir die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen solcher Anfangswertprobleme beweisen können. Es stellt sich heraus, dass manche dieser Anfangswertprobleme viele Lösungen besitzen und andere gar keine.

Beispiel 1.15. (i) *Das Anfangswertproblem $\dot{q} = 2\sqrt{|q|}$ mit $q(0) = 0$ hat die Lösungen*

$$q(t) = \begin{cases} (t-b)^2 & \text{für } b < t \\ 0 & \text{für } -a \leq t \leq b \\ -(t+a)^2 & \text{für } t < -a \end{cases}$$

Hier sind a und b zwei nichtnegative reelle Zahlen, die beide auch ∞ sein können.

(ii) *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die keine Stammfunktion besitzt (z.B. die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen). Dann hat das Anfangswertproblem $\dot{q} = f$ mit $q(0) = 0$ keine Lösung.*

Die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen besitzt auf keinem offenen Intervall (a, b) eine Stammfunktion. Wenn nämlich F eine solche Stammfunktion wäre, dann wäre $x \mapsto F(x)$ monoton wachsend und $x \mapsto F(x) - x$ monoton fallend. Wegen dem Mittelwertsatz muss für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ entweder gelten

$$F(x_1) - F(x_2) = x_1 - x_2 \text{ oder } F(x_1) - F(x_2) = 0.$$

Im zweiten Fall folgt aus der Monotonie von F, dass F zwischen x_1 und x_2 konstant ist und im ersten Fall folgt aus der Monotonie von $x \mapsto F(x) - x$, dass diese Funktion zwischen x_1 und x_2 konstant ist. Also ist die Ableitung von F zwischen x_1 und x_2 entweder konstant gleich 0 oder konstant gleich 1. Damit ist F keine Stammfunktion der charakteristischen Funktion der rationalen Zahlen.

1.3 Gewöhnliche Differentialgleichungssysteme

Im einfachsten Fall sind die Funktionen, die mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung erfüllen soll, reelle Funktionen. In diesem Fall hat eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung n die Form

$$f(t, q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(n)}(t)) = 0, \quad \text{wobei} \quad f : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$$

eine reelle Funktion ist. Hierbei werden nur die Werte einer reellen Funktion und aller ihrer Ableitungen bis zur Ordnung n zu einem Zeitpunkt t mit einander in Beziehung gebracht werden. Wenn wir zusätzlich noch annehmen, dass sich die Differentialgleichung nach der höchsten Ableitung auflösen lässt, dann nimmt sie die Form

$$q^{(n)}(t) = f(t, q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(n-1)}(t)) \text{ an, mit einer Funktion} \quad f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}.$$

Wenn wir Funktionen q mit Werten in einem normierten Vektorraum V (z.B. $V = \mathbb{R}^m$) betrachten, dann nimmt sie die Form

$$q^{(n)}(t) = f(t, q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(n-1)}(t)) \text{ an, mit einer Funktion} \quad f : \mathbb{R} \times V^n \to V.$$

Solche Differentialgleichungen heißen Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen oder gewöhnliche Differentialgleichungssysteme. Um die folgende Untersuchung zu vereinfachen, machen wir von folgender Beobachtung Gebrauch.

Satz 1.16. *Jedes gewöhnliche Differentialgleichungssystem von obiger Form lässt sich in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung verwandeln, indem wir V durch V^n ersetzen. Wenn außerdem t zu einer zusätzlichen Komponente von q gemacht wird, also V durch $\mathbb{R} \times V^n$ ersetzt wird, dann hängt f nicht mehr von t ab.*

Beweis: Fassen wir die Funktionen $(q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)})$ zu einer V^n-wertigen Funktion zusammen, so ist die gewöhnliche Differentialgleichung

$$q^{(n)}(t) = f(t, q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(n-1)}(t))$$

offenbar äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}(q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(n-1)}(t)) = (\dot{q}(t), \ldots, q^{n-1}(t), f(t, q(t), \dot{q}(t), \ldots, q^{(n-1)}(t))).$$

Hierbei geht das entsprechende Anfangswertproblem

$$q(t_0) = q_0, \ldots, q^{(n-1)}(t_0) = q_{n-1}$$

über in

$$(q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)})(t_0) = (q_0, \ldots, q_{n-1}).$$

Wenn wir q auch noch um die Funktion t erweitern, dann ist die ursprüngliche Differentialgleichung offenbar äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}(t, q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)}) = (1, \dot{q}, \ldots, q^{n-1}, f(t, q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)})).$$

Hierbei geht das entsprechende Anfangswertproblem

$$q(t_0) = q_0, \ \ldots, \ q^{(n-1)}(t_0) = q_{n-1}$$

über in

$$(t, q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)})(t_0) = (t_0, q_0, \ldots, q_{n-1}).$$

q.e.d.

Die Ableitung von zeitkontinuierlichen Systemen werden durch solche Differentialgleichungssysteme beschrieben. Im nächsten Abschnitt untersuchen wir, unter welchen Bedingungen diese Differentialgleichungen die Abbildung Φ eindeutig bestimmen.

Beispiel 1.17. *Die Differentialgleichung $m\ddot{q} = -gm$ ist äquivalent zu dem Differentialgleichungssystem*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

1.4 Existenz und Eindeutigkeit

Das wichtigste mathematische Mittel um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen zu beweisen ist der Banachsche Fixpunktsatz.

Satz 1.18. *(**Banachscher Fixpunktsatz**) Sei X ein vollständiger metrischer Raum und f eine lipschitzstetige Abbildung von X nach X mit Lipschitzkonstante $L < 1$, d.h. für alle $x, y \in X$ gilt $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt und für jedes $x_0 \in X$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gegen den Fixpunkt.*

Beweis: Aus der Lipschitzstetigkeit von f folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in X$:

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq L^n d(x, y).$$

Hier bezeichnet f^n die n-fache Verknüpfung von f mit sich selber. Also folgt aus der Dreiecksungleichung für alle $m > n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(f^m(x_0), f^n(x_0)) &\leq \sum_{l=n}^{m-1} d(f^{l+1}(x_0)), f^l(x_0)) && \leq \sum_{l=n}^{m-1} L^l d(f(x_0), x_0) \\ &= (1 - L^{m-n}) \frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0) && \leq \frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0). \end{aligned}$$

Wegen $0 < L < 1$ konvergiert $\frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0)$ gegen Null und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge. Wegen der Vollständigkeit konvergiert sie. Wegen der Stetigkeit von f gilt

$$f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Also ist der Grenzwert ein Fixpunkt von f. Wegen der Lipschitzstetigkeit von f ist der Abstand von zwei Fixpunkten kleiner oder gleich als L mal dem Abstand. Also ist $(1 - L)$ mal dem Abstand kleiner oder gleich Null. Dann ist wegen $L < 1$ der Abstand nicht positiv, also gleich Null und beide Fixpunkte stimmen überein. **q.e.d.**

Um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungssytemen in normierten Vektorräumen zu zeigen, müssen wir Funktionen von Intervallen in normierte Vektorräume integrieren. Dafür wollen wir das Riemannintegral auf solche Funktionen ausdehnen. Für jedes Teilintervall $I \subset [a, b]$ eines kompakten Intervalles $[a, b]$ und jedes Element v eines normierten Vektorraumes V über $\mathbb{K}$ definiert

$$v\chi_I : [a, b] \to V, \qquad t \mapsto \begin{cases} v & \text{falls } t \in I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Funktion in $B([a,b],V)$. Dabei kann I auch aus einem Punkt bestehen. Die endlichen Linearkombinationen solcher Funktionen heißen Treppenfunktionen. Sie bilden einen Untervektorraum von $B([a,b],V)$. Wir definieren das Integral $\int_a^b v\chi_I(t)dt$ als v mal der Intervalllänge $|I|$, und setzen es linear auf alle Treppenfunktionen fort. Wir zeigen jetzt, dass diese lineare Fortsetzung eindeutig ist. Für jedes Teilintervall $I \subset [a,b]$ ist $[a,b] \setminus I$ die Vereinigung von einem oder von zwei schnittfremden Intervallen, und entsprechend $[a,b]$ die Vereinigung von zwei oder drei schnittfremden Intervallen, von denen eines I ist. Die Schnittmengen I_i von jeweils einem Intervall aus allen solchen Zerlegungen von endlich vielen J_j zerlegen $[a,b] = \bigcup_i I_i$ in endlich viele schnittfremde Teilintervalle, so dass jedes J_j eine Vereinigung von endlich vielen I_i ist. Dann gilt für

$$f = \sum\nolimits_j \chi_{J_j} v_j = \sum\nolimits_i \chi_{I_i} \sum\nolimits_{\{j|I_i\subset J_j\}} v_j \quad \text{mit} \quad v_j \in V,$$

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_j |J_j| v_j = \sum_{\{i,j|I_i\subset J_j\}} |I_i| v_j = \sum_i |I_i| \sum_{\{j|I_i\subset J_j\}} v_j = \int_a^b \sum_i \chi_{I_i}(t) \sum_{\{j|I_i\subset J_j\}} v_j dt.$$

Also ist das Integral der Treppenfunktion f unabhängig von der Zerlegung in eine Linearkombination von $\chi_{J_j} v_j$. Es folgt

$$\begin{aligned}\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| &= \left\|\sum\nolimits_{\{i,j|I_i\subset J_j\}} |I_i| v_j\right\| \leq \sum\nolimits_i |I_i| \left\|\sum\nolimits_{\{j|I_i\subset J_j\}} v_j\right\| = \int_a^b \|f(t)\| dt \\ &\leq \sum\nolimits_i |I_i| \max_i \left\|\sum\nolimits_{\{j|I_i\subset J_j\}} v_j\right\| = (b-a)\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Also definiert das Integral eine lipschitzstetige lineare Abbildung von dem normierten Unterrvektorraum aller Treppenfunktionen in $B([a,b],V)$ nach V mit Lipschitzkonstante $(b-a)$. Die Elemente des Abschlusses dieses Unterraumes heißen einfache Funktionen (siehe Dieudonne: Grundzüge der modernen Analysis 1 Abschnitt 7.6).

Satz 1.19. *In einem Banachraum V ist $f \in B([a,b],V)$ genau dann einfach, wenn es für jedes $x \in [a,b]$ Elemente $v, w \in V$ gibt, und für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\|f(y)-v\| < \epsilon$ für alle $y \in (x-\delta, x)\cap[a,b]$ und $\|f(y)-w\| < \epsilon$ für alle $y \in (x, x+\delta)\cap[a,b]$ gilt. Jede einfache Funktion hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.*

Beweis: Wenn f die obige Bedingung erfüllt, dann ist für jedes $\epsilon > 0$ jedes $x \in [a,b]$ in einem in $[a,b]$ offenen Teilintervall $I_x \subset [a,b]$ enthalten, so dass die Abstände zwischen Funktionswerten von f an zwei Punkten von $I_x \cap (-\infty, x)$ oder von $I_x \cap (x, \infty)$ jeweils kleiner als ϵ sind. Die offene Überdeckung $\bigcup_{x\in[a,b]} I_x$ der kompakten Menge $[a,b]$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Wir ordnen die Randpunkte und Indexpunkte der entsprechenden Intervalle I_x zusammen mit a und b der Größe nach an. Dann gibt es eine Treppenfunktion in $B(f,\epsilon) \subset B([a,b],V)$, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten jeweils konstant ist. Das gilt für alle $\epsilon > 0$, und f ist eine einfache Funktionen.

Wenn umgekehrt f einfach ist, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion $g \in B(f,\epsilon/2)$. Für jedes $x \in [a,b]$ wählen wir $\delta > 0$ so, dass g auf $(x-\delta,x) \cap [a,b]$ und $(x,x+\delta) \cap [a,b]$ konstant ist. Der Abstand zwischen Funktionswerten von f an zwei Punkten in $(x-\delta,x) \cap [a,b]$ oder in $(x,x+\delta) \cap [a,b]$ ist also jeweils kleiner als ϵ. Das gilt für jedes $\epsilon > 0$ mit einem geeignet gewählten $\delta > 0$. Für streng monotone wachsende bzw. fallende gegen x konvergierende Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen mit Grenzwerten v bzw. w. Dann erfüllt f die Bedingung des Satzes. Wenn x nicht zu den abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen einer in $B([a,b],V)$ gegen f konvergierenden Folge von Treppenfunktionen gehört, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass die Abstände zwischen den Funktionswerte von f an zwei Punkten in $(x-\delta,x+\delta) \cap [a,b]$ kleiner als ϵ sind. Deshalb ist f an höchstens abzähbar vielen Punkten unstetig.**q.e.d.**

Die Summe der charakteristischen Funktionen der Intervalle $(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n})$ ist auf $[0,1]$ riemannintegrable mit abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen, aber nicht einfach.

Für einen Banachraum V ist der Abschluss des Unterraumes der Treppenfunktionen in $B([a,b],V)$ auch ein Banachraum. Das Integral setzt sich zu einer stetigen linearen Abbildung von den einfachen Funktionen nach V fort. Aus der Lipschitzstetigkeit von $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$, $f \mapsto \|f\|$ und $\|f\| \mapsto \int_a^b \|f(t)\|dt$ folgt für einfache Funktionen f

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \le \int_a^b \|f(t)\|dt \le (b-a)\|f\|_\infty.$$

Satz 1.20. *Für eine einfache Funktion $f \in B([a,b],V)$ ist $F : [a,b] \to V$ mit $F(t) = \int_a^t f(s)ds$ lipschitzstetig und dort, wo f stetig ist, differenzierbar mit $F'(t) = f(t)$.*

Beweis: Für $t, t_0 \in [a,b]$ gilt $\|F(t) - F(t_0)\| \le |\int_{t_0}^t \|f(s)\|ds| \le |t-t_0| \cdot \|f\|_\infty$. Also ist F lipschitzstetig. Aus $\|f(s) - f(t_0)\| < \epsilon$ für $s \in [t_0,t] \cap [a,b]$ bzw. $[t,t_0] \cap [a,b]$ folgt

$$\left\|\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} - f(t_0)\right\| \le \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^t \|f(s) - f(t_0)\|ds < \epsilon.$$

Insbesondere ist F überall dort, wo f stetig ist, differenzierbar mit $F'(t) = f(t)$.**q.e.d.**

Aus dem Mittelwertsatz 8.5.1. (Dieudonne: Grundzüge der modernen Analysis 1 Abschnitt 8.5) folgt, dass eine stetige Funktion $F : [a,b] \to V$, die außerhalb einer abzählbaren Teilmenge differenzierbar ist, und deren Ableitung dort mit einer einfachen Funktion f übereinstimmt, sich nur um eine Konstante von $\int_a^x f(t)dt$ unterscheidet.

Wir zeigen jetzt die Existenz und Eindeutigkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wir müssen an die Nichtlinearität allerdings Bedingungen knüpfen.

Definition 1.21. *Eine Funktion f von einem metrischen Raum X in den metrischen Raum Y heißt lokal lipschitzstetig, wenn es für jedes $x_0 \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ von x_0 gibt und eine Lipschitzkonstante $L > 0$, so dass für alle $x, x' \in U$ gilt*

$$d(f(x), f(x')) \leq L d(x, x').$$

Satz 1.22. *(von Picard Lindelöf) Sei I ein offenes Intervall, $U \subset V$ eine offene Teilmenge eines Banachraums V und $f : I \times U \to V$ eine stetige Abbildung, die bezüglich der zweiten Variablen lokal lipschitzstetig ist, d.h. für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ gibt es ein $\delta > 0$ und ein $L > 0$, so dass für alle $(t, q), (t, \tilde{q}) \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times B(q_0, \delta)$*

$$\|f(t, q) - f(t, \tilde{q})\| \leq L\|q - \tilde{q}\|$$

gilt. Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ ein $\epsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit $q(t_0) = q_0$ auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ genau eine Lösung besitzt.

Beweis: Wegen der lokalen Lipschitzstetigkeit gibt es geeignete $\delta > 0$ und $L > 0$ mit $\|f(t, q) - f(t, \tilde{q})\| \leq L\|q - \tilde{q}\|$ für $(t, q), (t, \tilde{q}) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(q_0, \delta)}$. Für $\epsilon \leq \delta$ sei

$$\begin{aligned} F: \quad & C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(q_0, \delta)}) \to C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V), \\ & \qquad q \mapsto F(q) \quad \text{mit} \quad F(q)(t) = q_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, q(s)) ds. \end{aligned}$$

Für $\epsilon \left(\|f(\cdot, q_0)\|_\infty + L\delta\right) \leq \delta$ folgt

$$\|F(q) - q_0\|_\infty \leq \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s, q_0) + f(s, q(s)) - f(s, q_0)) ds \right\| \leq \epsilon \left(\|f(\cdot, q_0)\|_\infty + L\delta\right) \leq \delta.$$

Also bildet F $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(q_0, \delta)})$ auf sich selber ab. Für q und $\tilde{q}$ gilt dann

$$\|F(q)(t) - F(\tilde{q})(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, q(s) - f(s, \tilde{q}(s))\| \, ds \leq \epsilon L \|q - \tilde{q}\|_\infty.$$

Sei also ϵ kleiner als $\quad \epsilon < \min\left\{\delta, \frac{\delta}{\|f(\cdot, q_0)\|_\infty + L\delta}, \frac{1}{L}\right\} = \min\left\{\delta, \frac{\delta}{\|f(\cdot, q_0)\|_\infty + L\delta}\right\}.$

Die Abbildung F von dem vollständigen metrischen Raum $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(q_0, \delta)})$ auf sich selber ist lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $\epsilon \cdot L < 1$. Jeder Fixpunkt ist auf $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ wegen Satz 1.20 differenzierbar und löst das obige Anfangswertproblem mit $q(t_0) = q_0$. Wenn q umgekehrt auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ das Anfangswertproblem löst, dann haben $F(q)$ und q die gleichen Ableitungen und die gleichen Funktionswerte bei $t = t_0$.

Also stimmen diese Funktionen überein und jede Lösung des Anfangswertproblems ist ein Fixpunkt von F. Die Existenz und Eindeutigkeit dieses Anfangswertproblems auf $(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$ folgt also aus dem Banachschen Fixpunktsatz. **q.e.d.**

Betrachten wir die Lösung des Anfangswertproblems in Abhängigkeit von t_0, q_0, und f, so können wir im Beweis für alle Anfangswerte $\tilde{t}_0$, $\tilde{q}_0$ und in q lipschitzstetige $\tilde{f}$ mit Lipschitzkonstanten $\tilde{L}$ nahe bei L aus einer Umgebung von (t_0, q_0, f) in dem Raum $[t_0-\delta, t_0+\delta] \times \overline{B(q_0,\delta)} \times C([t_0-\delta, t_0+\delta], \overline{B(q_0,\delta)})$ dasselbe ϵ wählen. Zusammen mit F hängt dann auch die entsprechende Lösung stetig von diesen Daten ab.

Wegen Satz 1.16 können wir das Anfangswertproblem in ein solches verwandeln, in dem f nicht von t abhängt. Weil solche Anfangswertprobleme bezüglich t translationsinvariant sind, können wir dann $t_0 = 0$ wählen. Deshalb untersuchen wir im folgenden nur die Abhängigkeit der Lösung des Anfangswertproblems von q_0 und f. Die entsprechende autonome gewöhnliche Differentialgleichung wird durch ein Vektorfeld $F : U \to V$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset V$ eines Banachraumes gegeben. Die Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems heißt Integralkurve durch x:

$$\dot{q}(t) = f(q(t)) \quad \text{mit} \quad q(0) = x$$

Jede Lösung q von $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit einer differenzierbaren Funktion f erfüllt

$$\ddot{q}(t) = \frac{d}{dt} f(t,q(t)) = \frac{\partial f(t,q(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t,q(t))}{\partial q}\dot{q}(t) = \frac{\partial f(t,q(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t,q(t))}{\partial q} f(t,q(t)).$$

Indem wir mehrfach ableiten sehen wir, dass für r mal (stetig) differenzierbare Funktionen f, jede Lösung auch $(r+1)$ mal (stetig) differenzierbar ist. Dann hängen die Lösung der entsprechenden Anfangswerte auch r mal (stetig) differenzierbar von q_0 ab:

Satz 1.23. *Sei I ein offenes Intervall, $U \subset V$ eine offene Teilmenge eines Banachraums V und $f : I \times U \to V$ eine stetige Abbildung, die partiell nach q r mal stetig differenzierbar ist mit $r \in \mathbb{N}$. Dann gibt es für alle $(t_0, q_0) \in I \times U$ eine offene Umgebung W von q_0 in V, $\epsilon > 0$ und eine r mal stetig differenzierbare Funktion $g : W \to C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], V)$, so dass für alle $q_1 \in W$ die Funktion $g(q_1)$ auf $(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit $q(t_0) = q_1$ ist.*

Beweis: Wir benutzen den Satz der impliziten Funktion. Weil $\frac{\partial f}{\partial q}$ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass U den offenen Ball $(t_0-\delta, t_0+\delta) \times B(q_0,\delta)$ enthält und $\frac{\partial f}{\partial q}$ auf $(t_0-\delta, t_0+\delta) \times B(q_0,\delta)$ durch L beschränkt ist. Wegen dem Schrankensatz ist dann f auf $(t_0-\delta, t_0+\delta) \times B(q_0,\delta)$ für festes t in q lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L > 0$. Sei also $0 < \epsilon < \min\left\{\delta, \frac{1}{L}\right\}$ ähnlich gewählt wie in dem Beweis des Satzes von

Picard-Lindelöf. Dann definiert

$$F : V \times C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], B(q_0, \delta)) \to C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V), \qquad (q_1, q) \mapsto F(q_1, q)$$
$$\text{mit} \qquad F(q_1, q)(t) = q_1 + \int_{t_0}^{t} f(s, q(s)) ds$$

eine stetige Abbildung. Die partielle Ableitung $\frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}$ ist gegeben durch

$$\frac{\partial F(q_1, q)}{\partial q} : \qquad C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V) \to C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V), \qquad z \mapsto \frac{\partial F(q_1, q)}{\partial q}(z)$$
$$\text{mit} \qquad \frac{\partial F(q_1, q)}{\partial q}(z)(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f(s, q(s))}{\partial q}(z(s)) ds.$$

Weil die Ableitungen $\frac{\partial f(s,q(s))}{\partial q}$ beschränkt sind durch L, ist die Ableitung $\frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}$ beschränkt durch $L\epsilon < 1$. Also konvergiert für $q_1 \in V$ und $q \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], B(q_0, \delta))$ die Neumannsche Reihe

$$\left(\mathbb{1}_{C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],V)} - \frac{\partial F(q_1, q)}{\partial q} \right)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\partial F(q_1, q)}{\partial q} \right)^{l}$$

in $\mathcal{L}(C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V))$ gegen den inversen Operator von $\mathbb{1}_{C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],V)} - \frac{\partial F(q_1,q)}{\partial q}$. Offenbar ist für $q_1, q_2 \in V$ die punktweise Differenz $F(q_1, q) - F(q_2, q)$ der entsprechenden Abbildungen gleich der konstante Abbildung $q_1 - q_2$. Deshalb ist für jedes $q \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], B(q_0, \delta))$ die Abbildung $q_1 \mapsto F(q_1, q)$ eine glatte Abbildung von V nach $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V)$. Also ist die Abbildung

$$G : V \times C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], B(q_0, \delta)) \to C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V),$$
$$(q_1, q) \mapsto \big(\mathbb{1}_{C([t_0-\epsilon,t_0+\epsilon],B(q_0,\delta))} - F(q_1, q)\big) = q - F(q_1, q)$$

eine stetig differenzierbare Abbildung und besitzt auf dem gesamten Definitionsbereich eine invertierbare partielle Ableitung nach $q \in C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], B(q_0, \delta))$. Das Urbild der $0 \in C(I, V)$ besteht genau aus den Fixpunkten der Abbildungen $q \mapsto F(q_1, q)$. Wegen dem Satz der impliziten Funktion gibt es eine stetig differenzierbare Abbildung g von einer Umgebung W von $q_0 \in V$ auf die entsprechenden Fixpunkte der Abbildungen $q \mapsto F(q_1, q)$. Sie ist genauso oft stetig differenzierbar, wie G. Weil das Integral von t_0 nach t eine lineare stetige und damit glatte Abbildung von $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V)$ auf sich selber ist, sind die partiellen Ableitungen von G nach q bis zur selben Ordnung stetig, bis zu der auch die partiellen Ableitungen von f nach q stetig sind. Also ist G und damit auch g r mal stetig differenzierbar. **q.e.d.**

Der Beweis zeigt auch, dass die Lösung des Anfangswertproblems unter den gleichen Voraussetzungen stetig differenzierbar von t_0 und von f abhängt, wenn auf dem Raum der Funktionen $f \in C(I \times U, V)$ die Supremumsnorm von f und von $\frac{\partial f}{\partial q}$ benutzt wird. Wenn in diesem Satz die Funktion f nicht von t abhängt, dann lassen sich die ersten $r+1$ Ableitungen $\dot{q}(t), \ldots, q^{(r+1)}(t)$ der Lösung durch die ersten r Ableitungen der Funktion f nach q bei $q(t)$ ausdrücken. Deshalb sind die entsprechenden Lösungen des Anfangswertproblems sogar $(r+1)$ mal stetig nach t differenzierbar. Für glatte f, die nicht von t abhängen, hängen die Lösungen des Anfangswertproblems glatt von q_0 und t ab. Die Abhängigkeit von t_0 ist wenn f nicht von t abhängt trivial. Höhere Ableitungen nach t_0 können wir mit dem oben beschriebenen Trick für differenzierbare Funktionen f kontrollieren. Jetzt setzten wir die Lösungen auf möglichst große Intervalle fort.

Satz 1.24. *(Globale Existenz und Eindeutigkeit) Sei $O \subset \mathbb{R} \times V$ eine offene Teilmenge und $f : O \to V$ eine stetige Abbildung, die wie bei der lokalen Existenz und Eindeutigkeit lokal lipschitzstetig ist. Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in O$ genau ein maximales Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$, das t_0 enthält, und auf dem das Anfangswertproblem*

$$\dot{q}(t) = f(t, q(t)) \quad \text{mit} \quad q(t_0) = q_0$$

genau eine Lösung q enthält. Das Intervall ist in dem Sinne maximal, dass an beiden Rändern, also bei a und b, jeweils eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) *$a = -\infty$ bzw. $b = \infty$.*

(ii) *$t \mapsto \|f(t, q(t))\|$ ist für kleine $\epsilon > 0$ auf $(a, a+\epsilon)$ bzw. $(b-\epsilon, b)$ unbeschränkt.*

(iii) *Die Lösung q lässt sich stetig auf $[a, b)$ bzw. $(a, b]$ fortsetzen, der Graph der Fortsetzung liegt aber nicht in O, d.h. $\lim_{t \downarrow a}(t, q(t)) \notin O$ bzw. $\lim_{t \uparrow b}(t, q(t)) \notin O$.*

Beweis: Wir betrachten zuerst zwei Lösungen $q_1 : (a_1, b_1) \to V$ und $q_2 : (a_2, b_2) \to V$ von $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit $q_1(t_1) = q_2(t_1)$ für ein $t_1 \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$. Sei A die Menge

$$A = \{a \in (a_1, t_1] \cap (a_2, t_1] \mid q_1(t) = q_2(t) \text{ für alle } t \in [a, t_1]\}.$$

Für jedes $t \in (\inf A, t_1]$ gibt es ein $a \in A$ mit $a < t$, so dass $t \in A$ folgt. Also liegt A zwischen $(\inf A, t_1] \subset A \subset [\inf A, t_1]$. Wegen der Stetigkeit von $q_1 - q_2$ ist A in $(a_1, t_1] \cap (a_2, t_1]$ abgeschlossen und besitzt wegen dem Satz von Picard-Lindelöf kein Minimum. Also ist A gleich $(a_1, t_1] \cap (a_2, t_1]$. Genauso gilt auch

$$B = \{b \in [t_1, b_1) \cap [t_1, b_2) \mid q_1(t) = q_2(t) \text{ für alle } t \in [t_1, b]\} = [t_1, b_1) \cap [t_1, b_2).$$

Also stimmen q_1 und q_2 auf $(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ überein. Alle Lösungen von

$$q : (a, b) \ni t_0 \to V \quad \text{mit} \quad \dot{q}(t) = f(t, q) \quad \text{und} \quad q(t_0) = q_0$$

definieren auf der Vereinigung ihrer Definitionsbereiche auch eine Lösung. Wir zeigen jetzt, dass diese Vereinigung an beiden Rändern die Bedingung (iii) erfült, wenn (i) und (ii) nicht gelten. Dann ist $\|\dot{q}\|$ auf $(a, a+\epsilon)$ bzw. $(b-\epsilon, b)$ beschränkt und q ist dort lipschitzstetig. Für jede Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, in (a, b), die gegen a bzw. b konvergiert, konvergiert $(t_n, q(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}\times V$ gegen den gleichen Grenzwert. Liegt der Grenzwert in O, besitzt wegen des Satzes von Picard-Lindelöf das Anfangswertproblem

$$\dot{q}(t) = f(t, q(t)) \qquad \text{mit} \qquad q(a) = \lim_{t\to a+} q(t) \qquad \text{bzw.} \qquad q(b) = \lim_{t\to b-} q(t)$$

eine Lösung in einer Umgebung von a bzw. b. Die ursprüngliche Lösung q ist auch ein Fixpunkte der Einschränkung der entsprechenden Abbildung F im Beweis des Satzes von Picard Lindelöf auf Funktionen auf $[t_0, t_0+\epsilon]$ bzw. $[t_0-\epsilon, t_0]$, weil $q - F(q)$ auf $(t_0, t_0+\epsilon)$ bzw. $(t_0-\epsilon, t_0)$ konstant ist, und bei t_0 verschwindet. Dann läßt sich die Lösung auf ein größeren Intervall als (a, b) fortsetzten. Also gilt (iii). **q.e.d.**

Bemerkung 1.25. (i) *Für partiell nach q stetig differenzierbare f ist $\frac{\partial f}{\partial q}$ lokal beschränkt und f wegen dem Schrankensatz in q lokal lipschitzstetig.*

(ii) *Wenn (ii) gilt, kann $t \mapsto f(t, q(t))$ nicht stetig auf $[a, a+\epsilon)$ bzw. $(b-\epsilon, b]$ fortgesetzt werden. Dann können q und f nicht stetig auf größere Definitionsbereiche fortgesetzt werden, die a bzw. b und $(a, q(a))$ bzw. $(b, q(b))$ enthalten.*

(iii) *Für $\dim V < \infty$ ist f auf beschränkten und in $\mathbb{R}\times V$ abgeschlossenen Teilmengen von O beschränkt. Wenn also anstatt (iii) die schwächere Bedingung (iii') nicht gilt, dass für eine in (a, b) gegen a bzw. b konvergente Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge $(t_n, q(t_n))$ in $\mathbb{R}\times V$ konvergiert mit $\lim_{n\to\infty}(t_n, q(t_n)) \notin O$, dann muss entweder (i) oder (ii) für $t \mapsto \|q(t)\|$ gelten. Also können wir für $\dim V < \infty$ (iii) durch (iii') und in (ii) $t \mapsto \|f(t, q(t)\|$ durch $t \mapsto \|q(t)\|$ ersetzen.*

(iv) *Jedes kompakte Teilintervall I einer maximalen Lösung können wir durch endlich viele Intervalle $(t_i - \epsilon, t_i + \epsilon)$ aus dem Satz von Picard-Lindelöf überdecken. Dann sind auch die Lösungen der Anfansgwertporbleme zu den Daten aus Umgebungen von (t_0, q_0) und von f auf I definiert, und hängen stetig von den Daten ab.*

Wenn $\dim V < \infty$ verallgemeinern wir die Existenz, aber nicht die Eindeutigkeit (wir kennen schon ein Gegenbeispiel), auf stetige Funktionen f. Dafür zeigen wir den

Satz 1.26. *(Arzela-Ascoli) Sei K ein kompakter metrischer Raum und V ein Banachraum mit $\dim V < \infty$. Eine Teilfolge einer Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(K, V)$ konvergiert, wenn*

(i) *für jedes $x \in K$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und*

(ii) *für jedes $x \in K$ die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig ist in x, d.h. für jedes $x \in K$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f_n(x') \in B(f_n(x), \epsilon) \subset V$ für alle $x' \in B(x, \delta) \subset K$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar auf K gleichgradig stetig ist. Für jedes $\epsilon > 0$ und $y \in K$ gibt es wegen (ii) ein $\delta_y > 0$, so dass $\|f_n(x) - f_n(y)\| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aus $d(x, y) < 2\delta_y$ folgt. Wegen der Kompaktheit von K hat die Überdeckung $\{B(y, \delta_y)|y \in K\}$ eine endliche Teilüberdeckung $K = B(y_1, \delta_1) \cup \ldots \cup B(y_N, \delta_N)$. Sei δ das Minimum von $\delta_1, \ldots, \delta_N$. Dann enthält für alle Paare $x, x' \in K$ mit $d(x, x') < \delta$ einer der Bälle $B(y_1, \delta_1), \ldots, B(y_N, \delta_N)$ den einen Punkt x. Damit sind beide in einem der Bälle $B(y_1, 2\delta_1), \ldots, B(y_N, 2\delta_N)$ enthalten. Daraus folgt $\|f_n(x) - f_n(x')\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig auf ganz K.

Sei $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die in K dicht liegt. Wegen (i) ist dann für alle $l \in \mathbb{N}$ der Abschluss A_l der Menge der Folge $(f_n(x_l))_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Teilmenge von V. Wir definieren induktiv eine Teilfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Folge $(a_l)_{l\in\mathbb{N}}$ in V, so dass $\|g_n(x_l) - a_l\| < \frac{1}{n}$ für alle $l \in \mathbb{N}$ und $n \geq l$ gilt. Dafür wählen wir zuerst einen Häufungspunkt a_1 von $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Teilfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|g_n(x_1) - a_1\| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Induktiv wählen wir danach für jedes $L \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ einen Häufungspunkt a_L von $(g_n(x_L))_{n\in\mathbb{N}}$, und ersetzen die Folgenglieder von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Indizes größer als $L-1$ durch eine Teilfolge von $(g_n)_{n\geq L}$, so dass $\|g_n(x_L) - a_L\| < \frac{1}{n}$ für alle $n \geq L$ gilt. Dann gilt $\|g_n(x_l) - a_l\| < \frac{1}{n}$ für alle $l = 1, \ldots, L$ und $n \geq l$.

Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\|g_n(x) - g_n(x')\| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aus $x, x' \in K$ mit $d(x, x') < \delta$ folgt. Also gibt es ein $M \in \mathbb{N}$, so dass $\|g_m(x_l) - g_n(x_l)\| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $m, n \geq M$ an den Zentren der Bälle einer endlichen Teilüberdeckung von K durch $(B(x_l, \delta))_{l\in\mathbb{N}}$ gilt. Es folgt für alle $x \in K$ und $n, m \geq M$

$$\|g_m(x) - g_n(x)\| \leq \|g_m(x) - g_m(x_l)\| + \|g_m(x_l) - g_n(x_l)\| + \|g_n(x_l) - g_n(x)\| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Also ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und konvergiert in $C(K, V)$. **q.e.d.**

Satz 1.27. *(Satz von Peano) Sei I ein offenes Intervall, U eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen Banachraums V und $f : I \times U \to V$ stetig. Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ ein $\epsilon > 0$ und auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset I$ eine Lösung des Anfangswertproblems $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit $q(t_0) = q_0$.*

Beweis: Weil f stetig ist, gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in I \times U$ ein $\epsilon > 0$, so dass

$$K_\epsilon \subset I \times U \qquad \text{und} \qquad \|f(t, q)\| \leq \|f(t_0, q_0)\| + 1 \text{ für alle } (t, q) \in K_\epsilon$$

für $K_\epsilon = [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \overline{B(q_0, \|f(t_0, q_0)\|\epsilon + \epsilon)}$ gilt. Für jede Partition P

$$[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] = [t_{-M}, t_{1-M}] \cup \ldots \cup [t_{-1}, t_0] \cup [t_0, t_1] \cup \ldots \cup [t_{N-1}, t_N]$$

mit $t_0-\epsilon = t_{-M} < t_{1-M} < \ldots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = t_0+\epsilon$ des Intervalls $[t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]$, die t_0 als den Anfangs- und Endpunkt eines Teilintervalls enthält, definieren wir folgendermaßen eine Näherungslösung q_P der Differentialgleichung. Auf den Intervallen $[t_{-m}, t_{1-m}]$ definieren wir q_P induktiv für $m = 1, \ldots, m = M$ dadurch, dass jeweils der Wert bei t_{1-m} für $m = 1$ gleich q_0 ist und für $m > 1$ gleich dem Wert $q_P(t_{1-m})$ von dem schon konstruierten q_P bei t_{1-m} ist, und die Ableitung jeweils konstant gleich $f(t_{m-1}, q_P(t_{1-m}))$ ist. Entsprechend definieren wir die Lösung auch induktiv auf den Intervallen $[t_{n-1}, t_n]$ für $n = 1, \ldots, n = N$ dadurch, dass jeweils der Wert bei t_{n-1} für $n = 1$ gleich q_0 ist und für $n > 1$ gleich dem Wert $q_P(t_{n-1})$ von dem schon konstruierten q_P bei t_{n-1} ist, und die Ableitung jeweils konstant gleich $f(t_{n-1}, q_P(t_{n-1}))$ ist. Weil f auf K_ϵ durch $\|f(t_0, q_0)\| + 1$ beschränkt ist, ist q_P lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $\|f(t_0, q_0)\| + 1$ und das Bild von q_P liegt in $\overline{B(q_0, \|f(t_0, q_0)\|\epsilon + \epsilon)}$. Sei nun $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Partitionen, deren maximale Intervalllängen eine Nullfolge bilden. Wir zeigen jetzt, dass eine Teilfolge der entsprechenden Näherungslösungen $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Lösung des Anfangswertproblems konvergiert. Offenbar erfüllt die Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen des Satzes von Arzela-Ascoli. Deshalb konvergiert $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]$ nach Übergang zu einer Teilfolge gegen eine stetige Funktion q, die bei t_0 gleich q_0 ist. Sei f_n die Treppenfunktion auf $[t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]$ mit $q_n(t) = q_0 + \int_{t_0}^t f_n(s)ds$ für $t \in [t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]$. Weil die stetige Funktion f auf der kompakten Teilmenge K_ϵ auch gleichmäßig stetig ist, konvergiert $f(t, q_n(t))$ auf $t \in [t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]$ gleichmäßig gegen $(f(t, q(t))$ und $f_n(t) - f(t, q_n(t))$ wegen der Lipschitzstetigkeit von q_n gleichmäßig gegen Null. Dann konvergiert $(q_n(t))_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $t \in [t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]$ gleichmäßig gegen

$$q(t) = \lim_{n\to\infty} q_n(t) = q_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f_n(s)ds = q_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, q_n(s))ds = q_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, q(s))ds.$$

Wegen Satz 1.20 ist dann q differenzierbar mit $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit $q(t_0) = q_0$. **q.e.d.**

Eine Lösung einer Differentialgleichung auf einem abgeschlossenen Intervall ist eine stetige Funktion, die im Inneren stetig differenzierbar ist, und deren Ableitung sich stetig auf das abgeschlossene Intervall fortsetzen lässt. Weil eine Funktion auf der Vereinigung von zwei Intervallen genau dann stetig ist, wenn sie auf beiden Intervallen stetig ist und auf der Schnittmenge übereinstimmt, können wir solche Lösungen zusammensetzen: Eine Lösung q_1 des Anfangswertproblems $\dot{q}(t) = f(t, q(t))$ mit $q(t_1) = q_0$ auf $[t_1-\epsilon, t_1]$ und eine q_2 auf $[t_1, t_1+\epsilon]$ ergibt folgende Lösung auf $[t_1-\epsilon, t_1+\epsilon]$:

$$q(t) = \begin{cases} q_1(t) & \text{für } t \in [t_1-\epsilon, t_1] \\ q_2(t) & \text{für } t \in [t_1, t_1+\epsilon]. \end{cases}$$

Satz 1.28. *(Globale Existenz) Sei V ein endlichdimensionaler Banachraum, $O \subset \mathbb{R}\times V$ offen und $f : O \to V$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es für jedes $(t_0, q_0) \in O$ eine* *(nicht notwendiger Weise eindeutige) maximale Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{q}(t) = f(t, q(t)) \quad mit \quad q(t_0) = q_0$$

auf einem Intervall (a, b), das t_0 enthält. Die Lösung ist in dem Sinne maximal, dass an beiden Rändern, also bei a und b, jeweils eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $a = -\infty$ *bzw.* $b = \infty$

(ii) $t \mapsto \|f(t, q(t))\|$ *ist für kleine* $\epsilon > 0$ *auf* $(a, a + \epsilon)$ *bzw.* $(b - \epsilon, b)$ *unbeschränkt.*

(iii) *Die Lösung q lässt sich stetig auf $[a, b)$ bzw. $(a, b]$ fortsetzen, der Graph der Fortsetzung liegt aber nicht in O, d.h.* $\lim\limits_{t\downarrow a}(t, q(t)) \notin O$ *bzw.* $\lim\limits_{t\uparrow b}(t, q(t)) \notin O$.

Beweis: Seien $(t_n, q_n) = (t_n, q(t_n)) \in O \subset \mathbb{R} \times V$ die Anfangswerten von Fortsetzungen nach links bzw. rechts mit monoton wachsenden bzw. fallenden konvergenten t_n und beschränkten $\|f(t_n, q_n)\|$. Dann ist die fortgesetzte Lösung q lipschitzstetig und die Folge der entsprechenden $\epsilon_n = t_{n+1} - t_n$ konvergiert gegen Null. Wenn ϵ_n möglichst groß gewählt sind, gibt es $(\tilde{t}_n, \tilde{q}_n) \in (t_n - 2\epsilon_n, t_n + 2\epsilon_n) \times B(q_n, 2\|f(t_n, q_n)\|\epsilon_n + 2\epsilon_n)$ mit

$$\|f(\tilde{t}_n, \tilde{q}_n)\| = \|f(t_n, q_n)\| + 1 \qquad \text{oder} \qquad (\tilde{t}_n, \tilde{q}_n) \notin O.$$

Wegen der Lipschitzstetigkeit von q konvergieren $(t_n, q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{t}_n, \tilde{q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert, an dem f nicht stetig sein kann, der also nicht in O liegt. **q.e.d.**

Maximale Lösungen können also nicht als Lösungen fortgesetzt werden. Es kann mehrere maximale Lösungen geben, und verschiedene maximale Lösungen können auf unterschiedlichen Intervallen definiert sein und auf Teilintervallen übereinstimmen.

Auch hier kann die Bedingung (iii) durch (iii') aus der Bemerkung 1.25 (iii) ersetzt werden und in (ii) die Funktion $t \mapsto \|f(t, q(t)\|$ durch $t \mapsto \|q(t)\|$. Also sind Lösungen entweder global oder unbeschränkt, oder kommen dem Rand von O beliebig nahe.

Korollar 1.29. *Sei F ein stetiges und beschränktes Vektorfeld auf einem endlichdimensionalen Banachraum V. Dann sind alle Anfangswertprobleme auf ganz $\mathbb{R}$ lösbar.*

Beweis: Weil F auf ganz V definiert ist, kann (iii) nicht erfüllt sein. Weil F beschränkt ist, kann (ii) nicht erfüllt sein. Also muss am Rand (i) gelten. **q.e.d.**

Korollar 1.30. *Sei $F : X \to V$ ein stetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge X eines endlichdimensionalen Banachraumes V. Eine Integralkurve durch ein $x \in X$, die nicht für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist, ist in keiner kompakten Teilmenge von X enthalten.*

Beweis: Der Abschluss einer Integralkurve, die in einer kompakten Teilmenge von X enthalten ist, ist in der kompakten Teilmenge enthalten und (iii) aus Satz 1.28 gilt nicht. Auf ihr ist das Vektorfeld F beschränkt, und (ii) gilt auch nicht. **q.e.d.**

1.5 Flüsse und Vektorfelder

In der Übungsaufgabe 1.3 haben wir gesehen, dass ein zeitkontinuierliches partiell nach t differenzierbares dynamisches System ein Vektorfeld F definiert. In diesem Abschnitt konstruieren wir aus dem Vektorfeld F das dazugehörige dynamische System Φ. Zunächst wollen wir alle maximalen Integralkurven aus dem vorangehenden Satz zu Abbildungen von offenen Teilmengen von $\mathbb{R} \times M$ nach M zusammensetzen.

Definition 1.31. *Sei X ein metrischer Raum. Eine Abbildung $\Phi : W \to X$ auf einer offenen Teilmenge $W \subset \mathbb{R} \times X$ heißt lokaler Fluss, wenn folgende Bedingungen gelten:*

(i) *Für alle $x \in X$ ist $\{t \in \mathbb{R} \mid (t, x) \in W\}$ ein offenes Intervall, das die Null enthält.*

(ii) *Sei $(s, x) \in W$ und $(t, \Phi(s, x)) \in W$, dann ist auch $(t + s, x) \in W$ und es gilt*

$$\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x).$$

(iii) *Für alle $x \in X$ gilt $\Phi(0, x) = x$.*

Lemma 1.32. *Für $\Phi : W \to X$, stetiger lokaler Fluss auf metrischem Raum X gilt:*

(i) *Für alle $t \in \mathbb{R}$ sei $V_t = \{x \in X \mid (t, x) \in W\}$. Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge V_t offen. Für alle $x \in V_t$ ist auch $\Phi(t, x) \in V_{-t}$ und die Abbildung*

$$\Phi(t, \cdot) : \quad V_t \to V_{-t}, \quad x \mapsto \Phi(t, x)$$

ein Homöomorphismus mit der inversen Abbildung $\Phi(-t, \cdot)$.

(ii) *Für jedes $x \in X$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset X$ von x, so dass W die Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ enthält. Für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ sind insbesondere V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x und $\Phi(t, \cdot)$ ein Homöomorphismus von der offenen Umgebung V_t von x auf die offene Umgebung V_{-t} von x.*

Beweis: Für alle $(t_0, x_0) \in W$ ist W eine offene Umgebung von $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset X$ von x_0, so dass $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times U$ in W enthalten ist. Also sind für alle $t \in \mathbb{R}$ die Mengen V_t offen.

Sei $t \in \mathbb{R}$ und $x \in V_t$. Wir führen den Beweis für $t > 0$. Für $t < 0$ geht er analog. Aus der Bedingung (i) folgt $W \supset \{(s, x) \mid s \in [0, t]\} = \{(t + s, x) \mid s \in [-t, 0]\}$. Für jedes $s \in [-t, 0]$ gibt es ein $\epsilon_s > 0$ und eine offene Umgebung $U_s \subset X$ von $\Phi(t + s, x)$ mit $(-\epsilon_s, \epsilon_s) \times U_s \subset W$. Die offene Überdeckung $(U_s)_{s\in[-t,0]}$ der kompakten Menge $\{\Phi(t + s, x) \mid s \in [-t, 0]\}$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Sei $\epsilon > 0$ das Minimum der entsprechenden $(\epsilon_s)_{s\in[0,1]}$. Aus der Bedingung (ii) folgt für alle $s \in [-t, 0]$

$$(r, \Phi(t+s, x)), (t+s+r, x) \in W \text{ und } \Phi(r, \Phi(t+s, x)) = \Phi(t+s+r, x) \text{ für alle } r \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Wenn $(s, \Phi(t,x))$ in W liegt, dann folgt wegen der Bedingung (ii) $(r, \Phi(s, \Phi(t,x))) = (r, \Phi(s+t,x)) \in W$ und damit auch $(s+r, \Phi(t,x)) \in W$ und $(t+s+r, x) \in W$ und $\Phi(s+r, \Phi(t,x)) = \Phi(t+s+r, x)$. Induktiv folgt $(s, \Phi(t,x)) \in W$ und $\Phi(s, \Phi(t,x)) = \Phi(t+s, x)$ zuerst für $s = 0$ und dann für alle $s \in [-t, 0]$. Also liegt $\Phi(t,x)$ in V_{-t} und $\Phi(-t, \cdot)$ ist die Umkehrabbildung von $\Phi(t, \cdot)$. Dann sind $\Phi(t, \cdot)$ und $\Phi(-t, \cdot)$ Homöomorphismen.

Danach folgt (ii) aus dem Beweis von (i). **q.e.d.**

Satz 1.33. *Sei $F : X \to V$ ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge X eines Banachraumes V. Dann gibt es genau eine offene Teilmenge $W_F \subset \mathbb{R} \times X$ und einen lokalen Fluss $\Phi_F : W_F \to X$, so dass für jedes $x \in X$*

$$\{t \in \mathbb{R} \mid (t,x) \in W_F\} \to X, \qquad t \mapsto \Phi_F(t,x)$$

die maximale Integeralkurve aus dem Satz 1.24 mit Anfangswert $\Phi_F(0,x) = x$ ist. Wenn F $r \in \mathbb{N}$ mal stetig differenzierbar ist, dann ist Φ_F ein r mal stetig differenzierbarer lokaler Fluss mit r mal stetig differenzierbarer partieller Ableitung $\frac{\partial \Phi_F}{\partial t}$.

Umgekehrt ist ein partiell nach t differenzierbarer lokaler Fluss Φ mit lokal lipschitzstetigem $F(x) = \frac{\partial \Phi(0,x)}{\partial t}$ die Einschränkung von Φ_F auf eine offene Menge $W \subset W_F$.

Beweis: Sei $F : X \to V$ ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld auf X. Sei W_F die Vereinigung in $\mathbb{R} \times X$ aller kartesischen Produkte der Definitionsbereiche der eindeutigen maximalen Lösungen aus Satz 1.24 mit Anfangswert $q(0) = x \in X$ mit den Mengen $\{x\}$. Sei $\Phi_F : W_F \to X$ für jedes $x \in X$ definiert durch die entsprechende maximale Lösung. Wenn $(s,x) \in W_F$ und $(t, \Phi_F(s,x)) \in W_F$ liegt, dann stimmen die beiden Integralkurven mit Anfangswert $q(0) = x$ und $q(s) = \Phi_F(s,x)$ wegen der Eindeutigkeit von Integralkurven auf der Schnittmenge der Definitionsbereich überein. Also bilden sie zusammen eine Integralkurve auf einem Intervall das sowohl 0, als auch s und $t+s$ enthält, und $q(0) = x$, $q(s) = \Phi_F(s,x)$ und $q(t+s) = \Phi_F(t, \Phi_F(s,x))$ erfüllt. Also folgt

$$(t+s, x) \in W_F \text{ und } \Phi_F(t+s, x) = \Phi_F(t, \Phi_F(s,x)).$$

Um die Offenheit von W_F und die Differenzierbarkeit von Φ_F zu zeigen, wenn $F : X \to V$ r mal stetig differenzierbar ist, sei $(t,x) \in W_F$ und o.B.d.A. $t > 0$. In dem Beweis von Satz 1.22 wählen wir für alle $s \in [0,1]$ ein $\epsilon_s > 0$ und eine offene Umgebung U_s von $\Phi_F(s,x)$, so dass Φ_F auf $(-\epsilon_s, \epsilon_s) \times U_s$ stetig ist. Sei $\epsilon > 0$ das Minimum der ϵ_s einer endlichen Teilüberdeckung der Überdeckung von $\{\Phi_F(s,x) \mid s \in [0,t]\}$ durch $(U_s)_{s \in [0,t]}$. Für die kleinste natürliche Zahl $n > \frac{t}{\epsilon}$ ist dann $\Phi_F(s, \cdot)^n$ für $s \in (0, \epsilon)$ auf einer offenen Umgebung U von x definiert. Dann enthält W_F die Umgebung $(0, n\epsilon) \times U$ von (t,x). Wenn F r mal stetig differenzierbar ist, dann ist Φ_F wegen Satz 1.23 auch r-mal stetig partiell nach x differenzierbar. Außerdem ist auch $\frac{\partial \Phi_F}{\partial t}(t,x) = F(\Phi_F(t,x))$ r mal stetig nach x differenzierbar. Induktiv sind die partiellen Ableitungen von Φ_F nach t bis zur

Ordnung $r+1$ stetig partiell nach x differenzierbar. Also sind Φ_F und $\frac{\partial \Phi_F}{\partial t}$ $r$mal stetig differenzierbar.

Sei jetzt $\Phi : W \to X$ ein partiell nach t stetig differenzierbarer lokaler Fluss auf X, dessen partielle Ableitung nach t lokal lipschitzstetig ist. Wegen der Bedingung (ii) gilt

$$\frac{\partial \Phi(t+s,x)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi(t+s,x)}{\partial s} = \frac{\partial \Phi(s,\Phi(t,x))}{\partial s} \text{ für alle } (t,x) \in W \text{ und } (s,\Phi(t,x)) \in W.$$

Dann ist die partielle Ableitung $\frac{\partial \Phi(s,\Phi(t,x))}{\partial s}$ bei $s = 0$ gleich der partiellen Ableitung $\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t}$. Also ist $t \mapsto \Phi(t,x)$ die eindeutige Integralkurve durch x des lokal lipschitzstetigen Vektorfeldes $F : X \to V$ mit $F(x) = \frac{\partial \Phi(0,x)}{\partial t}$. Aus der Eindeutigkeit von Integralkurven folgt, dass für jedes $x \in X$ die Bahn $t \mapsto \Phi(t,x)$ eine Einschränkung der maximalen Integralkurve $t \mapsto \Phi_F(t,x)$ des Vektorfeldes F durch x ist. Also ist W eine offene Teilmenge von W_F und Φ die Einschränkung von Φ_F auf W. **q.e.d.**

Aus Lemma 1.32 und Satz 1.33 folgt

Korollar 1.34. *Sei $F : X \to V$ ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge X eines Banachraumes V. Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge $V_t = \{x \in X | (t,x) \in W_F\}$ eine offene Teilmenge von X und die Abbildung $x \mapsto \Phi_F(t,x)$ ist ein Homöomorphismus von V_t nach V_{-t} mit Umkehrabbildung $x \mapsto \Phi_F(-t,x)$. Wenn F r mal stetig differenzierbar ist, dann sind diese Abbildungen auch r mal stetig differenzierbar. Außerdem gibt es für alle $x \in X$ ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $t \in (-\epsilon,\epsilon)$ die Mengen V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x sind.* **q.e.d.**

Definition 1.35. (i) *Ein lokaler Fluss $\Phi : W \to X$ mit $W = \mathbb{R} \times X$ heißt global.*

(ii) *Ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld $F : X \to V$ auf einer offene Teilmenge eines Banachraumes V heißt vollständig, wenn der entsprechende Fluss Φ_F global ist.*

Offenbar definieren stetige globale Flüsse und vollständige lokal lipschitzstetige Vektorfelder zeitkontinuierliche dynamische Systeme. Allerdings definieren nicht alle stetigen Vektorfelder, deren Integralkurven alle auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind, auch ein zeitkontinuierliches dynamisches System mit $G = \mathbb{R}$

Beispiel 1.36. *Sei F folgendes stetige Vektorfeld auf $\mathbb{R}$:*

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(x) = \begin{cases} \frac{2x}{|x|}\sqrt{|x|} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Offenbar ist F auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ lokal lipschitzstetig. Die Integralkurven durch $x > 0$ sind für $t \in [-\sqrt{|x|}, \infty)$ gegeben durch $\Phi(t,x) = (\sqrt{|x|} + t)^2$ und für $t > -\sqrt{|x|}$ auch *eindeutig. Die Integralkurven durch $x < 0$ sind für $t \in [-\sqrt{|x|}, \infty)$ gegeben durch $\Phi(t,x) = -(\sqrt{|x|}+t)^2$ und für $t > -\sqrt{|x|}$ eindeutig. Für $t > 0$ bildet $\Phi(t,\cdot)$ die Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ also auf die Menge $(-\infty, -t^2) \cup (t^2, \infty)$ ab. Wegen den Bedingungen (i) und (ii) kann $\Phi(-t,\cdot)$ dann alle Punkte in $[-t^2, t^2]$ nur auf 0 abbilden. Dann müsste $\Phi(t,0)$ gleich allen Punkten in $[-t^2, t^2]$ sein. Also gibt es kein dynamisches System zu F.*

Satz 1.37. *Auf einem kompakten metrischen Raum X sind alle lokalen Flüsse global.*

Beweis: Wegen Lemma 1.32 gibt es für jedes $x \in X$ ein $\epsilon_x > 0$ und eine offene Umgebung U_x von $x \in X$, so dass der Definitionsbereich W die Menge $(-\epsilon_x, \epsilon_x) \times U_x$ enthält. Die Überdeckung $(U_x)_{x \in X}$ von X, hat eine endliche Teilüberdeckung. Sei ϵ das Minimum der entsprechenden ϵ_x. Dann folgt aus der Bedingung (ii) des Flusses, dass für jedes $(s,x) \in W$ die Menge W auch $\{(t+s,x) \in \mathbb{R} \times X | t \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ enthält. Aus $\{(0,x) | x \in X\} \subset W$ folgt induktiv für alle $l \in \mathbb{N}$, dass W auch die Menge

$$(-(l+1)\epsilon, (l+1)\epsilon) \times X = \{(t+s,x) \in \mathbb{R} \times X \mid (s,x) \in (-l\epsilon, l\epsilon) \times X, t \in (-\epsilon, \epsilon)\}$$

enthält. Also ist W gleich $\mathbb{R} \times X$. **q.e.d.**

Wir haben in dem Beweis nur benutzt, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass der Definitionsbereich W des Flusses Φ von F die Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times X$ enthält, bzw. die Integralkurven von F mit allen Anfangswerten $x(0) \in X$ auf $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert sind.

Korollar 1.38. **(i)** *Ein lokaler Fluss auf einem metrischen Raum X ist genau global, wenn W für ein $\epsilon > 0$ die Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times X$ enthält.*

(ii) *Der lokale Fluss eines auf einer offenen Menge X eines Banachraumes lokal lipschitzstetigen Vektorfeldes F ist genau dann global, wenn für ein $\epsilon > 0$ die Lösungen von $\dot{q}(t) = F(q(t))$ mit beliebigen Anfangswerten auf $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert sind.*

(iii) *Der Fluss eines auf einer offenen Teilmenge eines Banachraumes lokal lipschitzstetigen Vektorfeldes, das außerhalb einer kompakten Menge Null ist, ist global.*

(iv) *Auf einem Banachraum definieren beschränkte und lokal lipschitzstetige Vektorfelder globale Flüsse.*

(v) *Auf einem Banachraum definieren lipschitzstetige Vektorfelder globale Flüsse.*

Beweis: (i)-(ii) haben wir im Beweis von Satz 1.37 gezeigt.
(iii): Die maximalen Lösungen der Anfangswertrpobleme durch eine Nullstelle von F sind auf ganz $\mathbb{R}$ konstant. Für die anderen Anfangswerte verfahren wir wie im Beweis von Satz 1.37. Also enthält $W \supset (-\epsilon, \epsilon) \times X$ für ein $\epsilon > 0$ und (iii) folgt aus (i).
(iv): Die Bedingungen (ii)-(iii) im Satz 1.24 gelten weder bei a noch bei b.

(v): Sei $F : V \to V$ ein lipschitzstetiges Vektorfeld auf einem Banachraum V mit Lipschitzkonstante L. Im Satz von Picard-Lindelöff haben wir gezeigt, dass die Integralkurve durch $x \in X$ in dem Ball $B(x, \delta)$ mit $\delta > 0$ auf $(-\epsilon, \epsilon)$ mit

$$\epsilon < \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{\|F(x)\| + L\delta} \right\}$$

definiert ist. Mit $\delta = \|F(x)\| + 1$ wählen wir $\epsilon = \frac{1}{1+L}$. Also folgt (v) aus (ii). **q.e.d.**

Korollar 1.39. **(i)** *Für einen globalen stetigen Fluss auf dem metrischen Raum X ist*

$$\Phi(\cdot, \cdot) : \quad \mathbb{R} \to C(X, X), \quad t \mapsto \Phi(t, \cdot)$$

ein Homomorphismus von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der Homöomorphismen von X.

Umgekehrt definiert jeder Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der bijektiven Abbildungen von X einen globalen Fluss.

(ii) *Sei $F : X \to V$ ein vollständiges lokal lipschitzstetiges Vektorfeld auf einer offene Menge X eines Banachraumes V. Dann definiert der entsprechende Fluss $\Phi_F : \mathbb{R} \times X \to X$ einen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der Homöomorphismen von X.*

Beweis: (i) Offenbar ist $W = \mathbb{R} \times X$ dazu äquivalent, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $V_t = X$. Die Bedingung (ii) besagt genau, dass $t \mapsto \Phi(t, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Also folgt die Aussage aus dem Lemma 1.32.

(ii) folgt aus (i) und und Satz 1.33. **q.e.d.**

Übungsaufgabe 1.40. *Sei $F : X \to V$ ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge X eines Banachraumes und $f : X \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.*

(i) *Zeige, dass für $C < f < C^{-1}$ mit $0 < C < 1$ alle maximalen Integralkurven von fF die Verkettung von den entsprechenden Integralkurven von F mit bijektiven Abbildungen von den entsprechenden maximalen Intervallen aufeinander sind.*

(ii) *Zeige dass fF lokal lipschitzstetig ist, wenn f lokal lipschitzstetig ist.*

(iii) *Sei $f > C > 0$ lokal lipschitzstetig und F und fF vollständig. Zeige, dass dann die beiden entsprechenden dynamischen Systeme die gleichen Trajektorien (als Mengen) haben, aber als dynamische Systeme im Allgemeinen verschieden sind.*

(iv) *Zeige, dass im Fall $X = V$ das Vektorfeld $\frac{F}{1+\|F\|}$ vollständig ist, und die Mengen der Integralkurven mit denen von F übereinstimmen.*

Hinweis zu (i): Nimm an, dass sich die Integralkurven von fF schreiben lassen als die Verkettung einer reellen Funktion mit den Integralkurven von F und leite eine Differentialgleichung für diese reelle Funktion her. Diese Differentialgleichung läßt sich dann einfach lösen.

1.6 Elementare Lösungsverfahren

In diesem Abschnitt wollen wir uns auf gewöhnliche Differentialgleichungen beschränken, in denen die gesuchte Funktion eine reelle Funktion ist. Die Differentialgleichungen erster Ordnung haben also die Form

$$\dot{q}(t) = f(t, q(t)).$$

Wenn es uns gelingt, die Funktion f als einen Quotienten zu schreiben

$$f(t, q) = \frac{g(t)}{h(q)}$$

dann können wir die Differentialgleichung umformen zu

$$\dot{q}(t)h(q(t)) = g(t).$$

Wenn H eine Stammfunktion von h ist und G eine Stammfunktion von G, dann gilt

$$\frac{d}{dt}H(q(t)) = \frac{d}{dt}G(t).$$

Also folgt dann für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = \frac{g(t)}{h(q(t))} \text{ mit } q(t_0) = q_0$$

$$H(q(t)) - H(q_0) = G(t) - G(t_0).$$

Wenn wir jetzt noch annehmen, dass H eine Umkehrfunktion besitzt, was natürlich auf allen Intervallen gilt, auf denen h positiv bzw. negativ ist, dann erhalten wir also als Lösung des Anfangswertproblems

$$q(t) = H^{-1}(G(t) - G(t_0) + H(q_0)).$$

Satz 1.41. *(Trennung der Variablen) Seien g und h stetige Funktionen auf einem offenen Intervall I und h sei entweder positiv oder negativ. Dann sind sowohl g als auch h auf allen kompakten Teilintervallen von I Riemann-integrabel. Seien G und H Stammfunktionen von g bzw. h. Dann ist H entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend, besitzt also eine Umkehrabbildung $H^{-1} : I' \to I$ von einem offenen Intervall I' auf I. Dann ist die eindeutige Lösung der Anfangswertprobleme*

$$\dot{q}(t) = \frac{g(t)}{h(q(t))} \textit{ mit } q(t_0) = q_0$$

gegeben durch $$q(t) = H^{-1}(G(t) - G(t_0) + H(q_0)).$$

Sie ist auf dem Intervall definiert, auf dem $G(t) - G(t_0) + H(q_0)$ in I' liegt. **q.e.d.**

Wenn es uns gelingt eine Funktion $F(t,q)$ zu finden, so dass gilt

$$f(t,q) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t,q)}{\frac{\partial F}{\partial q}(t,q)},$$

dann können wir die Differentialgleichung umformen zu

$$\frac{d}{dt}F(t,q(t)) = \frac{\partial F(t,q(t))}{\partial t} + \frac{dq(t)}{dt}\frac{\partial F(t,q(t))}{\partial q} = 0.$$

Also gilt dann für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t)\frac{\partial F(t,q(t))}{\partial q} + \frac{\partial F(t,q(t))}{\partial t} = 0 \quad \text{mit} \quad q(t_0) = q_0$$

$$F(t,q(t)) = F(t_0,q_0).$$

Diese Gleichung beschreibt implizit die Lösung des Anfangswertproblems.

Satz 1.42. *(Exakte Differentialgleichungen) Sei $(t,q) \mapsto F(t,q)$ differenzierbar. Dann sind alle Lösungen des Anfangswertproblems*

$$\dot{q}(t)\frac{\partial F(t,q(t))}{\partial q} + \frac{\partial F(t,q(t))}{\partial t} = 0 \quad \mathit{mit} \quad q(t_0) = q_0$$

implizit gegeben durch $F(t,q(t)) = F(t_0,q_0)$. **q.e.d.**

Für zwei Funktionen $g(t,q)$ und $h(t,q)$ mit $f(t,q) = -\frac{g(t,q)}{h(t,q)}$, gibt es nicht immer eine Funktion $F(t,q)$ mit $\frac{\partial F(t,q)}{\partial t} = g(t,q)$ und $\frac{\partial F(t,q)}{\partial q} = h(t,q)$.

Lemma 1.43. *(Stammfunktion) Seien g und h zwei stetig differenzierbare Funktionen auf einem konvexen offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Dann gibt es auf Ω genau dann eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $F(t,q)$ mit*

$$\frac{\partial F(t,q)}{\partial t} = g(t,q) \ \mathit{und} \ \frac{\partial F(t,q)}{\partial q} = h(t,q), \ \mathit{wenn\ gilt} \ \frac{\partial g(t,q)}{\partial q} = \frac{\partial h(t,q)}{\partial t}.$$

Beweis: Sei $(t_0,q_0) \in \Omega$ beliebig. Dann definieren wir die Funktion

$$F(t,q) = (t-t_0)\int_0^1 g(t_s,q_s)ds + (q-q_0)\int_0^1 h(t_s,q_s)ds,$$

mit $t_s = t_0+s(t-t_0)$ und $q_s = q_0+s(q-q_0)$. Weil die Funktionen g und h differenzierbar sind, sind sie stetig und damit auch integrierbar. Die Ableitungen von F sind dann

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(t,q)}{\partial t} &= \int_0^1 g(t_s,q_s)ds + (t-t_0)\int_0^1 \frac{\partial g(t_s,q_s)}{\partial t}sds + (q-q_0)\int_0^1 \frac{\partial h(t_s,q_s)}{\partial t}sds\\
&= \int_0^1 g(t_s,q_s)ds + \int_0^1 \frac{dg(t_s,q_s)}{ds}sds = g(t_s,q_s)s|_{s=0}^{s=1} = g(t,q),\\
\frac{\partial F(t,q)}{\partial q} &= \int_0^1 h(t_s,q_s)ds + (q-q_0)\int_0^1 \frac{\partial h(t_s,q_s)}{\partial q}sds + (t-t_0)\int_0^1 \frac{\partial g(t_s,q_s)}{\partial q}sds\\
&= \int_0^1 h(t_s,q_s)ds + \int_0^1 \frac{dh(t_s,q_s)}{ds}sds = h(t_s,q_s)s|_{s=0}^{s=1} = h(t,q).
\end{aligned}$$

Wenn umgekehrt $\frac{\partial F(t,q)}{\partial t} = g(t,q)$ und $\frac{\partial F(t,q)}{\partial q} = h(t,q)$ gilt, dann folgt aus dem Satz von Schwarz

$$\frac{\partial g(t,q)}{\partial q} = \frac{\partial^2 F(t,q)}{\partial q\partial t} = \frac{\partial^2 F(t,q)}{\partial t\partial q} = \frac{\partial h(t,q)}{\partial t}.$$ **q.e.d.**

Wir können diese Aussage auf Vereinigungen von konvexen Gebieten verallgemeinern, solange nur die Vorschrift, gemäß der wir F fortsetzen, eindeutig ist. Das gilt für alle einfach zusammenhängenden Gebiete Ω, d.h. solche Gebiete, die für jede stetige Abbildung $p : S^1 \to \Omega$ eine Homotopie zu einer konstanten Abbildung besitzen, d.h. also, es gibt zu jedem solchen p eine stetige Abbildung $[0,1]\times S^1 \to \Omega$, die auf $\{0\}\times S^1$ gerade gleich p und die auf $\{1\}\times S^1$ konstant ist. Anschaulich bedeutet das, dass jeder geschlossene Weg in Ω zu einem Punkt zusammengezogen werden kann.

Es gibt auch Fälle, in denen die Differentialgleichung

$$\dot{q}(t)h(t,q(t)) + g(t,q(t)) = 0$$

erst mit einer Funktion erweitert werden muss, bevor sie exakt ist.

Beispiel 1.44. *Die Differentialgleichung* $$2t\dot{q} + q(t) = 0$$

ist nicht exakt, weil gilt $$\frac{\partial q}{\partial q} = 1 \neq 2 = \frac{\partial 2t}{\partial t}.$$

die Differentialgleichung $$2tq(t)\dot{q}(t) + q^2(t) = 0$$

ist aber exakt, weil gilt $$\frac{\partial q^2}{\partial q} = 2q = \frac{\partial}{\partial t}2qt.$$

Korollar 1.45. *(Eulersche Multiplikator) Wenn eine Differentialgleichung durch Multiplikation mit einer Funktion auf die Form gebracht werden kann*

$$\dot{q}(t)h(t,q(t)) + g(t,q(t)) = 0 \qquad \textit{mit} \qquad \frac{\partial h(t,q)}{\partial t} = \frac{\partial g(t,q)}{\partial q},$$

dann existiert auf einfach zusammenhängenden Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine Funktion F, so dass die Differentialgleichung exakt ist

$$\frac{d}{dt}F(t,q(t)) = \dot{q}(t)\frac{\partial F(t,q(t))}{\partial q} + \frac{\partial F(t,q(t))}{\partial t} = 0.$$

Dann gilt für die Lösungen des entsprechenden Anfangswertproblems mit $q(t_0) = q_0$

$$F(t,q(t)) = F(t_0,q_0).$$ **q.e.d.**

Um für eine Differentialgleichung von der Form

$$\dot{q}(t)h(t,q(t)) + g(t,q(t)) = 0$$

einen Eulerschen Multiplikator $M(t,q(t))$ zu finden, müssen wir die Gleichung

$$\frac{\partial M(t,q)}{\partial t}h(t,q) + M(t,q)\frac{\partial h(t,q)}{\partial t} = \frac{\partial M(t,q)}{\partial q}g(t,q) + M(t,q)\frac{\partial g(t,q)}{\partial q}$$

lösen. Das ist eine partielle Differentialgleichung, die im Allgemeinen nicht leichter zu lösen ist als die ursprüngliche Differentialgleichung. In einigen Fällen können wir Lösungen erraten oder einfache Lösungen berechnen, die nur von t bzw. q abhängen.

Zuletzt bemerken wir, dass einige Differentialgleichungen durch eine Substitution in eine der Differentialgleichungen verwandelt werden können, die wir lösen können.

Beispiel 1.46. (i)

$$\dot{q}(t) = f(at + bq(t) + c) \ \textit{mit}\ a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Für $b = 0$ können wir die Differentialgleichung direkt integrieren. Für $b \neq 0$ führt die Substitution $p(t) = at + bq(t) + c$ auf die Differentialgleichung $\dot{p}(t) = a + bf(p(t))$ oder auch $\frac{\dot{p}(t)}{a+bf(p(t))} = 1$. Diese Differentialgleichung können wir mit der Methode der Trennung der Variablen lösen: Sei F eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{a+bf(x)}$. Dann erfüllen die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{q}(t) = f(at + bq(t) + c) \qquad \textit{mit} \qquad q(t_0) = q_0$$

die Gleichung $F(at + bq(t) + c) - F(at_0 + bq_0 + c) = t - t_0$.

(ii) $\dot{q} = f\left(\frac{q}{t}\right)$ *homogene Differentialgleichung. Die Substitution* $p(t) = \frac{q(t)}{t}$ *führt zu*

$$\dot{p}(t) = \frac{f(p(t)) - p(t)}{t}.$$

Diese Differentialgleichung können wir durch Trennung der Variablen lösen:

$$\frac{\dot{p}(t)}{f(p(t)) - p(t)} = \frac{1}{t}.$$

(iii)

$$\dot{q} = f\left(\frac{at + bq(t) + c}{\alpha t + \beta q(t) + \gamma}\right) \quad \text{mit } a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Wenn die Determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$ *ist, dann ist entweder* $\alpha t + \beta q(t)$ *ein Vielfaches von* $at + bq(t)$ *oder umgekehrt. Deshalb haben wir dann ein Beispiel der Art in (i). Wenn diese Determinante* $\neq 0$ *ist, dann hat das lineare Gleichungssystem*

$$at + bq + c = 0 \qquad\qquad \alpha t + \beta q + \gamma = 0$$

genau eine Lösung (t_1, q_1)*. Für die Funktion* $p(t) = q(t + t_1) - q_1$ *erhalten wir*

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= f\left(\frac{a(t + t_1) + bq(t + t_1) + c - (at_1 + bq_1 + c)}{\alpha(t + t_1) + \beta q(t + t_1) + \gamma - (\alpha t_1 + \beta q_1 + \gamma)}\right) \\ &= f\left(\frac{a + b\frac{q(t+t_1)-q_1}{t}}{\alpha + \beta\frac{q(t+t_1)-q_1}{t}}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{p(t)}{t}}{\alpha + \beta\frac{p(t)}{t}}\right)\end{aligned}$$

mit $p(t_0 - t_1) = q(t_0) - q_1 = q_0 - q_1$*. Das ist ein Beispiel von der Form (ii).*

(iv) *Bernoullische Differentialgleichung:*

$$\dot{q}(t) + g(t)q(t) + h(t)q^{\alpha}(t) = 0 \quad \alpha \neq 1.$$

Die Substitution $p(t) = q^{1-\alpha}(t)$ *führt zu der Differentialgleichung*

$$\dot{p}(t) = (1 - \alpha)\dot{q}(t)q^{-\alpha}(t) = (\alpha - 1)g(t)p(t) + (\alpha - 1)h(t).$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung, die wir im Abschnitt 1.7 betrachten werden.

1.7 Lineare Differentialgleichungen

Definition 1.47. *Eine Differentialgleichung von der Form*

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$$

heißt lineare gewöhnliche Differentialgleichung auf einem (offenen) Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Hierbei ist u eine gesuchte Funktion von I mit Werten in einem Vektorraum V (z.B. $\mathbb{K}^n$) und A eine Abbildung von I in die linearen Abbildungen von V auf V (oder im Falle eines normierten Vektorraumes $\mathcal{L}(V)$, die linearen stetigen Abbildungen von V nach V). Im Fall von $V = \mathbb{K}^n$ können wir $\mathcal{L}(V)$ mit den $n \times n$ Matrizen $\mathbb{K}^{n\times n}$ identifizieren und V mit den Spaltenvektoren in $\mathbb{K}^n$. Dann ist $A(t)u(t)$ das Matrix-Produkt der $n\times n$-Matrix $A(t)$ mit dem Spaltenvektor $u(t)$, also ein Spaltenvektor in $\mathbb{K}^n$. Schließlich ist b eine Abbildung von I nach V. Wenn $b(t) = 0$ ist, dann heißt die Differentialgleichung homogen, andernfalls inhomogen. Wenn A und b nicht von t abhängen, dann heißt die Differentialgleichung autonom, andernfalls nicht autonom.

Satz 1.48. *Die Menge aller Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung bildet einen Vektorraum über $\mathbb{K}$. Wenn also u und $\tilde{u}$ Lösungen sind, dann sind auch $u+\tilde{u}$ und λu für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung. Die Menge aller Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung bildet einen affinen Raum. Eine allgemeine Lösung ist die Summe einer speziellen Lösung und einer allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen linearen Differentialgleichung.*

Beweis: Seien u und $\tilde{u}$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$ bzw. $\dot{\tilde{u}}(t) = A(t)\tilde{u}(t) + b(t)$, dann erfüllt $u - \tilde{u}$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}(u(t) - \tilde{u}(t)) = A(t)(u(t)) - \tilde{u}(t)),$$

also die entsprechende homogene Differentialgleichung. Genauso gilt auch für alle $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t) - \tilde{u}(t)) = A(t)\lambda(u(t)) - \tilde{u}(t)).$$

Deshalb ist der Raum aller Lösungen eines homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems ein Vektorraum und die allgemeine Lösung eines inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems ist die Summe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung des entsprechenden homogenen Systems. **q.e.d.**

Satz 1.49. *(Existenz und Eindeutigkeit des linearen Anfangswertproblems) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes (nicht notwendig beschränktes) Intervall, $A : I \to \mathcal{L}(V)$ eine stetige Abbildung von I in die beschränkten stetigen linearen Abbildungen des Banachraums V und $b : I \to V$ stetig. Dann besitzt für jedes $t_0 \in I$ und $u_0 \in V$ das Anfangswertproblem $\dot{u}(t) = A(t) \cdot u(t) + b(t)$ mit $u(t_0) = u_0$ genau eine differenzierbare Lösung $u : I \to V$.*

Beweis: Wir passen den Beweis des Satzes von Picard-Lindelöff an die augenblickliche Situation an. Wir zeigen die Aussage zunächst auf einem kompaktem Teilintervall $J \subset I$. Sei $\|A\|_\infty$ das Maxmimum der stetigen Funktionen $t \mapsto \|A(t)\|$ auf J. Die Abbildung

$$F : C(J', V) \to C(J', V), \quad u \mapsto F(u) \quad \text{mit} \quad F(u)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)u(s) + b(s))ds$$

ist für jedes kompakte Teilintervall $J' \ni t_0$ von J lipschitzstetig:

$$\|F(u)(t) - F(\tilde{u})(t)\| \leq \int_{t_0}^{y} \|A(s)(u(s) - \tilde{u}(s))\|ds \leq \sup|t - t_0|\|A\|_\infty\|u - \tilde{u}\|_\infty,$$

mit dem Produkt der Intervallänge $|J'|$ von J' mit $\|A\|_\infty$ als Lipschitzkonstante. Also können wir jedes kompakte Intervall J durch endlich viele $J = J_1 \cup \ldots \cup J_L$ überdecken, auf denen F mit geeigneten Anfangswerten $(t_l, u_l) \in J_l \times V$ jeweils die Vorraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen der entsprechenden Anfangswertprobleme können wir jedes Anfangswertproblem mit $(t_0, u_0) \in J \times V$ eindeutig auf ganz J lösen. Wegen dieser Eindeutigkeit können wir alle diese Lösungen zu eine globalen Lösung auf I zusammensetzen. **q.e.d.**

Im Lemma 1.59 werden wir zeigen, dass die Iteration beginnend mit $u = 0$ auf jedem kompakten Intervall J konvergiert. Aus den beiden vorangehenden Sätzen folgt:

Korollar 1.50. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, V ein Banachraum, und $A : I \to \mathcal{L}(V)$ und $b : I \to V$ stetige Abbildungen. Dann induziert für jedes $t_0 \in I$ die Abbildung $C(I, V) \to V, u \mapsto u(t_0)$ einen linearen Isomorphismus von der Menge aller Lösungen der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$ auf V. Für Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$ induziert diese Abbildung einen affinen Isomorphismus von der Menge aller Lösungen nach V.* **q.e.d.**

Insbesondere haben die Lösungsräume der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungssysteme erster Ordnung dieselbe Dimension wie der Vektorraum, in dem die Werte der gesuchten Funktion liegen. Für reelle gewöhnliche lineare Differentialgleichungen n–ter Ordnung stimmt die Dimension des Lösungsraumes mit der Ordnung überein, wie wir das erwartet haben. Wir wollen uns jetzt der Frage zuwenden, wie wir diese Lösungen ausrechnen können.

Beispiel 1.51. *Wir stellen uns eine Insel vor, die von Störchen, Fröschen und Fliegen bewohnt wird. Dabei stellen wir uns die Nahrungskette so vor, dass die Störche $S(t)$ sich sowohl von den Fröschen als auch von den Fliegen ernähren, die Frösche $F(t)$ nur von* *den Fliegen und die Fliegen $f(t)$ von dem Aas der Frösche und Störche. Wir nehmen an, dass das Tierwachstum nur von der vorhandenen Nahrungsmenge gesteuert wird:*

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= F(t) + f(t) \quad -2S(t) \\ \dot{F}(t) &= -S(t) + f(t) \\ \dot{f}(t) &= S(t) + F(t) \quad -2f(t) \end{aligned}$$

Beispiel 1.52. *Seien $A : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ stetig. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t), \quad u(t_0) = u_0$$

eine eindeutige Lösung, die wir jetzt bestimmen wollen. Dazu betrachten wir zunächst das entsprechende homogene Anfangswertproblem mit $b = 0$. Wenn u eine Nullstelle bei einem $t_1 \in \mathbb{R}$ hat, dann stimmt u mit der eindeutigen Lösung $u = 0$ des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems mit $u(t_1) = 0$ überein. Andernfalls hat u keine Nullstelle und die Differentialgleichung wird mit der Trennung der Variablen gelöst:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} &= \frac{d}{dt}\ln(u(t)) = A(t) \qquad \textit{mit} \qquad u(t_0) = u_0, \\ \ln(u(t)) &= \int_{t_0}^{t} A(s)ds + \ln(u_0) \qquad \textit{bzw.} \qquad u(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) u_0. \end{aligned}$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung setzen wir mit einer variablen Konstante an:

$$u(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) C(t) \quad \textit{mit} \quad \dot{u}(t) = A(t)u(t) + \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) \dot{C}(t).$$

Mit dieser Variation der Konstanten erhalten wir folgende spezielle Lösung:

$$u(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) \int_{t_0}^{t} \dot{C}(s)ds = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\int_{t_0}^{s} A(r)dr\right) b(s)ds.$$

Diese Lösung interpretieren wir als das Integral $\int_{t_0}^{t} u_s(t)ds$ über die Lösungen folgender *homogener Anfangswertrpobleme:*

$$\dot{u}_s(t) = A(t)u_s(t) \quad \textit{mit} \quad u_s(s) = b(s) \quad \textit{für alle} \quad s \in \mathbb{R}$$
$$u_s(t) = \exp\left(\int_s^t A(r)dr\right) b(s) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(r)dr\right) \exp\left(-\int_{t_0}^s A(r)dr\right) b(s).$$

Dann folgt $\displaystyle \frac{d}{dt}\int_{t_0}^t u_s(t)ds = u_t(t) + \int_{t_0}^t A(t)u_s(t)ds = b(t) + A(t)\int_{t_0}^t u_s(t)ds.$

Also löst $\int_{t_0}^t u_s(t)ds$ *das Anfangswertproblem* $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$ *mit* $u(t_0) = 0$.

Wir erhalten also die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems als die Summe

$$u(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s)ds\right)\left(u_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^s A(r)dr\right) b(s)ds\right).$$

des homogenen Anfangswertproblems und dem Integral über alle Anfangswertprobleme des homogenen Problems, wobei wir als Anfangswerte jeweils den inhomogenen Term einsetzen. Dieses Verfahren wollen wir jetzt verallgemeinern.

Satz 1.53. *Seien $A : I \to \mathcal{L}(V)$ und $b : I \to V$ stetige Abbildung auf einem offenen nicht notwendigerweise beschränkten Intervall. Dann setzen sich die eindeutigen Lösungen $u_s(t)$ der Anfangswertprobleme*

$$\dot{u}_s(t) = A(t)u_s(t) \qquad \textit{mit} \qquad u_s(s) = b(s) \qquad \textit{für alle} \qquad s \in I$$

zu einer stetigen Abbildung $I \times I \mapsto V \quad (s,t) \mapsto u_s(t)$ zusammen. Die eindeutige Lösung des inhomogenen Anfagnswertproplems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \qquad \textit{mit} \qquad u(t_0) = u_0$$

ist die Summe der Lösung des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems und

$$\int_{t_0}^t u_s(t)ds.$$

Beweis: Für jedes $s \in I$ gibt es eine eindeutige Lösung u_s des Anfangswertproblems

$$\dot{u}_s(t) = A(t)u_s(t) \qquad \text{mit} \qquad u_s(s) = b(s) \qquad \text{für alle} \qquad s \in I.$$

Wir werden nach dem Lemma 1.59 diese Lösungen explizit durch die sogenannte Fundamentallösung ausdrücken. Daraus folgt, dass $(s,t) \mapsto u_s(t)$ eine stetige Abbildung von $I \times I$ nach V ist. Für ein kompaktes Teilintervall $[\alpha,\beta] \subset I$ ist diese Abbildung auf $(s,t) \in [\alpha,\beta]^2$ gleichmäßig stetig. Dann sind $t \mapsto (s \mapsto u_s(t))$ und $t \mapsto (s \mapsto A(t)u_s(t))$ stetige Abbildungen von $[\alpha,\beta]$ nach $C([\alpha,\beta],V)$. Dabei ist die erste auf $t \in (\alpha,\beta)$ differenzierbar und die zweite die Ableitung der ersten. Für $t_0 \in (\alpha,\beta)$ ist mit Satz 1.20

$$(\alpha,\beta)^2 \to V, \quad (x,t) \mapsto F(x,t) \quad \text{mit} \quad F(x,t) = \int\limits_{t_0}^{x} u_s(t)ds$$

partiell stetig nach x differenzierbar mit $\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = u_x(t)$. Weil das Integral stetig und linear ist, ist F partiell nach t differenzierbar mit $\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = \int_{t_0}^{x} A(t)u_s(t)ds$. Also folgt

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{t_0}^{t} u_s(t)ds = u_t(t) + \int\limits_{t_0}^{t} A(t)u_s(t)ds = b(t) + A(t)\int\limits_{t_0}^{t} u_s(t)ds \quad \text{und} \quad \int\limits_{t_0}^{t_0} u_s(t)ds = 0.$$

Diese Funktion löst das inhomogene Anfangswertproblem mit $u_0 = 0$. Wegen Satz 1.48 ist die eindeutige Lösung des allgemeinen Anfangswertproblems die Summe dieser Funktion und der Lösung des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems. **q.e.d.**

Damit genügt es das homogene Anfangswertproblem zu lösen.

Satz 1.54. *(Exponentialfunktion) Die Potenzreihe* $\exp(A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ $(A^0 = \mathbb{1})$ *konvergiert für alle* $A \in \mathcal{L}(V)$, *wenn* V *ein Banachraum ist. Außerdem gilt für alle* $t \in \mathbb{R}$

$$\exp(tA) = \mathbb{1} + \int\limits_{0}^{t} A\exp(sA)ds.$$

Beweis: Wegen $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ folgt $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. Dann folgt die Behauptung aus den entsprechenden Aussagen für die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$. **q.e.d.**

Korollar 1.55. *(Lösung des Anfangswertproblems mit autonomer homogener Differentialgleichung) Das inhomogene Anfangswertproblem*

$$\dot{u}(t) = Au(t) + b(t) \text{ mit } u(t_0) = u_0$$

mit $A \in \mathcal{L}(V)$ und stetigem $b : I \to V$ besitzt die eindeutige Lösung

$$u(t) = \exp((t - t_0)A)u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \exp((t - s)A)b(s)ds.$$

Beweis: Wegen den Eigenschaften der Exponentialfunktion löst $u(t) = \exp((t-t_0)A)u_0$ das homogene Anfangswertproblem. Dann folgt die Aussage aus Satz 1.53. **q.e.d.**

Damit bleibt noch das Problem der Berechnung der Exponentialfunktion. Dazu benutzen wir die Diagonalisierung bzw. Jordannormalform von Matrizen.

Beispiel 1.56. (i) *Das folgende Anfangswertproblem*

$$u^{(n)}(t) = 0 \text{ mit } u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1, \ldots, u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}$$

besitzt die Lösung

$$u(t) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{u_l t^l}{l!}.$$

Dieses Anfangswertproblem ist äquivalent zu dem Anfangswertproblem

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} u(t_0) \\ \dot{u}(t_0) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Weil die n-te Potenz dieser oberen Dreiecksmatrix verschwindet gilt tatsächlich

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{1} + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{t^l}{l!}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}^l.$$

(ii) *Der Beweis von $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$ für Zahlen A und B überträgt sich auf $A, B \in \mathcal{L}(V)$ mit $AB = BA$. Daraus folgt für $\lambda, t \in \mathbb{C}$*

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \exp(t\lambda) \cdot \exp\left(t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

(iii) *Die Matrix A lasse sich durch die invertierbare Matrix B diagonalisieren bzw. in Jordannormalform bringen:*

$$A = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} B^{-1} \text{ bzw. } B \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_n \end{pmatrix} B^{-1}$$

Dann gilt

$$\exp(tA) = B \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(t\lambda_n) \end{pmatrix} B^{-1} \text{ bzw. } B \begin{pmatrix} \exp(tJ_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(tJ_n) \end{pmatrix} B^{-1}.$$

Beispiel 1.57. *Die Matrix*

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

lässt sich diagonalisieren auf

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Also ist die Lösung des Beispiels der Störche, Frösche und Fliegen gegeben durch

$$\begin{pmatrix} S(t) \\ F(t) \\ f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(0) \\ F(0) \\ f(0) \end{pmatrix}.$$

Lemma 1.58 (Gronwall)**.** *Seien $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$, $a \in L^1([\alpha, \beta])$ eine nichtnegative Lebesgue integrable Funktion und $b, u \in L^\infty([\alpha, \beta])$ beschränkte messbare reelle Funktionen. Gilt die erste der folgenden Ungleichungen für fast alle $t \in [\alpha, \beta]$, dann auch die zweite:*

$$u(t) \leq b(t) + \int_\alpha^t a(s)u(s)ds \quad \Longrightarrow \quad u(t) \leq b(t) + \int_\alpha^t \exp\left(\int_s^t a(s')ds'\right) a(s)b(s)ds.$$

Beweis: Wir setzen die erste Ungleichung $n-1$ mal in sich selber ein und erhalten

$$u(t) \leq b(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_\alpha^t a(t_1) \int_\alpha^{t_1} a(t_2) \cdots \int_\alpha^{t_{k-1}} a(t_k)b(t_k)dt_k \cdots dt_1 +$$
$$+ \int_\alpha^t a(t_1) \int_\alpha^{t_1} a(t_2) \cdots \int_\alpha^{t_{n-1}} a(t_n)u(t_n)dt_n \cdots dt_1.$$

Weil a nicht negativ ist, folgen diese Ungleichungen induktiv aus der ersten Ungleichung. Durch vertauschen der Integrationen erhalten wir

$$\int_\alpha^t a(t_1) \int_\alpha^{t_1} a(t_2) \cdots \int_\alpha^{t_{n-1}} a(t_n)u(t_n)dt_n \cdots dt_1 = \int_{\alpha<t_n<\cdots<t_1<t} a(t_1)\cdots a(t_n)u(t_n)dt_1\cdots dt_n$$
$$= \int_\alpha^t \int_{t_n<\cdots<t_1<t} a(t_1)\cdots a(t_n)u(t_n)dt_1\cdots dt_n.$$

Alle Permutationen von $t_1,\ldots,t_{n-1}$ bilden die offenen Teilmengen

$$\{(t_1,\ldots,t_{n-1}) \in [t_n,t]^{n-1} \mid t_n < \cdots < t_1 < t\}$$

auf disjunkte Mengen ab, deren Vereinigung bis auf eine Nullmenge gleich $[t_n,t]^{n-1}$ ist. Die Integrale von $a(t_1)\cdots a(t_{n-1})$ über alle diese Mengen stimmen wegen Jacobi's Transformationsformel überein und summieren sich zu $(\int_{t_n}^t a(s)ds)^{n-1}$. Also gilt

$$u(t) \le b(t) + \int_\alpha^t \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left(\int_s^t a(s')ds'\right)^{k-1}}{(k-1)!} a(s)b(s)ds + \int_\alpha^t \frac{\left(\int_s^t a(s')ds'\right)^{n-1}}{(n-1)!} a(s)u(s)ds.$$

Wegen $\int_s^t a(s)ds \le \|a\|_{L^1([\alpha,\beta])}$ konvergiert $\sum_{k=0}^\infty \frac{\left(\int_s^t a(s')ds'\right)^k}{k!}$ gleichmäßig für $s\in[\alpha,t]$. Im Grenzwert $n\to\infty$ erhalten wir die zweite Ungleichung. **q.e.d.**

Lemma 1.59. *(Fundamentallösung) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, V ein Banachraum und $A: I \to \mathcal{L}(V)$ stetig. Für $t_0 \in I$ konvergiert die Reihe $F: I \to \mathcal{L}(V)$*

$$F(t) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^\infty \int_{t_0}^t A(t_n) \int_{t_0}^{t_n} A(t_{n-1}) \ldots \int_{t_0}^{t_2} A(t_1)dt_1\ldots dt_n$$

gegen die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot F(t) = A(t)F(t) \quad \textit{mit} \quad F(t_0) = \mathbb{1}.$$

Die Formel für $F(t)$ folgt aus der Iteration im Satz 1.49 beginnend mit $u=0$.
Beweis: Im Beweis des Gronwallschen Lemmas für $b=1$ und $a(t)=\|A(t)\|$ wird die Konvergenz der Reihe für $\|F(t)\|$ gezeigt. Deshalb ist die Norm $\|F(t)\|$ durch die Reihe von $\exp\left(\int_{t_0}^t \|A(s)\|ds\right)$ beschränkt. Dann konvergiert $F(t)$ für alle $t\in I$ und es gilt

$$F(t) = \mathbb{1} + \int_{t_0}^t A(s)F(s)ds.$$

Wegen Satz 1.20 ist dann F differenzierbar und löst das Anfangswertproblem. **q.e.d.**

Diese Lösung $F(t)$ heißt Fundamentallösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) \qquad \text{mit} \qquad u(t_0) = u_0.$$

Die lineare Abbildung $F(t)$ bildet jedes u_0 auf den Wert der entsprechenden Lösung bei t ab. Seien F und $\tilde{F}$ die beiden Fundamentallösungen der Anfangswertprobleme

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ mit } u(t_0) = u_0 \text{ und } \quad \dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ mit } u(t_1) = u_1.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen gilt $\tilde{F}(t)F(t_1)u_0 = F(t)u_0$ und $F(t)\tilde{F}(t_0)u_1 = \tilde{F}(t)u_1$ für alle $u_0, u_1 \in V$ und $t \in I$. Das Einsetzen $t = t_0$ bzw. $t = t_1$ zeigt, dass $F(t)$ in $\mathcal{L}(V)$ für alle $t \in I$ invertierbar ist mit $F^{-1}(t_1) = \tilde{F}(t_0)$ und $\tilde{F}(t) = F(t)F^{-1}(t_1)$.

Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) \qquad \text{mit} \qquad u(s) = b(s)$$

ist dann gegeben durch

$$u_s(t) = F(t)F^{-1}(s)b(s).$$

Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \qquad \text{mit} \qquad u(t_0) = u_0$$

ist wegen Satz 1.53 gegeben durch

$$u(t) = F(t)\left(u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F^{-1}(s)b(s)ds\right).$$

Deshalb genügt es zum Lösen einer gewöhnlichen, linearen Differentialgleichung, die Fundamentallösung zu bestimmen. Diese Formel zeigt auch, dass auf jedem kompakten Teilintervall $[\alpha, \beta] \subset I$ die Lösung $u \in C([\alpha, \beta], V)$ stetig differenzierbar von $t_0 \in [\alpha, \beta]$ und analytisch von $(u_0, A, b) \in V \times C([\alpha, \beta], \mathcal{L}(V)) \times C([\alpha, \beta], V)$ abhängt.

Wenn alle $A(t)$ miteinander kommutieren:

$$A(t)A(t') = A(t')A(t) \text{ für alle } t, t' \in I,$$

wie das im Fall $V = \mathbb{R}$ gilt, dann ist $F(t) = \exp(\int_{t_0}^{t} A(s)ds)$ und es gilt die Formel aus Beispiel 1.52, im Allgemeinen aber nicht. Im endlichdimensionalen Fall, wenn wir A durch $n \times n$ Matrizen darstellen können, ist allerdings folgende Beziehung sehr nützlich.

Satz 1.60. *(Spur und Determinante) Sei $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ eine stetige Abbildung des offenen Intervalls I in die $\mathbb{K}$–wertigen $n \times n$ Matrizen. Dann gilt für die Fundamentallösung*

$$F : I \to \mathbb{K}^{n\times n} \textit{ mit } \quad \dot{F}(t) = A(t)F(t) \textit{ und } \quad F(t_0) = \mathbb{1},$$

$$\frac{d}{dt}\det(F(t)) = \operatorname{Spur}(A(t))\det(F(t)) \textit{ mit } \quad \det(F(t_0)) = 1.$$

Also hat $\det(F(t))$ *auf I keine Nullstellen und $F(t)$ ist für alle $t \in I$ invertierbar.*

Beweis: Weil die Determinante $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ ein Polynom in den Einträgen der entsprechenden Matrix ist, ist sie eine analytische Funktion. Wir berechnen zunächst die Ableitung dieser Funktion bei der Matrix B in Richtung der Matrix AB

$$\frac{d}{dt}\det(B + tAB) \mid_{t=0} = \operatorname{Spur}(A)\det(B).$$

Es gilt nämlich

$$\det(B + tAB) = \det((\mathbb{1} + tA)B) = \det(\mathbb{1} + tA)\det(B).$$

Sei $p_A(t) = \det(t\mathbb{1} - A)$ das charakteristische Polynom von A. Dann gilt

$$\det(\mathbb{1} + tA) = \det((-t)((-t)^{-1}\mathbb{1} - A)) = (-t)^n p_A(-t^{-1}) = (-t)^n \prod_{i=1}^{n}(-t^{-1} - \lambda_i)$$
$$= \prod_{i=1}^{n}(1 + t\lambda_i) = 1 + t\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + \text{Terme höherer Ordnung.}$$

Hier sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A. Damit folgt

$$\left.\frac{d}{dt}\det(B + tAB)\right|_{t=0} = \operatorname{Spur}(A)\det(B) = \operatorname{Spur}(ABB^{-1}\det(B)).$$

Die adjunkte Matrix $B^{-1}\det(B)$ ist als Matrix der Unterdeterminanten von B auch für nicht invertierbare Matrizen wohldefiniert. Mit der Kettenregel erhalten wir für $F(t)$

$$\frac{d}{dt}\det(F(t)) = \operatorname{Spur}(\dot{F}(t)F^{-1}(t)\det(F(t))) \quad = \operatorname{Spur}(A(t))\det(F(t)). \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Aus Beispiel 1.52 folgt $$\det(F(t)) = \exp\left(\int_{t_0}^{t}\operatorname{Spur}(A(s))ds\right).$$

1.8 Floquettheorie

In diesem Abschnitt betrachten wir gewöhnliche homogene lineare Differentialgleichungssyteme in dem Banachraum V mit periodischen Koeffizienten:

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) \quad \text{mit} \quad A(t+\omega) = A(t) \quad \text{für ein} \quad \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{und alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Hierbei ist $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(V)$ stetig. Für jede Lösung $t \mapsto u(t)$ ist auch $t \mapsto u(t+\omega)$ eine Lösung. Deshalb folgt aus Korollar 1.50, dass es ein invertierbares Element $M \in \mathcal{L}(V)$ gibt, das mit der entsprechende Fundamentallösung F folgendes erfüllt:

$$F(t+\omega) = F(t)M \qquad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dieser Isomorphismus wird Monodromie genannt und ist wegen $F(t_0) = \mathbb{1}$ gleich $M = F(t_0 + \omega)$. Wenn G eine stetig differenzierbare Abbildung von $\mathbb{R}$ in die invertierbaren Elemente von $\mathcal{L}(V)$ ist, wird jede Lösung u obiger Differentialgleichung durch $u \mapsto \tilde{u}$ mit $\tilde{u}(t) = G(t)u(t)$ auf eine Lösung folgender Differentialgleichung abgebildet:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{u}}(t) &= \frac{d}{dt}G(t)u(t) = \dot{G}(t)G^{-1}(t)\tilde{u}(t) + G(t)A(t)G^{-1}(t)\tilde{u}(t) = \tilde{A}(t)\tilde{u}(t) \quad \text{mit}\\ \tilde{A}(t) &= \dot{G}(t)G^{-1}(t) + G(t)A(t)G^{-1}(t).\end{aligned}$$

Die Floquettheorie beantwortet die Frage, wann zwei homogene lineare Differentialgleichungssyteme, deren Koeffizienten periodisch sind bezüglich der Periode $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ durch ein periodisches invertierbares $G \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(V))$ aufeinander abgebildet werden.

Satz 1.61. *Seien V ein Banachraum, $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(V)$ und $\tilde{A} : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(V)$ stetig und periodisch mit der Periode $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gibt es genau dann eine stetig differenzierbare Abbildung $G : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(V)$ in die invertierbaren Elemente von $\mathcal{L}(V)$, die*

$$G(t+\omega) = G(t) \qquad \text{und} \qquad \tilde{A}(t) = \dot{G}(t)G^{-1}(t) + G(t)A(t)G^{-1}(t) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

erfüllt, wenn es ein invertierbares $G \in \mathcal{L}(V)$ gibt, so dass für die beiden entsprechenden Monodromien $\tilde{M} = GMG^{-1}$ gilt.

Beweis: Wenn ein differenzierbares und invertierbares $G : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(V)$ die Koeffizienten $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(V)$ auf $\tilde{A}(t) = \dot{G}(t)G^{-1}(t) + G(t)A(t)G^{-1}(t)$ abbildet, dann erfüllen die entsprechenden Fundamentallösungen F und $\tilde{F}$ offenbar

$$\tilde{F}(t) = G(t)F(t)G^{-1}(t_0) \qquad \text{für alle} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Dann ist die Monodromie $\tilde{M}$ des transformierten Systems gleich

$$\tilde{M} = \tilde{F}(t_0+\omega) = G(t_0+\omega)F(t_0+\omega)G^{-1}(t_0) = GMG^{-1} \quad \text{mit} \quad G = G(t_0) = G(t_0+\omega).$$

Wenn es umgekehrt ein invertierbares $G \in \mathcal{L}(V)$ gibt mit $\tilde{M} = GMG^{-1}$, dann transformiert die stetig differenzierbare Abbildung invertierbare $G : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(V)$ mit $G(t) = \tilde{F}(t)GF^{-1}(t)$ die Lösungen der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$ auf die Lösungen der Differentialgleichungen $\dot{u}(t) = \tilde{A}(t)u(t)$ und erfüllt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$G(t+\omega) = \tilde{F}(t+\omega)GF^{-1}(t+\omega) = \tilde{F}(t)\tilde{M}GM^{-1}F^{-1}(t) = \tilde{F}(t)GF^{-1}(t) = G(t).$$ **q.e.d.**

Lemma 1.62. *Eine Matrix $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ ist genau dann von der Form $A = \exp(B)$ mit $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, wenn A invertierbar ist. Die Eigenwerte von B sind die Logarithmen der Eigenwerte von A und bis auf Addition von ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$ eindeutig.*

Beweis: Wenn es eine Matrix B gibt mit $\exp(B) = A$, dann besitzt B eine Jordansche Normalform. Dann werden durch $z \mapsto \exp(z)$ die Eigenwerte von B auf die Eigenwerte von A abgebildet. Also hat dann A keinen Eigenwert Null und ist invertierbar.

Wenn umgekehrt A invertierbar ist, dann genügt es offenbar für jeden Jordanblock von A eine Matrix B zu finden, so dass $\exp(B)$ gleich dem Jordanblock ist. Aus der Taylorreihe von $\ln(1 + z)$ bei $z = 0$ folgt folgende Identität formaler Potenzreihen:

$$1 + z = \exp(\ln(1 + z)) = \exp\left(-\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l z^l}{l}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l z^l}{l}\right)^n.$$

Weil echte obere Dreiecksmatrizen nilpotent sind, ist folgende Reihe endlich und definiert eine Umkehrfunktion von exp auf Jordanblöcken mit $\lambda \neq 0$:

$$\ln\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \ln(\lambda)\mathbb{1} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l\lambda^l} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}^l.$$ **q.e.d.**

Korollar 1.63. *Sei $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ stetig und periodisch mit der Periode $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gibt es eine stetig differenzierbare periodische Abbildung $G : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ in die invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit Periode ω, das das Differentialgleichungssystem $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$ in ein autonomes System $\dot{u}(t) = \tilde{A}u(t)$ transformiert.*

Beweis: Sei M die Monodromie des periodischen Differentialgleichungssystems $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$. Wegen dem vorangehenden Lemma gibt es dann eine Matrix $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ mit $\exp(B) = M$. Das autonome Differentialgleichungssystem $\dot{u}(t) = \tilde{A}u(t)$ mit $\tilde{A} = B/\omega$ hat die Fundamentallösung $F(t) = \exp((t-t_0)\tilde{A})$ und die Monodromie $\tilde{M} = F(t_0+\omega) = \exp(B) = M$. Dann folgt die Aussage aus Satz 1.61. **q.e.d.**

Kapitel 2

Stabilität von dynamischen Systemen

Es ist das Hauptziel dieses Kapitels, ein möglichst gutes Verständnis des qualitativen Verhaltens des von einer gewöhnlichen Differentialgleichung erzeugten Flusses in der Nähe eines kritischen Punktes zu gewinnen. Diese Fragestellung steht in engem Zusammenhang mit dem Langzeitverhalten, der sog. Stabilitätstheorie.

Zuerst führen wir die wichtigsten Stabilitätsbegriffe ein und betrachten als den einfachsten Fall zweidimensionale lineare Flüsse. Danach beweisen wir das "Prinzip der linearisierten Stabilität", welches es erlaubt, aus dem Spektrum des in einem kritischen Punkt linearisierten Vektorfeldes Aufschluß über die Ljapunovstabilität dieses kritischen Punktes zu bekommen. Im letzten Paragraphen dieses Kapitels betrachten wir, in Analogie zur Klassifizierung linearer Flüsse, hyperbolische kritische Punkte eines differenzierbaren Vektorfeldes. Wir beweisen den Linearisierungssatz von Grobman und Hartmann sowie den Satz über die lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten.

Definition 2.1. *Sei $\Phi : W \to X$ ein lokaler Fluss auf einem metrischen Raum X und x_0 ein Fixpunkt von Φ. Dann heißt x_0*

stabil, *wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $\Phi(t, x) \in B(x_0, \epsilon)$ für alle $(t, x) \in [0, \infty) \times B(x_0, \delta) \cap W$ gilt.*

instabil, *wenn x_0 nicht stabil ist.*

attraktiv, *wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $[0, \infty) \times B(x_0, \delta)$ in W enthalten ist und $\Phi(t, x)$ für alle $x \in B(x_0, \delta)$ im Grenzwert $t \to \infty$ gegen x_0 konvergiert.*

asymptotisch stabil, *wenn x_0 stabil und attraktiv ist.*

Beispiel 2.2. **(i)** $G = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\Phi(t, x)) = \lambda^t \cdot x$.

Für $|\lambda| \leq 1$ *ist* $0 \in X$ *stabil.*

Für $|\lambda| < 1$ *ist* $0 \in X$ *asymptotisch stabil.*

(ii) $G = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Phi(t, x)) = \exp(t\lambda) \cdot x$.

Für $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ *ist* $0 \in X$ *stabil.*

Für $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ *ist* $0 \in X$ *asymptotisch stabil.*

(iii) *Wir parametrisieren* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ *durch Polarkoordinaten* (r, φ) *mit* $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ *und betrachten den lokalen Fluss zu*

$$\dot{r}(t) = r(t)(1 - r(t)), \qquad \dot{\varphi}(t) = 1 - \cos \varphi(t).$$

Offenbar ist $(r, \varphi) = (1, 0)$ *die enizige Ruhelage. Wir können die Lösungen der Anfangswertprobleme für* r *und* φ *unabhängig voneinander lösen. Für* $0 < r < 1$ *ist* $t \mapsto r(t)$ *streng monoton wachsend und für* $1 < r$ *streng monoton fallend. Für* $0 < r(0) \leq 1$ *bleibt die Integralkurve für* $t \geq 0$ *in dem kompakten Kreisring* $r(0) \leq r(t) \leq 1$*, und für* $1 < r(0)$ *in dem kompakten Kreisring* $1 \leq r(t) \leq r(0)$*. Daraus folgt, dass für alle Anfangswerte die maximale Integralkurve für alle* $t \in [0, \infty)$ *existiert. Außerdem gilt* $\lim_{t\to\infty} r(t) = 1$*, weil sonst* $|\dot{r}(t)| > \epsilon$ *für ein* $\epsilon > 0$ *gelten würde. Offenbar gilt auch* $\dot{\varphi} \geq 0$*. Also ist* φ *monoton wachsend und* $\varphi(t)$ *bleibt für alle Anfangswerte* $\varphi(0) \in (-2\pi, 0)$ *in* $[\varphi(0), 0)$*. Dann gilt wieder* $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$*. Damit konvergieren die Integralkurven im Grenzwert* $t \to \infty$ *für alle Anfangswerte gegen die Ruhelage bei* $(r, \varphi) = (1, 0)$*, und diese Ruhelage ist attraktiv. Weil aber für* $r(0) = 1$ *und alle* $\varphi(0) \in (-2\pi, -2\pi + \epsilon)$ *die Integralkurve den Einheitskreis fast einmal umrundet, ist die Ruehelage nicht stabil. Die maximalen Integralkurven mit Anfanswerten* $r(0) = 1$ *und* $\varphi(0) \neq 0$ *konvergieren für beide Grenzwerte* $t \to \pm\infty$ *gegen die gleiche Ruhelage. Solche Bahnkurven heißen homoklinische Orbits.*

Lemma 2.3. *Sei* x_0 *ein stabiler kritischer Punkt des lokalen Flusses* $\Phi : W \to X$*. Dann ist* $[0, \infty) \times B(x_0, \epsilon)$ *für ein* $\epsilon > 0$ *in* W *enthalten.*

Beweis: Weil W offen ist und $(0, x_0)$ enthält, liegt $(-\epsilon, \epsilon) \times B(x_0, \epsilon)$ für ein $\epsilon > 0$ in W. Weil x_0 stabil ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\Phi(t, x)$ für alle $(t, x) \in [0, \infty) \times B(x_0, \delta) \cap W$ in $B(x_0, \epsilon)$ liegt. Für $x \in B(x_0, \min\{\epsilon, \delta\})$ liegt dann $[0, \epsilon) \times \{\Phi(t, x) \mid (t, x) \in [0, \infty) \times \{x\} \cap W\}$ in W. Wegen der Bedingung (ii) in Definition 1.31 ist dann $[0, n\epsilon) \times \{x\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ in W enthalten. Also liegt $[0, \infty) \times B(x_0, \min\{\epsilon, \delta\})$ in W. **q.e.d.**

2.1 Die Klassifikation linearer ebener Flüsse

In diesem Abschnitt untersuchen wir zunächst die Stabilität von dynamischen Systemen, die dem Fluss linearer Vektorfelder auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V entsprechen. Solche dynamischen Systeme haben immer die Null als Fixpunkt. Wir werden später sehen, dass in einer Umgebung von Fixpunkten, das Verhalten von allgemeineren dynamischen Systemen durch solche Systeme beschrieben werden kann. Deshalb ist es sinnvoll sich zunächst auf solche Systeme einzuschränken. Die entsprechenden dynamischen Systeme sind dann durch einen linearen Fluss gegeben:

$$\Phi(t,x) = e^{tA}x \quad \text{mit} \quad A \in \mathcal{L}(V).$$

Wir betrachten zuerst zweidimensionale reelle Systeme

$$\dot{x} = Ax \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2).$$

Aus dem ersten Kapitel wissen wir, daß die Lösungen durch das Spektrum $\sigma(A)$ und die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte charakterisiert sind und daß wir sinnvollerweise A diagonalisieren bzw. auf Jordansche Normalform bringen:

$$\dot{y} = Jy \quad \text{mit} \quad y = Bx \quad \text{und} \quad J = B^{-1}AB$$

mit einem invertierbaren $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Wir unterscheiden zwischen folgenden Fällen:
1. Fall: A hat reelle nichtverschwindende Eigenwerte verschiedenen Vorzeichens. In diesem Fall ist A diagonalisierbar und es existiert ein invertierbares $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ mit

$$J = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda < 0 < \mu.$$

In den Koordinaten $y = Bx$ erzeugt J den Fluss $t \to (e^{\lambda t}y_1, e^{\mu t}y_2)$. In diesem Fall heißt der Nullpunkt Sattel.
2.Fall: Alle Eigenwerte haben negative Realteile. Dann benutzen wir das folgende Stabilitätskriterium. In diesem Fall heißt der Nullpunkt Senke oder asymptotisch stabil.

Satz 2.4 (Stabilitätskriterium)**.** *Für $A \in \mathcal{L}(V)$ auf einem endlichdimensionalen Banachraum V konvergiert $\exp(tA)$ in $\mathcal{L}(V)$ im Grenzwert $t \to \infty$ genau dann gegen Null, wenn alle komplexen Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A negativen Realteil haben.*

Beweis: Wir betrachten die Komplxzifizierung $A_{\mathbb{C}}$ von A auf $V_{\mathbb{C}} = V + iV$, mit $A_{\mathbb{C}}(v + iw) = Av + iAw$ und bringen A auf Jordansche Normalform. Weil alle Normen eines endlichdimensionalen Vektorraumes äquivalent sind, genügt es die Aussage für die Jordansche Normalform von A zu beweisen. Offenbar sind $\lim_{t\to\infty}\exp(tA_{\mathbb{C}}) = 0$, und $\lim_{t\to\infty}\exp(tA) =$) äquivalent. Wegen Übungsaufgabe1.56 sind dann alle Lösungen von $\dot{x} = A_{\mathbb{C}}x$ Linearkombinationen von $x(t) = t^n \exp(t\lambda)x$, wobei λ ein Eigenwert von A ist. Weil $|\exp(t\lambda)| = \exp(t\,\mathrm{Re}(\lambda))$ gilt, konvergieren diese Lösungen für $t \to \infty$ genau dann gegen Null, wenn die Realteile von allen Eigenwerten negativ sind. **q.e.d.**

Wir betrachten nun verschiedene Unterfälle:

(a) Die Eigenwerte sind reell: $\lambda \leq \mu < 0$. Wenn A diagonalisierbar ist, dann folgt

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

für ein relles invertierbares $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Dann erhält man $y(t) = (e^{\lambda t}y_1, e^{\mu t}y_2)$. Ist A nicht diagonalisierbar, dann muß $\lambda = \mu$ sein. Und A hat die Jordansche Normalform

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda < 0$$

für ein relles invertierbares $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Die transformierte Gleichung $\dot{y} = Jy$ hat die Lösung $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ mit

$$y_1(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta t e^{\lambda t}, \qquad y_2(t) = \beta e^{\lambda t}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Für $\beta \neq 0$ haben $y_2 \neq 0$ und β das gleiche Vorzeichen und y_1 ist ein Funktion von y_2:

$$y_1 = \frac{\alpha y_2}{\beta} + \frac{y_2}{\lambda}\ln\left(\frac{y_2}{\beta}\right) \quad \text{mit} \quad \lambda < 0.$$

In beiden Fällen heißt 0 ein stabiler Knoten, wobei man im zweiten Fall von einem falschen Knoten spricht.

(b) Die Eigenwerte sind komplex: also konjugiert komplex. Ist $A_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ die Komplexifizierung von $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, so folgt aus $A_{\mathbb{C}}u = \lambda u$ durch Konjugation $A_{\mathbb{C}}\bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u}$, d.h. $A_{\mathbb{C}}v = \lambda u \Leftrightarrow A_{\mathbb{C}}\bar{u} - \bar{\lambda}\bar{u}$. Mit diesem Eigenvektor u von $A_{\mathbb{C}}$ zum Eigenwert λ bilden dann u und $\bar{u}$ eine Basis von $\mathbb{C}^2$, und der Realteil v und der Imaginärteil w von u eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Seien α und ω Realteil und Imginärteil von λ. Dann gilt:

$$Av + iAw = A_{\mathbb{C}}(v + iw) = (\alpha + i\omega)(v + iw) = \alpha v - \omega w + i(\alpha w + \omega v),$$

$$Av = \alpha v - \omega w \qquad Aw = \omega v + \alpha w.$$

Wir sehen: hat $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ einen nichtreellen Eigenwert $\lambda = \alpha + i\omega$, mit $\omega \neq 0$, so ist auch $\bar{\lambda} = \alpha - i\omega$ ein Eigenwert und es existiert ein invertierbares $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ mit

$$J = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix}, \quad \omega > 0.$$

Um e^{tJ} zu berechnen, identifizieren wir $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ durch $(x, y) \leftrightarrow x + iy$. Wegen

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x - \omega y \\ \omega x + \alpha y \end{pmatrix} \leftrightarrow (\alpha + i\omega)(x + iy),$$

entspricht bei dieser Identifikation J der Multiplikation mit $\lambda = \alpha + i\omega$. Wenn wir $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ mit $\mathbb{C}$ wie üblich durch $M \in \mathcal{L}(\mathbb{C}) \leftrightarrow m = M1 \in \mathbb{C}$ identifizieren, erhalten wir einen $\mathbb{R}$-Algebraisomorphismus $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \leftrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Folglich entspricht J^n für alle $n \in \mathbb{N}$ der Matrix zu λ^n und somit e^{tJ} der Matrix zu $e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$, also

$$e^{tJ} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Geometrisch bewirkt also e^{tJ} eine Streckung mit dem Faktor $e^{\lambda t}$ und eine Drehung im mathematisch positiven Sinn um den Winkel ω. In diesem Fall heißt 0 stabile Spirale.
3.Fall: Alle Eigenwerte haben positive Realteile. Durch die Zeitumkehr können wir diesen Fall in den zweiten transformieren. Es folgt für jede nichttriviale Lösung

$$\lim_{t \to \infty} |u(t)| = \infty \text{ und } \lim_{t \to -\infty} u(t) = 0$$

Der Ursprung heißt Quelle. Wegen $e^{tA} = e^{-t(-A)}$ erhält man die Phasenporträts von Fall 2 durch Umkehren der Pfeile. Man spricht dann von instabilen Knoten und Spiralen.
4.Fall: Die Eigenwerte sind rein imaginär. In diesem Fall kann A auf die Form

$$J = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega > 0,$$

transformiert werden. Folglich gilt

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix},$$

und alle Lösungen sind periodisch mit der Periode $2\pi/\omega$. In den y-Koordinaten sind die Bahnen Kreise um 0, in den x-Koordinaten Ellipsen. In diesem Fall heißt 0 Zentrum.

Die Eigenwerte von $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det(A - \lambda) = \lambda^2 - \text{Spur}(A)\lambda + \det(A).$$

Mit der Diskriminante $\text{Dis} = \text{Spur}^2(A) - 4\det(A)$ sind die Eigenwerte gegeben durch $\frac{1}{2}(\text{Spur}(A) \pm \sqrt{\text{Dis}})$. Folglich sind die Eigenwerte reell, wenn $\text{Dis} \geq 0$ gilt, und sie sind komplex mit negativem Realteil für $\text{Spur}(A) < 0$ und $\text{Dis} < 0$, usw.. Also kann man die geometrische Information über die Phasenporträts von $\dot{x} = Ax$, die vom charakteristischen Polynom abgeleitet werden kann, zusammenfassen:

Sattel: $\det(A) < 0$.

Senken: $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) < 0$.

> **Knoten:** $\mathrm{Spur}^2(A) \geq 4\det(A)$.
>
> **Spirale:** $\mathrm{Spur}^2(A) < 4\det(A)$.

Zentren: $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) = 0$.

Quellen: $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) > 0$.

> **Knoten:** $\mathrm{Spur}^2(A) \geq 4\det(A)$.
>
> **Spirale:** $\mathrm{Spur}^2(A) < 4\det(A)$.

2.2 Hyperbolische lineare Flüsse

Im Folgenden wollen wir die sogenannten hyperbolischen linearen Flüsse einführen. Sie sind im wesentlichen dadurch charakterisiert, dass sie keine Grenzfälle enthalten die durch sehr kleine Störungen ihr Verhalten dramatisch verändern können. Wir betrachten dafür den allgemeinen Fall eines beliebigen $\mathbb{K}$- Vektorraums V der Dimension $m < \infty$ mit Norm $\|\cdot\|_V$. Die entsprechende Norm auf $\mathcal{L}(V)$ bezeichnen wir auch mit $\|\cdot\|_V$. Für $A \in \mathcal{L}(V)$ bezeichnen wir mit e^{tA} den von A erzeugten linearen Fluß auf V

$$\Phi : \mathbb{R} \times V \to V, \quad (t, x) \mapsto e^{tA}x.$$

Der Nullpunkt von e^{tA} ist ein Fixpunkt und heißt eine Senke (bzw. Quelle), wenn

$$\lim_{t\to\infty} e^{tA}x = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{t\to-\infty} e^{tA}x = 0 \qquad \text{für alle } x \in V \text{ gilt.}$$

Wegen dem Stabilitätskriterium ist 0 genau dann eine Senke (bzw. Quelle), wenn gilt

$$\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Re}(\lambda) > 0 \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \sigma(A).$$

Ist 0 eine Senke (bzw. Quelle), so sagt man auch, der lineare Fluß e^{tA} sei eine Kontraktion (bzw. Expansion). Wir wollen nun zeigen, daß bei einer Kontraktion (bzw. Expansion) jede Bahn $t \mapsto e^{tA}x$ mit $x \neq 0$ für $t \to \infty$ exponentiell gegen 0 (bzw. "gegen ∞") konvergiert. Dazu benötigen wir das folgende wichtige Lemma.

Ist $M \subset \mathbb{C}$ nicht leer und ist $\beta \in \mathbb{R}$, so schreiben wir im folgenden

$$\mathrm{Re}(M) < \beta,$$

wenn $\mathrm{Re}(m) < \beta$ für alle $m \in M$ gilt. Analog sind verwandte Ungleichungen zu interpretieren. Ferner verstehen wir unter einer Hilbertnorm $\|\cdot\|$ eine aus einem Skalarprodukt abgeleitete Norm, d.h. für ein geeignetes Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V gilt $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

Lemma 2.5. *Für $A \in \mathcal{L}(V)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelte $\mathrm{Re}(\sigma(A)) < \alpha$. Dann existiert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_A$ auf V mit $\|e^{tA}\|_A \leq e^{\alpha t}$ für alle $t \geq 0$.*

Beweis: Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wissen wir, daß A bzgl. einer geeigneten Basis die Form

$$A = D + N \quad \text{mit} \quad D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_k) = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_m)$$

und $N^m = 0$ sowie $DN = ND$. Außerdem können wir die Basis $\{e_1, \ldots, e_m\}$ von V so wählen, daß gilt: $Ne_j = e_{j-1}$ oder 0. Ersetzen wir e_j durch $a_j = \delta^j e_j$ mit $\delta > 0$, so bleibt D unverändert, und für N gilt: $Na_j = \delta a_{j-1}$ oder 0. Also hat die Matrix von N bezüglich der Basis $\{a_1, \ldots, a_m\}$ höchstens in der oberen Nebendiagonalen von Null verschiedene Elemente, und zwar die Zahlen δ. Wenn wir nun die zu dieser Basis gehörige euklidische Norm verwenden, erhalten wir zu jedem $\epsilon > 0$ eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_A$ auf V mit $\|N\|_A \leq \epsilon$. Für $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ und e^{tD} gilt offensichtlich

$$\|D\|_A = \max_{1\leq j\leq m} |\mu_j|, \qquad \|e^{tD}\|_A = \max_{1\leq j\leq m} |e^{t\mu_j}| = \max_{1\leq j\leq m} e^{t\,\mathrm{Re}(\mu_j)} \leq e^{t(\alpha-\epsilon)},$$

wenn wir $\epsilon > 0$ so wählen, daß $\mathrm{Re}(\lambda) \leq \alpha - \epsilon$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$ ist. Also gilt für $t \geq 0$

$$\|e^{tA}\|_A = \|e^{tD+tN}\|_A = \|e^{tD}e^{tN}\|_A \leq \|e^{tD}\|_A \cdot \|e^{tN}\|_A \leq e^{t(\alpha-\epsilon)}e^{t\|N\|_A} \leq e^{t(\alpha-\epsilon)}e^{t\epsilon} = e^{\alpha t}$$

Da der Realteil eines komplexen Skalarproduktes ein reelles Skalarprodukt ist, induziert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_{A_\mathbb{C}}$, die auf der Komplexifizierung $V_\mathbb{C} = V \oplus iV$ eines reellen Vektorraumes V definiert ist, auf dem reellen Untervektorraum V eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_A$. Da $\|Ax\|_A = \|A_\mathbb{C}x\|_{A_\mathbb{C}}$ für $A \in \mathcal{L}(V)$ und $x \in V$ gilt, folgt $\|A\|_A = \|A\|_{A_\mathbb{C}}$. Also folgt die Behauptung im reellen Fall durch Anwenden der obigen Resultate auf die Komplexifizierung. **q.e.d.**

Korollar 2.6. **(i)** *Gilt $\mathrm{Re}(\sigma(A)) < \alpha$, so existiert eine Konstante $\beta \geq 0$ mit*

$$\|e^{tA}\|_V \leq \beta e^{\alpha t} \quad \textit{für alle} \quad t \geq 0.$$

(ii) *Gilt $\mathrm{Re}(\sigma(A)) > \alpha$, so existiert eine Konstante $\gamma > 0$ mit*

$$\|e^{tA}x\|_V \geq \gamma e^{\alpha t}\|x\|_V \quad \textit{für} \quad x \in V \textit{ und } t \geq 0.$$

Beweis: (i) folgt aus der Äquivalenz aller Normen auf dem endlichdimensionalen Raum $\mathcal{L}(V)$ und dem vorangehenden Lemma. In (ii) folgt aus dem vorangehenden Lemma wegen $\sigma(-A) = -\sigma(A)$ für eine geeignete Hilbertnorm $\|\cdot\|_{-A}$

$$\|e^{-tA}\|_{-A} = \|e^{t(-A)}\|_A \leq e^{-\alpha t} \quad \text{für} \quad t \geq 0.$$

$$\|x\|_{-A} = \|e^{-tA}e^{tA}x\|_{-A} \leq \|e^{-tA}\|_{-A}\|e^{tA}x\|_{-A} \leq e^{-\alpha t}\|e^{tA}x\|_{-A} \quad \text{für} \quad x \in V \text{ und } t \geq 0.$$

Daraus folgt (ii) wieder wegen der Äquivalenz der Normen. **q.e.d.**

Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir das folgende Theorem über das exponentielle Abklingen bzw. Anwachsen der Flußlinien im Falle einer Senke bzw. Quelle.

Satz 2.7. *Es Sei $A \in \mathcal{L}(V)$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Der Nullpunkt ist eine Senke.*

(ii) *Es existieren $\alpha > 0$ und $\beta \geq 0$ mit $\|e^{tA}x\|_V \leq \beta e^{-\alpha t}\|x\|_V$ für alle $t \geq 0$ und $x \in V$.*

(iii) *Es existieren eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_A$ und $\alpha > 0$ mit $\|e^{tA}\|_A \leq e^{-\alpha t}$ für $t \geq 0$.*

Ebenso sind äquivalent:

(i') *Der Nullpunkt ist eine Quelle.*

(ii') *Es existieren $\alpha > 0$ und $\beta \geq 0$ mit $\|e^{tA}x\|_V \geq \beta e^{\alpha t}\|x\|_V$ für alle $t \geq 0$ und $x \in V$.*

(iii') *Es existieren eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_{-A}$ und $\alpha > 0$ mit $\|e^{tA}x\|_{-A} \geq e^{\alpha t}\|x\|_{-A}$ für $t \geq 0$.*

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem vorangehenden Korollar. **q.e.d.**

Im Folgenden bezeichnen wir mit $m(\lambda)$ die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ von $A \in \mathcal{L}(V)$. Außerdem zerlegen wir das Spektrum $\sigma(A)$ disjunkt,

$$\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_n(A) \cup \sigma_u(A),$$

$$\begin{aligned} \text{in das “stabile Spektrum”:} \qquad & \sigma_s(A) = \{\lambda \in \sigma(A) | \operatorname{Re}(\lambda) < 0\}, \\ \text{das “neutrale Spektrum”:} \qquad & \sigma_n(A) = \{\lambda \in \sigma(A) | \operatorname{Re}(\lambda) = 0\}, \\ \text{und das “instabile Spektrum”:} \qquad & \sigma_u(A) = \{\lambda \in \sigma(A) | \operatorname{Re}(\lambda) > 0\}. \end{aligned}$$

Definition 2.8. *Der von A erzeugte Fluß e^{tA} heißt hyperbolisch, wenn $\sigma_n(A) = \emptyset$, also*

$$\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_u(A).$$

Der folgende Satz verallgemeinert den zweidimensionalen Sattel:

Satz 2.9. *Sei e^{tA} ein hyperbolischer linearer Fluß. Dann gibt es eine Zerlegung*

$$V = V_s \oplus V_u \qquad \mathit{mit} \quad A = A_s \oplus A_u \qquad \mathit{und} \quad e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u},$$

derart, daß e^{tA_s} eine Kontraktion und e^{tA_u} eine Expansion sind. Sie ist eindeutig mit

$$dim(V_s) = \sum_{\lambda \in \sigma_s(A)} m(\lambda) \qquad dim(V_u) = \sum_{\lambda \in \sigma_u(A)} m(\lambda).$$

Beweis: Wir betrachten zuerst den komplexen Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir setzen

$$V_s = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_s(A)} V_\lambda \quad V_u = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_u(A)} V_\lambda \quad \text{mit} \quad V_\lambda = \{x \in V \mid (A - \lambda \mathbb{1}_V)^{m(\lambda)} x = 0\}.$$

Hierebei bezeichnet $m(\lambda)$ die Ordnung der Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms von A. Wir zerlegen also jeden Vektor von V bezüglich der Basis, in der A Jordansche Normalform hat. Dann wird V_λ von den Basisvektoren aufgespannt, die zu einem Jordanblock mit Eigenwert λ gehören. Entsprechend werden V_s und V_u von den Basisvektoren aufgespannt, die zu einem Jordanblock mit einem Eigenwert in $\sigma_s(A)$ bzw. in $\sigma_u(A)$ gehören.v Aufgrund der Jordanschen Normalform sind die Unterräumen V_λ und damit auch die Unterräume V_s und V_u invariant unter A. Dann ist $V = V_s \oplus V_u$, und diese Zerlegung zerlegt $A = A_s \oplus A_u$. Offenbar gilt

$$\sigma(A_s) = \sigma_s(A), \qquad \sigma(A_u) = \sigma_u(A).$$

Aus dem Stabilitätskriterium folgt, daß e^{tA_s} eine Kontraktion bzw. e^{tA_u} eine Expansion ist. Offenbar gelten die Formeln für die Dimensionen. Es bleibt noch, die Eindeutigkeit zu zeigen. Sie folgt aus folgender Charakterisierung der Unterräume V_s und V_u:

$$V_s = \{x \in V \mid \lim_{t \to \infty} e^{tA} x = 0\}, \qquad V_u = \{x \in V \mid \lim_{t \to -\infty} e^{tA} x = 0\}.$$

Im reellen Fall komplxifizieren wir zuerst den Vektorraum V und die lineare Abbildung A: Wir definieren den komplexen Vektorraum $V_\mathbb{C} = V \oplus iV$ mit der natürlichen Skalarmultiplikation von komplexen Zahlen und $A_\mathbb{C}(u \oplus iv) = Au \oplus iAv$. Dann ist $A_\mathbb{C}$ eine komplexlineare Abbildung in $\mathcal{L}(V_\mathbb{C})$. Die Anwendung obiger Zerlegung auf $A_\mathbb{C}$ ergibt:

$$V_\mathbb{C} = (V_\mathbb{C})_s \oplus (V_\mathbb{C})_u, \qquad A_\mathbb{C} = (A_\mathbb{C})_s \oplus (A_\mathbb{C})_u,$$

derart, daß $e^{t(A_\mathbb{C})_s}$ eine Kontraktion und $e_u^{t(A_\mathbb{C})}$ eine Expansion sind. Die Abbildung

$$V_\mathbb{C} \to V_\mathbb{C}, \qquad u \oplus iv \mapsto u \oplus -iv$$

heisst komplexe Konjugation von $V_{\mathbb{C}}$. Ihre Fixpunktmenge besteht aus den rein reellen Vektoren, die wir mit V identifizieren. Aus dem selben Grund, aus dem die komplexe Konjugation von $\mathbb{C}$ ein Algebrahomomorphismus ist, ist der komplex kunjugierte Vektor von $\lambda \cdot (u \oplus iv)$ gleich $\bar{\lambda} \cdot (u \oplus -iv)$. Deshalb bildet die komplexe Konjugation V_λ auf $V_{\bar{\lambda}}$ ab. Weil die komplexe Konjugation $\sigma_s(A)$ und $\sigma_u(A)$ invariant lassen, lässt die komplexe Konjugation von $V_{\mathbb{C}}$ die Unterräume $(V_{\mathbb{C}})_s$ und $(V_{\mathbb{C}})_u$ invariant. Deshalb können wir die Fixpunkte der komplexen Konjugation V zerlegen in $V = V_s \oplus V_u$ mit

$$V_s = (V_{\mathbb{C}})_s \cap V, \qquad V_u = (V_{\mathbb{C}})_u \cap V.$$

Diese Unterräume sind invariant unter A, und A zerfällt in $A = A_s \oplus A_u$. Dann folgt die Behauptung aus der entsprechenden Aussage im komplexen Fall. **q.e.d.**

Die invarianten Untervektorräume V_s bzw. V_u des hyperbolischen linearen Flusses e^{tA} heißen stabile bzw. instabile Untervektorräume des Flusses. Ein hyperbolischer linearer Fluß kann eine Kontraktion ($\sigma_u = \emptyset$) oder eine Expansion ($\sigma_s = \emptyset$) sein.

Es erhebt sich die Frage, was an den Phasenporträts dieses Abschnitts charakteristisch ist. Ist es möglich, durch Einführen geeigneter nichtlinearer Koordinaten einen Sattel in einen Knoten oder einen stabilen Knoten in eine instabile Spirale zu verwandeln? Wir werden zeigen, daß dies nicht der Fall ist, daß es aber wohl möglich ist, einen stabilen Knoten in einen stabilen Strudel zu transformieren. Dazu müssen wir zuerst den Begriff äquivalenter Flüsse präzisieren.

Definition 2.10. *Seinen Φ und $\tilde{\Phi}$ zwei lokale Flüsse auf den metrischen Räumen X und $\tilde{X}$, mit den Definitionsbereichen $W \subset \mathbb{R} \times X$ und $\tilde{W} \subset \mathbb{R} \times \tilde{X}$. Die Lokalen Flüsse Φ und $\tilde{\Phi}$ heißen flußäquivalent, wenn $\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \times \Psi$ für einen Homöomorphismus Ψ von X auf $\tilde{X}$ ein Hoöomorphismus von W auf $\tilde{W}$ ist, und $\Psi \circ \Phi = \tilde{\Phi} \circ (\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \times \Psi)$ auf W gilt.*

Jedes Ψ mit diesen Eigenschaften heißt eine (topologische) Flußäquivalenz. Folglich ist Ψ genau dann eine topologische Flußäquivalenz, wenn das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} W \subset \mathbb{R} \times X & \xrightarrow{\Phi} & X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathbb{1}_{\mathbb{R}} \times \Psi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Psi} \\ \tilde{W} \subset \mathbb{R} \times \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & \tilde{X}. \end{array}$$

Hierbei ist $\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \times \Psi : W \to \mathbb{R} \times X$ definiert als $(\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \times \Psi)(t, x) = (t, \Psi(x))$.

Sind X und $\tilde{X}$ offene Teilmengen eines Banchraumes, und Ψ stetig differenzierbar mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung, so heißen Φ und $\tilde{\Phi}$ stetig differenzierbar äquivalent und Ψ ist eine C^1-Flußäquivalenz. Sind X und $\tilde{X}$ Banachräume und Ψ linear, so heißen Φ und $\tilde{\Phi}$ linear äquivalent und Ψ ist eine lineare Flußäquivalenz. Offenbar sind (topologische) Flußäquivalenz bzw. C^1-Flußäquivalenz bzw. lineare Flußäquivalenz

Äquivalenzrelationen. Außerdem bildet eine Flussäquivalenz Ψ die Orbits von Φ auf die Orbits von $\tilde{\Phi}$ ab, und zwar unter Erhaltung der Orientierung. Wir klassifizieren zuerst lineare Flüsse linear und bestimmen die Äquivalenzklassen der linearen Flußäquivalenz.

Satz 2.11. *Seien A und B lineare Abbildungen auf endlichdimensionalen Vektorräumen. Dann sind e^{tA} und e^{tB} genau dann linear flußäquivalent, wenn die beiden linearen Abbildungen A und B die gleiche Jordansche Normalform haben.*

Beweis: Ist Ψ eine lineare Flußäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB}, so gilt

$$\Psi \circ e^{tA} = e^{tB} \circ \Psi \quad \Longleftrightarrow \quad e^{t\Psi\circ A\circ\Psi^{-1}} = e^{tB} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Bilden wir links und rechts die Ableitung nach t an der Stelle $t = 0$, so folgt $\Psi\circ A\circ\Psi^{-1} = B$. Also haben A und B die gleiche Jordansche Normalform. Umgekehrt folgt daraus, dass A und B die gleiche Jordansche Normalform haben, dass es ein invertierbares Ψ gibt mit $B = \Psi \circ A \circ \Psi^{-1}$. **q.e.d.**

Der nächste Satz zeigt, daß die differenzierbare Klassifizierung nichts neues ergibt.

Satz 2.12. *Für lineare Abbildungen A und B auf endlichdimensionalen Vektorräumen sind e^{tA} und e^{tB} genau dann C^1-flußäquivalent, wenn sie linear flußäquivalent sind.*

Beweis: Es sei Ψ eine C^1-Flußäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB} und V der Vektorraum auf dem A wirkt. Dann führt der stetig differenzierbare Homöomorphismus $\Psi \in C^1$ dem kritischen Punkt $x = 0$ des Flusses e^{tA} in einen kritischen Punkt $y = \Psi(0)$ des Flusses e^{tB} über, d.h. $e^{tB}y = y$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Bezeichnen wir mit T die Translation $x \to x - y$, so ist $T \circ \Psi$ eine Flußäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB}, wegen

$$\begin{aligned} T \circ \Psi \circ e^{tA}x &= \Psi \circ e^{tA}x - y = e^{tB}\Psi(x) - y \\ &= e^{tB}\Psi(x) - e^{tB}y = e^{tB}(T \circ \Psi)(x) \quad \text{für alle } x \in V \text{ und } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Außerdem ist $T \circ \Psi(0) = 0$ und $(T \circ \Psi)'(0)$ eine invertierbare lineare Abbildung. Durch Differenzieren der Beziehung in $x = 0$ folgt

$$(T \circ \Psi)'(0) \circ e^{tA}x = e^{tB}(T \circ \Psi)'(0)(x) \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Also ist $(T \circ \Psi)'(0)$ eine lineare Flußäquivalenz zwischen e^{tA} und e^{tB}. Die Umkehrung ist offensichtlich. **q.e.d.**

Für die topologische Klassifizierung linearer Flüsse benötigen wir das folgende

Lemma 2.13. *Die Realteile aller Eigenwerte von $A \in \mathcal{L}(V)$ auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V seien negativ, und Φ sei der von A erzeugte lineare Fluß auf V, d.h. $\Phi(t, \cdot) = e^{tA}$ für $t \in \mathbb{R}$. Mit der Hilbertnorm $\|\cdot\|_A$ auf V aus Lemma 2.5 ist*

$$\hat{\Phi} : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}_A \to V \setminus \{0\}, \quad (t, x) \mapsto \Phi(t, x)$$

auf $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}_A = \mathbb{R} \times \{x \in V \mid \|x\|_A = 1\}$ ein Homöomorphismus.

Beweis: Wähle $\alpha > 0$ so, dass die Realteile aller Eigenwerte von A kleiner als $-\alpha$ sind. Dann existiert nach Satz 2.7 eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_A$ auf V mit

$$e^{-t\alpha}\|x\|_A \leq \|e^{tA}x\|_A \quad \text{für } t \leq 0 \quad \text{und} \quad \|e^{tA}x\|_A \leq e^{-t\alpha}\|x\|_A \quad \text{für } t \geq 0.$$

Also ist $\hat{\Phi}$ stetig und für jedes $x \in \mathbb{S}_A^{d-1}$ und $t \neq 0$ liegt $e^{tA}x$ nicht in $\mathbb{S}_A^{d-1}$. Dann ist $\hat{\Phi}$ auch injektiv. Für $y \in V \setminus \{0\}$ gibt es wegen dem Zwischenwertsatz und wegen $\lim_{t\to-\infty} e^{-t\alpha}\|y\|_A = \infty$ und $\lim_{t\to\infty} e^{-t\alpha}\|y\|_A = 0$ ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\|\Phi(-t,y)\|_A = 1$. Also ist Φ auch surjektiv und damit bijektiv. Für $x \in \mathbb{S}_A^{d-1}$ folgt $t \geq -\frac{1}{\alpha}\ln\|\hat{\Phi}(t,x)\|_A$ aus $t \leq 0$ und $t \leq -\frac{1}{\alpha}\ln\|\hat{\Phi}(t,x)\|_A$ aus $t \geq 0$. Deshalb gilt $|t| \leq \frac{1}{\alpha}|\ln\|\hat{\Phi}(t,x)\|_A|$. Dann ist das Urbild einer kompakten Teilmenge von $V \setminus \{0\}$ unter $\hat{\Phi}$ beschränkt und kompakt. Weil jeder Punkt in $V \setminus \{0\}$ eine in $V \setminus \{0\}$ kompakte Umgebung besitzt, und das Bild von kompakten Mengen unter $\hat{\Phi}$ kompakt ist, ist die Umkehrabbildung stetig. **q.e.d.**

Das obige Lemma besagt geometrisch, daß jeder nichtkritische Orbit die Einheitssphäre $\mathbb{S}_A^{d-1}$ einer geeigneten Hilbertnorm transversal schneidet. Das folgende Lemma besagt anschaulich, daß die Orbits einer Kontraktion “geradegebogen” werden können.

Lemma 2.14. *Die Realteile aller Eigenwerte von $A \in \mathcal{L}(V)$ auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V seien negativ. Dann ist e^{tA} flußäquivalent zu $e^{-t\mathbb{1}_V}$.*

Beweis: Wegen dem obigen Lemma existiert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_A$ auf V, so daß für die zugehörige Einheitssphäre $\mathbb{S}_A^{d-1}$ folgende Abbildung ein Homöomprphismus ist:

$$\hat{\Phi} : \mathbb{R} \times \mathbb{S}_A^{d-1} \to V \setminus \{0\}, \quad (t,x) \mapsto e^{tA}x = \Phi(t,x).$$

Wir definieren eine Abbildung $\Psi : V \to V$ durch

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = 0 \\ e^{-s}y & \text{wenn } x \neq 0 \text{ und } \hat{\Phi}(s,y) = x. \end{cases}$$

Wir zeigen dass Ψ eine topologische Flussäquivalenz von e^{tA} nach $e^{-t\mathbb{1}_V}$ ist. Dazu müssen wir zeigen, dass Ψ stetig und bijektiv ist, dass Ψ^{-1} stetig ist und dass $\Psi(e^{tA}x) = e^{-t}\Psi(x)$ für alle $x \in V$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt. Wir zeigen zuerst die letzte Aussage. Sie gilt offenbar für $x = 0$. Sei also $x \neq 0$ und $\hat{\Phi}(s,y) = x$. Dann gilt $\hat{\Phi}(s+t,y) = e^{tA}x$. Also ist $\Psi(e^{tA}x) = e^{-t-s}y = e^{-t}\Psi(x)$. Damit ist die letzte Aussage gezeigt.

Wegen $\Psi(0) = 0$ genügt es die Bijektivität der Einschränkung von Ψ auf $V \setminus \{0\}$ zu zeigen. Diese Einschränkung ist die Verkettung der Umkehrabbildung von $\hat{\Phi}$ mit

$$\mathbb{R} \times \mathbb{S}_A^{d-1} \to V \setminus \{0\}, \quad (s,y) \mapsto e^{-s}y.$$

Diese Abbildung hat wegen $\|e^{-s}y\|_A = e^{-s}\|y\|_A = e^{-s}$ die Umkehrabbildung

$$V \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \times \mathbb{S}_A^{d-1}, \quad x \mapsto (-\ln\|x\|_A, x/\|x\|_A).$$

Also ist die Einschränkung von Ψ auf $V \setminus \{0\}$ ein Homöomorphismus dieser Menge auf sich selber. Also müssen wir nur noch zeigen, dass Ψ und Ψ^{-1} bei 0 stetig sind. Weil alle Normen auf V äquivalent sind, genügt es die Stetigkeit bezüglich $\|\cdot\|_A$ zu zeigen. Für $\|x\|_A < \epsilon < 1$ gilt $s > 0$ weil sonst $1 = \|y\|_A = \|e^{-sA}x\|_A \leq e^{\alpha s}\|x\|_A < \epsilon < 1$ wegen Satz 2.7 (iii) gilt. Dann folgt die Stetigkeit von Ψ bei 0 aus

$$1 = \|y\|_A = \|e^{-sA}x\|_A \leq e^{s\|A\|_A}\epsilon \implies s \geq -\ln(\epsilon)/\|A\|_A \implies \|\Psi(x)\|_A \leq \epsilon^{1/\|A\|_A}.$$

Für $\|e^{-s}y\|_A < \epsilon < 1$ gilt $s = -\ln\|e^{-s}y\|_A > 0$ und mit Satz 2.7 (iii)

$$\|\Psi^{-1}(e^{-s}y)\|_A = \|e^{sA}y\|_A \leq e^{-\alpha s}\|y\|_A = \|e^{-s}y\|_A^{\alpha} < \epsilon^{\alpha}.$$

Das zeigt die Stetigkeit von Ψ^{-1} bei 0. **q.e.d.**

Nach diesen Vorbereitungen können wir den zentralen Klassifikationssatz für hyperbolische Flüsse beweisen. Dabei definieren wir für eine lineare Abbildung $A \in \mathcal{L}(V)$

$$m_-(A) = \sum_{\lambda \in \sigma_s(A)} m(\lambda) \qquad\qquad m_+(A) = \sum_{\lambda \in \sigma_u(A)} m(\lambda).$$

Satz 2.15. *Zwei hyperbolische lineare Flüsse e^{tA} und e^{tB} sind genau dann flußäquivalent, wenn $m_\pm(A) = m_\pm(B)$ gilt. Die Dimensionen der stabilen und instabilen Unterräume sind die einzigen Invarianten der Flußäquivalenz solcher Flüsse.*

Beweis: $\Leftarrow$: Wegen Satz 2.9 existiert eine direkte Summenzerlegung

$$V = V_s \oplus V_u, \quad e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u}$$

mit $\dim(V_s) = m_-(A)$, derart, daß e^{tA_s} eine Kontraktion und e^{tA_u} eine Expansion sind. Aufgrund des Stabilitätskriteriums und dem vorangehenden Lemma existiert eine Flußäquivalenz Ψ_s zwischen e^{tA_s} und $e^{-t\mathbb{1}_{V_s}}$. Analog erhalten wir wegen $e^{tA_u} = e^{-t(-A_u)}$ eine Flußäquivalenz Ψ_u zwischen e^{tA_u} und $e^{t\mathbb{1}_{V_u}}$. Dann ist

$$\Psi_s \oplus \Psi_u : V_s \oplus V_u \to V_s \oplus V_u, \quad x \oplus y \mapsto \Psi_s(x) \oplus \Psi_u(y)$$

eine Flußäquivalenz zwischen $e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u}$ und $e^{-t\mathbb{1}_{V_s}} \oplus e^{t\mathbb{1}_{V_u}}$.

Analog existieren eine direkte Summenzerlegung

$$F = F_s \oplus F_u, \quad e^{tB_s} \oplus e^{tB_u}$$

und eine Flußäquivalenz $\tilde{\Psi}_s \oplus \tilde{\Psi}_u$ zwischen $e^{-t\mathbb{1}_{F_s}} \oplus e^{t\mathbb{1}_{F_u}}$. Wegen $\dim V_s = \dim F_s$ und $\dim V_u = \dim F_u$ existieren ein Isomorphismen $T_s : V_s \to F_s$ und $T_u : V_u \to F_u$. Dann ist $T_s \oplus T_u$ eine Flußäquivalenz zwischen den Flüssen $e^{-t\mathbb{1}_{V_s}} \oplus e^{t\mathbb{1}_{V_u}}$ und $e^{-t\mathbb{1}_{F_s}} \oplus e^{t\mathbb{1}_{F_u}}$. Also folgt die Flußäquivalenz von e^{tA} und e^{tB} aus der Transitivität.

$\Rightarrow$: Für eine Flußäquivalenz Ψ zwischen e^{tA} und e^{tB} folgt aus

$$\Psi(e^{tA}x) = e^{tB}\Psi(x) \quad \text{für alle} \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times V$$

$\Psi[V_s] \subset F_s$ und $\Psi[V_u] \subset F_u$, weil Ψ die Konvergenz für $t \to \infty$ und $t \to -\infty$ erhält. Aus Symmetriegründen gilt dann auch $\Psi^{-1}[F_s] \subset V_s$ und $\Psi^{-1}[F_u] \subset V_u$. Also bildet Ψ den Vektorraum V_s homöomorph auf den Vektorraum F_s ab. Nun folgt aus dem Gebietsvarianzsatz der Topologie (Theorem IV 9 in Hurewicz, Wallman: Dimension Theory) und Satz 2.9 $m_\pm(A) = m_\pm(B)$. **q.e.d.**

Bemerkung 2.16. **(i)** *Die topologische Klassifizierung linearer Flüsse e^{tA} mit $\sigma(A) \subset i\mathbb{R}$, d.h. mit $\sigma(A) = \sigma_n(A)$ ist ein ungelöstes Problem.*

(ii) *Man kann zeigen, daß die Menge der $A \in \mathcal{L}(V)$ mit $\sigma_n(A) = \emptyset$ offen und dicht in $\mathcal{L}(V)$ ist, d.h. die Eigenschaft, einen hyperbolischen Fluß zu erzeugen, ist eine generische Eigenschaft, sie kommt fast allen $A \in \mathcal{L}(V)$ zu. Folglich können wir mit dem vorangehenden Satz fast alle linearen Flüsse klassifizieren.*

Übungsaufgabe 2.17. **(i)** *Beschreiben Sie die Phasenporträts eines ebenen linearen Flusses in den im Text nicht behandelten Fällen (mindestens ein Eigenwert 0).*

(ii) *Beschreiben Sie die Phasenporträts des linearen Flusses e^{tA} mit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, d.h. des dreidimensionalen linearen Flusses, unter den verschiedenen möglichen Verteilungen der Eigenwerte von A in .*

(iii) *Veranschaulichen Sie sich das Phasenporträt des linearen Flusses e^{tA} mit $A = \mathrm{diag}(\omega_1, -\omega_1, \omega_2, -\omega_2) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.*

(iv) *Beweisen Sie, daß $\{A \in \mathcal{L}(V) | \sigma_n(A) = \emptyset\}$ offen und dicht in $\mathcal{L}(V)$ ist.*

2.3 Prinzip der linearisierten Stabilität

Wir studieren zuerst die Stabilität autonomer linearer Differentialgleichungen.

Satz 2.18. *Es sei $A \in \mathcal{L}(V)$. Dann ist die Nulllösung der linearen Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ genau dann stabil, wenn $\sigma_u(A) = \emptyset$ und für $\lambda \in \sigma_n(A)$ die Einschränkung von A auf den Eigenraum $V_\lambda = \{x \in V \mid (A - \lambda \mathbb{1}_V)^{m(\lambda)}x = 0\}$ diagonalisierbar ist.*

Die Nulllösung ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $\mathrm{Re}\, \sigma(A) < 0$ gilt.

Beweis: Es sei $\alpha = \sup\{\|e^{tA}\| \mid t > 0\} < \infty$. Dann folgt für $\epsilon > 0$

$$\|e^{tA}x\| \leq \|e^{tA}\| \cdot \|x\| < \epsilon \quad \text{für alle } (t,x) \in [0,\infty) \times B(0, \tfrac{\epsilon}{\alpha}),$$

d.h. die Stabilität der Nulllösung. Weil alle Normen auf dem endlichdimensionalen Vektorraum V äquivalent sind, ist diese Beschränktheit von e^{tA} für $t > 0$ äquivalent zu der Beschränktheit von $\|e^{tA}x_i\|$ für $t > 0$ und eine Basis $x_1, \ldots, x_m$ von V. Wenn diese Norm für einen Basisvektor nicht beschränkt ist, dann ist umgekehrt 0 auch nicht stabil. Also ist 0 genau dann stabil, wenn alle Bahnkurven beschränkt sind.

Die Bahnkurven von $x \in V_\lambda$ mit $\lambda \in \sigma_s(A)$ konvergieren für $t \to \infty$ gegen 0, und sind für $x \in V_\lambda \setminus \{0\}$ mit $\lambda \in \sigma_u(A)$ unbeschränkt. Für $x \in V_\lambda \setminus \{0\}$ mit $\lambda \in \sigma_n(A)$ sind sie genau dann beschränkt, wenn sie keine Potenzen von t enthalten, also x echte Eigenvektoren von A sind. Daraus folgt die Charakterisierung der stabilen Flüsse. Die linearen asymptotisch stabilen Flüsse sind offenbar genau die Kontraktionen. **q.e.d.**

Als nächstes betrachten wir gestörte Systeme der Gestalt

$$\dot{x} = Ax + g(t, x),$$

wobei g eine in einem geeigneten Sinne kleine Störung ist. Genauer soll im Folgenden gezeigt werden, daß unter der Voraussetzung, dass es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$\|g(t, x)\| \leq \epsilon \|x\| \quad \text{für alle} \quad x \in B(0, \delta)$$

gleichmäßig bzgl. t, das gestörte System nahezu dasselbe asymptotische Stabilitätsverhalten wie die ungestörte Linearisierung $\dot{x} = Ax$ besitzt.

Ist $g : \mathbb{R} \times V \to V$ eine stetige und in der zweiten Variablen lokal lipschitzstetig Funktion und $t \mapsto u(t)$ eine Lösung des gestörten Systems, dann ist u für $t_0 \in \mathbb{R}$ auch die eindeutig bestimmte Lösung des inhomogenen Anfaganswertproblems

$$\dot{u}(t) = Au(t) + g(t, u(t)) \qquad \text{mit } u(t_0) = u_0 = u(t_0).$$

Wegen Korollar 1.55 genügt u auch der nichtlinearen Integralgleichung

$$u(t) = e^{(t-t_0)A}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} g(s, u(s)) ds.$$

Diese Integralgleichung ist die Grundlage für den folgenden – im wesentlichen auf Ljapunov zurückgehenden – Stabilitätssatz (sowie für zahlreiche Existenzbeweise im analogen Fall unendlichdimensionaler Evolutionsgleichungen, z.B. parabolische Systeme).

Satz 2.19 (Asymptotische Stabilität). *Für $A \in \mathcal{L}(V)$ sei $\operatorname{Re} \sigma(A) < 0$ und für ein offenes Intervall I und eine offene Umgebung $X \subset V$ von 0 sei $g \in C(I \times X, V)$ in der zweiten Variablen lokal lipschitzstetig, so dass es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit*

$$\|g(t, x)\| \leq \epsilon \|x\| \quad \textit{für alle } x \in B(0, \delta) \textit{ und alle } t \in I.$$

Dann ist die Nulllösung von $\dot{u}(t) = Au(t) + g(t, u(t))$ asymptotisch stabil.

Beweis: Es existieren positive Konstanten α und β mit $\|e^{tA}\| \leq \beta e^{-\alpha t}$ für alle $t \geq 0$, wobei wir $\beta > 1$ annehmen dürfen. Also folgt die Abschätzung

$$\|u(t)\| \leq \beta e^{-\alpha(t-t_0)}\|u_0\| + \beta \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\|g(s,u(s))\|ds.$$

Es sei nun $\epsilon \in (0,\alpha)$ beliebig. Es existiert ein $\delta \in (0,\epsilon)$ mit

$$\|g(t,x)\| \leq \frac{\epsilon}{\beta}\|x\| \quad \text{für } \|x\| \leq \delta \text{ und } t \in \mathbb{R}.$$

Wenn $u(t)$ für $\|u_0\| < \frac{\delta}{\beta}$ und ein $t \geq t_0$ nicht in $B(0,\delta)$ liegt, dann sei

$$\bar{t} = \inf\{t \in [t_0,\infty) \mid \|u(t)\| \geq \delta\} \subset (t_0,\infty).$$

Dann folgt für $t_0 \leq t \leq \bar{t}$

$$\|u(t)\| \leq \delta e^{-\alpha(t-t_0)} + \epsilon \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\|u(s)\|ds \iff e^{\alpha(t-t_0)}\|u(t)\| \leq \delta + \epsilon \int_{t_0}^{t} e^{\alpha(s-t_0)}\|u(s)\|ds.$$

Mithilfe von Lemma 1.58 erhalten wir die Abschätzung

$$e^{\alpha(t-t_0)}\|u(t)\| \leq \delta + \epsilon\delta \int_{t_0}^{t} e^{\epsilon(t-s)}ds = \delta e^{\epsilon(t-t_0)} \qquad \text{für} \qquad t_0 \leq t \leq \bar{t}.$$

Daraus folgt $\delta = \|u(\bar{t})\| \leq \delta e^{-(\alpha-\epsilon)(\bar{t}-t_0)} < \delta$, was unmöglich ist. Also gilt $u(t) \in B(0,\delta)$ für alle $u_0 \in B(0,\frac{\delta}{\beta})$ und $t \geq t_0$ und dann auch $\|u(t)\| \leq \delta e^{-(\alpha-\epsilon)(t-t_0)}$. Weil das für alle $\delta > 0$ gilt ist die Nulllösung asymptotisch stabil. **q.e.d.**

Zum Beweis des entsprechenden Instabilitätssatzes benötigen wir das folgende

Lemma 2.20. *Für $A \in \mathcal{L}(V)$ gelte $\alpha < \operatorname{Re}\sigma(A) < \beta$. Dann existiert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf V, so daß für das zugehörige bilineare innere Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$*

$$\alpha\|x\|^2 < \operatorname{Re}\langle Ax,x\rangle < \beta\|x\|^2 \quad \textit{für alle } x \in V \textit{ gilt.}$$

Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wie in dem Beweis von Lemma 2.5 gezeigt, hat A die Form $A = D + N$ mit $D = \operatorname{diag}(\mu_1,\ldots,\mu_m)$, wobei $\mu_1,\ldots,\mu_m$ die mit Vielfachheit gezählten Eigenwerte von A sind. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es außerdem eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf V mit $\|N\| \leq \epsilon$. Wir wählen $\epsilon > 0$ und $\|\cdot\|$ mit

$$\epsilon < \min\{\beta - \max(\operatorname{Re}\sigma(A)), \min(\operatorname{Re}\sigma(A)) - \alpha\}.$$

Wegen $\langle Dx, x\rangle = \sum \mu_j |x_j|^2$, wobei $x_1, \ldots, x_m$ die Koordinaten von x bzgl. der (zur Konstruktion der Norm) verwendeten Orthonormalbasis sind, gilt

$$\min[\operatorname{Re}\sigma(A)]\|x\|^2 \leq \operatorname{Re}\langle Dx, x\rangle \leq \max[\operatorname{Re}\sigma(A)]\|x\|^2.$$

Da ferner $\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle = \operatorname{Re}\langle Dx, x\rangle + \operatorname{Re}\langle Nx, x\rangle$ und $|\operatorname{Re}\langle Nx, x\rangle| \leq \|N\| \cdot \|x\|^2 \leq \epsilon\|x\|^2$ ist, folgt die Behauptung aus der Wahl von ϵ und aus

$$\operatorname{Re}\langle Dx, x\rangle - \epsilon\|x\|^2 \leq \operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle \leq \operatorname{Re}\langle Dx, x\rangle + \epsilon\|x\|^2.$$

Es sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann können wir das eben Bewiesene auf die Komplexifizierung $A_{\mathbb{C}}$ in $V_{\mathbb{C}}$ anwenden. Die Hilbertnorm $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ auf $V_{\mathbb{C}}$ induziert (durch Restriktion auf $V \subset V_{\mathbb{C}}$) eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf V (vgl. den Beweis von Lemma 2.5). Für die zugehörigen Skalarprodukte erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle \xi, \eta\rangle_{\mathbb{C}} &= \frac{\|\xi+\eta\|_{\mathbb{C}}^2 - \|\xi-\eta\|_{\mathbb{C}}^2}{4} \quad \text{für alle } \xi, \eta \in V_{\mathbb{C}} \quad \text{bzw.} \\ \langle x, y\rangle &= \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} \quad \text{für alle } x, y \in V. \quad \text{Hieraus folgt} \\ \alpha\|x\|^2 = \alpha\|x\|_{\mathbb{C}}^2 &\leq \operatorname{Re}\langle A_{\mathbb{C}}x, x\rangle_{\mathbb{C}} = \langle Ax, x\rangle \leq \beta\|x\|_{\mathbb{C}}^2 = \beta\|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in V. \end{aligned}$$ **q.e.d.**

Satz 2.21 (Instabilität)**.** *Für $A \in \mathcal{L}(V)$ sei $\sigma_u(A) \neq \emptyset$ und für ein offenes Intervall I und eine offene Umgebung $X \subset V$ von 0 sei $g \in C(I \times X, V)$ in der zweiten Variablen lokal lipschitzstetig, so dass es und für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit*

$$\|g(t, x)\| \leq \epsilon\|x\| \quad \textit{für alle } x \in B(0, \delta) \textit{ und alle } t \in I.$$

Dann ist die Nulllösung der gestörten Gleichung $\dot{u}(t) = Au(t) + g(t, u(t))$ instabil.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\sigma_u(A)$ nicht leer. Sei also $\alpha \in (0, \operatorname{Re}\sigma_u(A))$. Wegen $\sigma(A - \alpha\mathbb{1}_V) = \sigma(A) - \alpha$ ist das neutrale Spektrum $\sigma_n(A_\alpha)$ von $A_\alpha = A - \alpha\mathbb{1}_V$ leer und A_α erzeugt einen hyperbolischen linearen Fluß e^{tA_α}. Wegen Satz 2.9 gibt es eine direkte Summenzerlegung $V = V_- \oplus V_+$, welche A_α in $A_\alpha = (A_\alpha)_- \otimes (A_\alpha)_+$ zerlegt, so daß $\sigma_s(A_\alpha) = \sigma((A_\alpha)_-)$ und $\sigma_u(A_\alpha) = \sigma((A_\alpha)_+)$ gelten. Der Operator A wird zerlegt in $A = A_- \oplus A_+$ mit $\sigma(A_+) = \sigma_u(A)$ und $\sigma(A_-) = \sigma_s(A) \cup \sigma_n(A)$. Es gilt also $\operatorname{Re}\sigma(A_-) \leq 0$ und $\operatorname{Re}\sigma(A_+) > \alpha > 0$ für das obige $\alpha > 0$. Wir wählen $\beta \in (0, \alpha)$ fest. Dann existieren nach Lemma 2.5 Hilbertnormen $\|\cdot\|_+$ auf V_+ und $\|\cdot\|_-$ auf V_- so daß

$$\operatorname{Re}\langle A_-x_-, x_-\rangle_- \leq \beta\|x_-\|_-^2 \quad \text{für } x_- \in V_-, \quad \operatorname{Re}\langle A_+x_+, x_+\rangle_+ \geq \alpha\|x_+\|_+^2 \quad \text{für } x_+ \in V_+$$

gilt. Offensichtlich wird durch

$$\langle x_- + x_+, y_- + y_+\rangle = \langle x_-, y_-\rangle_- + \langle x_+, y_+\rangle_+$$

ein inneres Produkt auf $V = V_- \oplus V_+$ definiert und somit eine Norm $\|\cdot\|$ mit

$$\|x\|^2 = \|x_- + x_+\|^2 = \|x_-\|_-^2 + \|x_+\|_+^2 \quad \text{für alle } x = x_- + x_+ \in V.$$

Schließlich setzen wir

$$\Psi(x) = \frac{\|x_+\|^2 - \|x_-\|^2}{2} \quad \text{für alle } x \in V,$$

Für $\gamma = \frac{\alpha-\beta}{4}$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\|g(t,x)\| \leq \gamma\|x\| \quad \text{für alle} \quad x \in B(0,\delta) \quad \text{und alle} \quad t \in I.$$

Sei nun $t_0 \in I$ und u eine Lösung mit $u(t_0) \in B(0,\delta) \subset X$ und $\Psi(u(t_0)) > 0$. Dann erfüllt $\varphi(t) = \Psi(u(t))$ auf $t \in \{t \geq t_0 \mid \|u(t)\| < \delta\} \cap \{t \geq t_0 \mid \varphi(t) > 0\}$

$$\begin{aligned}
\dot\varphi(t) &= \tfrac{1}{2}\left(\langle u_+(t), \dot u_+(t)\rangle + \langle \dot u_+(t), u_+(t)\rangle - \langle u_-(t), \dot u_-(t)\rangle - \langle \dot u_-(t), u_-(t)\rangle\right)\\
&= \mathrm{Re}\langle u_+(t), \dot u_+(t)\rangle - \mathrm{Re}\langle u_-(t), \dot u_-(t)\rangle\\
&= \mathrm{Re}\langle u_+(t), A_+u_+(t) + g(t,u(t))_+\rangle - \mathrm{Re}\langle u_-(t), A_-u_-(t) + g(t,u(t))_-\rangle\\
&= \mathrm{Re}\langle u_+(t), A_+u_+(t)\rangle - \mathrm{Re}\langle u_-(t), A_-u_-(t)\rangle + \mathrm{Re}\langle u_+(t) - u_-(t), g(t,u(t))\rangle\\
&\geq \alpha\|u_+(t)\|^2 - \beta\|u_-(t)\|^2 - (\|u_+(t)\| + \|u_-(t)\|)\|g(t,u(t))\|\\
&\geq \alpha\|u_+(t)\|^2 - \beta\|u_-(t)\|^2 - 2\|u_+(t)\|\gamma\|u(t)\|\\
&\geq (\alpha - 4\gamma)\|u_+(t)\|^2 - \beta\|u_-(t)\|^2 = 2\beta\varphi(t).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, $\|u(t)\| \leq \|u_+(t)\| + \|u_-(t)\|$ und $\|g(t,u(t))\| \leq \gamma\|u(t)\|$ für $t \in \{t \geq t_0 \mid \|u(t)\| < \delta\}$ und zuletzt $\|u_-(t)\| \leq \|u_+(t)\|$ und $\|u(t)\| \leq 2\|u_+(t)\|$für $t \in \{t \geq t_0 \mid \varphi(t) > 0\}$ benutzt. Durch Integration folgt

$$\varphi(t) \geq \varphi(t_0)e^{2\beta(t-t_0)} \quad \text{für} \quad t \in \{t \geq t_0 \mid \|u(s)\| < \delta \text{ und } \varphi(s) > 0 \text{ für } s \in [t_0,t]\}.$$

Dann folgt zuerst, dass $\varphi(t) > 0$ für jede Lösung mit $u(t_0) \in B(0,\delta) \cap \Psi^{-1}[(0,\infty)]$ auf $\{t \geq t_0 \mid \|u(s)\| < \delta \text{ für alle } s \in [t_0,t]\}$ gilt. Danach sehen wir, dass wegen

$$\tfrac{1}{2}\|u(t)\|^2 \geq \tfrac{1}{2}\|u_+(t)\|^2 \geq \varphi(t) \geq \varphi(t_0)e^{2\beta(t-t_0)}.$$

jede solche Lösung den Ball $B(0,\delta)$ verläßt, und die Nulllösung instabil ist. **q.e.d.**

Als Korollar der beiden vorangehenden Sätze erhalten wir das folgende Prinzip der linearisierten Stabilität für kritische Punkte autonomer Differentialgleichungen. Dieses fundamentale Prinzip ist eines der bekanntesten Stabilitäts- bzw. Instabilitätskriterien, das besonders in den angewandten Naturwissenschaften unzählige Anwendungen hat.

Korollar 2.22. *In einer offenen Teilmenge $X \subset V$ sei x_0 eine Nullstelle von $F \in C^1(X,V)$. Falls $\sigma(F'(x_0)) = \sigma_s(F'(x_0))$, so ist die Ruhelage x_0 des entsprechenden lokalen Flusses Φ_F asymptotisch stabil. Ist $\sigma_u(F'(x_0))$ nicht leer, so ist x_0 instabil.*

Beweis: Mit $A = F'(x_0) \in \mathcal{L}(V)$ und $g(y) = F(y+x_0) - F'(x_0)y$ gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\|g(y)\| \leq \epsilon\|y\|$ für $y \in B(0,\delta)$ gilt und $\dot{y} = F(y+x_0) = Ay + g(y)$. Also folgt die Behauptung unmittelbar aus den beiden vorangehenden Sätzen. **q.e.d.**

Bemerkung 2.23. **(i)** *Der Satz macht keine Aussagen über das Stabilitätsverhalten im Fall $\sigma_n(f'(x_0)) \neq \emptyset$ und $\sigma_u(f'(x_0) = \emptyset$. In diesem Fall hängt das Stabiltätsverhalten von den Termen höherer Ordnung ab. Um dies zu sehen, betrachten wir das System*

$$\dot{x} = -y + x^3$$
$$\dot{y} = x + y^3$$

mit $(0,0)$ als einzigen kritischen Punkt, der ein Zentrum für die Linearisierung ist. Für $r^2 = x^2 + y^2$ folgt $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = -xy + x^4 + xy + y^4 = x^4 + y^4$, also

$$\dot{r} = \frac{x^4 + y^4}{r} \geq \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{2r} = \frac{r^3}{2} \text{ für } r > 0.$$

Folglich ist $\frac{d}{dt}\frac{1}{r^2} < -1$ und die Orbits laufen von $(0,0)$ weg, d.h. $(0,0)$ ist instabil.

Das System

$$\dot{x} = -y - x^3$$
$$\dot{y} = x - y^3$$

hat dieselbe Linearisierung im kritischen Punkt $(0,0)$. Nun folgt $\dot{r} = -\frac{x^4+y^4}{r} < 0 \leq -\frac{r^3}{2}$ und $\frac{d}{dt}\frac{1}{r^2} > 1$ für $r > 0$. Folglich "laufen die Orbits nach $(0,0)$ hinein", d.h. $(0,0)$ ist sogar asymptotsich stabil. Es ist leicht zu sehen, daß das Phasenporträt bei allgemeineren Störungen höherer Ordnung wesentlich komplizierter aussehen kann.

(ii) *Das zentrale Stabilitätsresultat in dem Satz ist eine lokale Aussage. Es enthält keine Angaben über den Einzugsbereich eines asymptotisch stabilen kritischen Punktes. Einige Aussagen in dieser Richtung werden wir in den folgenden Abschnitten kennenlernen.*

(iii) *Der Beweis gilt auch für lokal lipschitzstetiges in x_0 differenzierbares $f \in C(X,V)$.*

(iv) *Unter geeigneten Voraussetzungen an den Evolutionsoperator A der nichtautonomen linearen Gleichung $\dot{x} = A(t)x$ lassen sich verwandte Resultate auch für gestörte nichtautonome Gleichungen*

$$\dot{x} = A(t) + g(t,x)$$

beweisen. Da solche Voraussetzungen in praktischen Fällen jedoch kaum zu verifizieren sind, werden wir uns im Folgenden in erster Linie mit dem besonders wichtigen Fall autonomer Gleichungen befassen.

(v) *Um die obigen Stabilitätssätze praktisch anwenden zu können, benötigt man Kriterien, welche es erlauben festzustellen, ob* $\operatorname{Re}\sigma(A) < 0$ *gilt. Da die Eigenwerte die Nullstellen des charakteristischen Polynoms*

$$det(\lambda - A) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + a_2\lambda^{m-2} + \ldots + a_{m-1}\lambda + a_m$$

sind $(dim(V) = m)$*), möchte man möglichst aus den Koeffizienten eines Polynoms ablesen, ob alle Wurzeln in der negativen Halbebene liegen. Es gibt eine Reihe von Kriterien dieser Art. Das bekannteste ist das folgende Routh-Hurwitz-Kriterium:*

Satz 2.24 (Routh-Hurwitz Kriterium)**.** *Sämtliche Nullstellen eines reellen Polynoms* $p(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1}z + a_m$ *vom Grand* m *besitzen genau dann negativen Relateil, wenn die Matrizen* $H_1, \ldots, H_m$ *positive Determinante haben. Dabei ist*

$$H_k = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & \ldots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \ldots & \ldots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & \ldots & a_{2k-3} \\ & 1 & a_2 & a_4 & \ldots & a_{2k-4} \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & & & & \vdots & \end{pmatrix} \quad mit \quad a_j = 0 \text{ für } j > m.$$

Siehe Abschnitt 16.6 in "Matrizentheorie" von F.R. Gantmacher.

2.4 Die direkte Methode von Ljapunov

In diesem Abschnitt führen wir eine Methode ein um die lokale und globale asymptotische Stabilität zu zeigen. Diese Methode benutzt sogenannte Ljapunovfunktionen.

Definition 2.25 (Ljapunovfunktionen)**.** *Sei* $\Phi : W \to X$ *ein lokaler Fluss auf einem metrischen Raum* X*. Dann heit* $L : X \to \mathbb{R}$ *Ljapunovfunktion, wenn* $L(\Phi(t,x)) \leq L(x)$ *für alle* $(t,x) \in W$ *mit* $t > 0$ *gilt. Wenn sogar* $L(\Phi(t,x)) < L(x)$ *für alle* $(t,x) \in W$ *mit* $t > 0$ *und* $\Phi(t,x) \neq x$ *gilt, dann heißt* L *strikte Ljapunovfunktion.*

Wegen der Bedingung (ii) eines lokalen Flusses ist L genau dann eine Ljapunovfunktion, wenn $t \mapsto L(\Phi(t,x))$ für alle $x \in X$ monoton fallend ist. Für ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld $F : X \to V$ auf einer offene Teilmenge X eines Banachraumes V heißt L dann Ljapunovfunktion, wenn es eine Ljapunovfunktion für den ensprechenden lokalen Fluss Φ_F ist. Weil jede Integralkurve $t \mapsto \Phi_F(t,x)$ von F stetig differenzierbar ist, ist $t \mapsto L(\Phi_F(t,x))$ differenzierbar, wenn L differenzierbar ist. Deshalb ist eine differenzierbare Funktion L genau dann eine Ljapunovfunktion zu F, wenn

$$\nabla L(x) \cdot F(x) \leq 0 \qquad \text{für alle } x \in X$$

gilt. Wenn für nicht konstante Integralkurven keine Gleichheit gilt, dann ist L sogar eine strikte Ljapunovfunktion. Allerdings ist das nur eine hinreichende und keine notwendige Bedingung für eine differenzierbare Funktion $L : X \to \mathbb{R}$, damit L eine strikte Ljapunovfunktion ist. Wir können Ljapunovfunktionen auch durch die positive Invarianz aller Mengen $L^{-1}[(-\infty, y)]$ mit $y \in \mathbb{R}$ charakterisieren:

Definition 2.26. *Für einen lokalen Fluss $\Phi : W \to X$ auf dem metrischen Raum X heißt eine Teilmenge $A \subset X$ positiv bzw. negativ invariant, wenn $\Phi(t, x) \in A$ für alle $(t, x) \in W \cap ((0, \infty) \times A)$ bzw. $W \cap ((-\infty, 0) \times A)$ gilt. Sie heißt invariant, wenn sie positiv und negativ invariant ist, also $\Phi(t, x) \in A$ für alle $(t, x) \in W \cap (\mathbb{R} \times A)$ gilt.*

Im Folgenden werden wir Grenzwerte von Folgen $(\Phi(t_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \to \pm\infty$ betrachten. Die Menge solcher Grenzwerte wird als Limesmenge bezeichnet:

Definition 2.27 (Limesmengen)**.** *Für einen lokalen Fluss $\Phi : W \to X$ und $x \in X$ heißen die Mengen $\omega^\pm(x)$ aller Grenzwerte von Folgen $(\Phi(t_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \to \pm\infty$ und $\{(t_n, x) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset W$ Limesmengen von x*

Offenbar sind $\omega^\pm(x)$ leer, wenn W nicht $(0, \infty) \times \{x\}$ bzw. $(-\infty, 0) \times \{x\}$ enthält.

Lemma 2.28. *Die Limesmengen $\omega^\pm(x)$ eines stetigen lokalen Flusses sind abgeschlossene invariante Mengen.*

Beweis: Sei y im Abschluss von $\omega^\pm(x)$. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in \omega^\pm(x)$ mit $d_X(y_n, y) < \frac{1}{n}$ und ein $t_n > n$ bzw. $t_n < -n$ mit $d_X(\Phi(t_n, x), y_n) < \frac{1}{n}$. Dann konvergiert $(\Phi(t_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $y \in \omega^\pm(x)$. Also ist $\omega^\pm(x)$ abgeschlossen.

Wegen der Stetigkeit von Φ konvergiert $\Phi(t + t_n, x) = \Phi(t, \Phi(t_n, x))$ gegen $\Phi(t, y)$, wenn $(\Phi(t_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y konvergiert. Deshalb ist $\omega^\pm(x)$ invariant. **q.e.d.**

Lemma 2.29. *Wenn $\{\Phi(t, x) \mid t \in [0, \infty)\}$ bzw. $\{\Phi(t, x) \mid t \in (-\infty, 0]\}$ in einer kompakten Menge K enthalten ist, dann ist $\omega^+(x)$ bzw. $\omega^-(x)$ nichtleer, kompakt und zusammenhängend. Der Grenzwert $\lim_{t\to\pm\infty} \inf_{y\in\omega^\pm(x)} d_X(\Phi(t, x), y)$ ist dann Null.*

Beweis: Unter den Bedingungen des Lemmas enthält W genau wie im Beweis von Satz 1.37 zunächst $(-\epsilon, \epsilon) \times K$ und dann $[0, \infty) \times \{x\}$ bzw. $(-\infty, 0] \times \{x\}$. Für jede Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t \to \pm\infty$ besitzt die Folge $(\Phi(t_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ dann eine konvergente Teilfolge. Also ist $\omega^\pm(x)$ nicht leer. Als abgschlossene Teilmenge von K ist $\omega^\pm(x)$ auch kompakt.

Wenn $\omega^\pm(x)$ nicht zusammenhängend ist, dann zerfällt es in eine disjunkte Vereinigung von zwei abgschlossenen Mengen $\omega^\pm(x) = A \cup B$. Der Abstand $d_X(a, b)$ hat auf der kompakten Menge $(a, b) \in A \times B$ einen Minimalabstand $\delta > 0$. Seien

$$O = \bigcup_{a\in A} B(a, \tfrac{\delta}{2}), \qquad U = \bigcup_{b\in B} B(b, \tfrac{\delta}{2}).$$

disjunkte offenen Umgebungen von A und B. Wir wählen eine streng monotone Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver bzw. negativer Zeitpunkte mit $t_n \to \pm\infty$, so das $\Phi(t_n, x)$ abwechselnd in O und in U liegt. Sei s_n das Supremum oder Infimum von $\{t \in [t_n, t_{n+1}] \mid \Phi(t) \in O\}$, jenachdem $\Phi(t_n, x)$ oder $\Phi(t_{n+1}, x)$ in O liegt. Dann liegt $\Phi(s_n, x)$ nicht in O, weil sonst $\Phi(t, x)$ für $t \in (s_n - \epsilon, s_n + \epsilon)$ und ein $\epsilon > 0$ in O liegt, und nicht in U, weil sonst $\Phi(t, x)$ für $t \in (s_n - \epsilon, s_n + \epsilon)$ für ein $\epsilon > 0$ in U und damit nicht in O liegt. Die Folge $(\Phi(s_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ in K hat dann eine konvergente Teilfolge, dessen Grenzwert in $K\setminus(O\cup U)$ liegt, im Widerspruch zu der Annahme, dass $\omega^\pm(x)$ nicht zusammenhängend ist.

Wenn $\inf_{y\in\omega^\pm(x)} d_X(\Phi(t_n, x), y)$ für eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \to \pm\infty$ durch eine positive Zahl nach unten beschränkt ist, dann kovergiert eine Teilfolge von $(\Phi(t_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $y \in \omega^\pm(x)$. Das widerspricht der Annahme, dass $\inf_{y\in\omega^\pm(x)} d_X(\Phi(t_n, x), y)$ durch eine positive Zahl nach unten beschränkt ist. Also sind alle Häufungspunkte von $\inf_{y\in\omega^\pm(x)} d_X(\Phi(t_n, x), y)$ Null, und alle solchen Folgen konvergieren gegen Null. **q.e.d.**

Satz 2.30. *Sei $\Phi : W \to X$ ein stetiger lokaler Fluss und $L : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Ljapunovfunktion. Dann ist L auf $\omega^+(x)$ konstant.*

Beweis: Seien $y, z \in \omega^+(x)$. Dann gibt es zwei streng monoton wachsende Folgen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \to \infty$, $s_n \to \infty$ und $t_n < s_n < t_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $(\Phi(t_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y und $(\Phi(s_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen z konvergiert. Weil L stetig ist, konvergieren die Folgen $(L(\Phi(t_n, x)))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $L(y)$ und $(L(\Phi(s_n, x)))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $L(z)$. Aus der Monotonie von $t \mapsto L(\Phi(t, x))$, folgt $L(y) \geq L(z) \geq L(y)$. **q.e.d.**

In bestimmten Fällen kann man mit Ljapunovfunktionen die Stabilität oder asymptotische Stabilität eines Fixpunktes eines lokalen Flusses zeigen. Im Folgenden sei $\Phi : W \to X$ ein lokaler stetiger Fluss auf einer offenen Teilmenge X eines endlichdimensionalen Banachraumes V und $x_0 \in X$ ein Fixpunkt von Φ.

Satz 2.31. *Sei $x_0 \in X$ ein Fixpunkt eines stetigen lokalen Flusses $\Phi : W \to X$ auf einer offenen Teilmenge X eines endlichdimensionalen Banachraumes und $L : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Ljapunovfunktion. Dann gilt*

(i) *Wenn $L(x) > L(x_0)$ für $x \in X \setminus \{x_0\}$ gilt, dann ist x_0 stabil.*

(ii) *Ist zusätzlich zu (i) L eine strikte Ljapunovfunktion und x_0 die einizige Ruhelage von Φ, so ist x_0 asymptotisch stabil.*

(iii) *Sind zusätzlich zu (i)-(ii) die Mengen $L^{-1}[(-\infty, y]]$ für alle $y \geq L(x_0)$ kompakt, dann ist x_0 global asymptotisch stabil, d.h. $\lim_{t\to\infty} \Phi(t, x) = x_0$ für alle $x \in X$.*

Beweis (i): Sei $\epsilon > 0$ so klein, dass der abgschlossene Ball $\overline{B(x_0, \epsilon)}$ von V in X enthalten ist. Dann besitzt L einen minimalen Wert $y > L(x_0)$ auf der kompakten Menge $\{x \in X \mid \|x - x_0\| = \epsilon\}$. Wegen der Stetigkeit von L enthält die Menge

$\{x \in \overline{B(x_0,\epsilon)} \mid L(x) < y\}$ einen Ball $B(x_0,\delta)$. Für alle $x \in B(x_0,\delta)$ gilt dann $L(x) < y$ und deshalb auch $L(\Phi(t,x)) < y$ für alle $t \geq 0$ mit $(t,x) \in W$. Insbesondere wird $\|\Phi(t,x) - x_0\|$ für solche t nie gleich ϵ und $\Phi(t,x)$ bleibt in $B(x_0,\epsilon)$. Das zeigt (i).

(ii): Wegen Lemma 2.3 und wegen (i) gibt es ein $\delta > 0$, so dass $[0,\infty) \times B(x_0,\delta)$ in W enthalten ist. Für hinreichend kleine δ sind $\Phi(t,x)$ wegen dem vorangehenden Beweis für alle $(t,x) \in [0,\infty) \times B(x_0,\delta)$ in einem kompakten Ball $\overline{B(x_0,\epsilon)}$ enthalten. Wegen Lemma 2.29 ist $\omega^+(x)$ dann für alle $x \in B(x_0,\delta)$ nicht leer und positiv invariant. Wegen Satz 2.30 ist $\omega^+(x) = \{x_0\}$. Insbesondere ist für $x \in B(x_0,\delta)$ und jede Folge positiver Zahlen t_n mit $t_n \to \infty$ die Folge $\Phi(t_n,x)$ beschränkt und besitzt nur den Häufungspunkt x_0. Also konvergieren alle diese Folgen gegen x_0 und x_0 ist attraktiv.

(iii): Für alle $x \in X$ sind $\Phi(t,x)$ in der kompakten Menge $L^{-1}[(-\infty, L(x)]]$ enthalten. Dann zeigen die Argumente vom Beweis von (ii) dass wieder mit Lemma 2.29 und Satz 2.30 $\omega^+(x) = \{x_0\}$ und $\lim_{t\to\infty} \Phi(t,x) = x_0$ gilt. **q.e.d.**

Die Bedingung in (ii) kann man für den lokalen Fluss eines lokal lipschitzstetigen Vektorfeldes $F : X \to V$ und eine differenzierbare Ljapunovfuncktion $L : X \to \mathbb{R}$ z.B. dadurch garantieren, dass $\nabla L(x) \cdot F(x) < 0$ auf $X \setminus \{x_0\}$ gilt. Dann hat insbesondere F nur eine Nullstelle bei x_0.

2.5 Linearisierungen

In diesem Abschnitt sind $(V, \|\cdot\|)$ ein endlichdimensionaler Banachraum, $X \subset V$ eine offene Teilmenge und $f \in C^1(X,V)$. Wir wollen den von f erzeugten Fluß Φ in der Nähe eines kritischen Punktes x_0 in Situationen studieren, in denen das Prinzip der linearisierten Stabilität Korollar 2.22 nur aussagt, dass der kritische Punkt nicht asymptotische stabil ist. Wir werden sehen, dass für jeden kritischen Punkt x_0, an dem die Linearisierung $f'(x_0)$ einen hyperbolischen Fluss erzeugt, diese Linearisierung das Langzeitverhalten des Flusses in einer Umgebung von x_0 beschreibt: d.h. in der Nähe von x_0, der Fluß Φ flußäquivalent zum linearen Fluß $e^{tf'(x_0)}$ ist, und die Sattelpunktstruktur qualitativ erhalten bleibt. Im folgenden Abschnitt werden wir dann präzise Aussagen über die "stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten" W_s und W_u herleiten.

Sind X und Y metrische Räume und $\Phi : W \to X$ sowie $\tilde{\Phi} : \tilde{W} \to Y$ Flüsse auf X bzw. Y, so sagen wir, Φ ist in $x_0 \in X$ zu $\tilde{\Phi}$ in $y_0 \in Y$ (lokal) C^k-flußäquivalent, oder kurz: $\Phi|x_0$ ist zu $\tilde{\Phi}|y_0$ C^k-flußäquivalent, $0 \leq k \leq \infty$, wenn es Umgebungen U von x_0 und V von y_0 gibt, derart, daß der von Φ auf U (durch Restriktion) induzierte lokale Fluß zu dem von $\tilde{\Phi}$ auf V induzierten lokalen Fluß C^k-flußäquivalent ist.

Im Folgenden sei $\Phi_f : W \to X$ stets der von f auf X erzeugte Fluß. Wir wollen den Fluß in der Nähe eines hyperbolischen kritischen Punktes x_0 studieren. Hierbei heißt der kritische Punkt x_0 des von f erzeugten Flusses hyperbolisch, wenn $\sigma_n(f'(x_0)) = \emptyset$

ist, d.h. wenn der lineare Fluß $e^{tf'(x_0)}$ hyperbolisch ist.

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen Flüssen und Homöomorphismen. Nach Lemma1.32 ist nämlich $\Phi(t,\cdot)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein lokaler Homöomorphismus. Insbesondere ist für den linearen Fluß e^{tA} für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein Automorphismus von V. Aus diesen Gründen ist es sinnvoll (und für Anwendungen auf andere Probleme nützlich), zuerst den Fall von Homöomorphismen zu betrachten. Zur Motivierung der folgenden Definition beweisen wir zuerst den folgenden Spezialfall des Spektralabbildungssatzes.

Lemma 2.32. *Für $A \in \mathcal{L}(V)$ gilt $\sigma(e^A) = e^{\sigma(A)} = \{e^\lambda | \lambda \in \sigma(A)\}$.*

Beweis: Wegen $\sigma(A) = \sigma(A_\mathbb{C})$ können wir - durch Übergang zur Komplexifizierung - annehmen, daß V ein komplexer Banachraum ist. Sind dann $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paareweise verschiedenen Eigenwerte von A, so besitzt V die direkte Summenzerlegung $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$, die sowohl A als auch e^A reduziert. Es genügt also, $\sigma(e^{A_j}) = e^{\sigma(A_j)}$ mit $A_j = A|_{V_j}$ für $j = 1, \ldots, k$ zu beweisen. Wir können somit annehmen, daß $\sigma(A) = \{\lambda\}$ und $A = \lambda \mathbb{1}_V + N$ mit einem nilpotenten Operator $N \in \mathcal{L}(V)$ gilt. Es gibt folglich ein $x \in V \setminus \{0\}$ mit $Ax = \lambda x$, d.h. $Nx = 0$. Hieraus folgt

$$e^A x = e^\lambda e^N x = e^\lambda x,$$

d.h. $\sigma(e^A) \supset e^{\sigma(A)}$. Gilt umgekehrt $e^A y = \mu y$ für ein $\mu \in \mathbb{C}$ und $y \in V \setminus \{0\}$, so folgt

$$\mu y = e^\lambda e^N y = e^\lambda \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} N^k y.$$

Dann gibt es einen kleinsten Index l mit $0 \leq l \leq m$ und $N^{l+1} y = 0$. Durch Anwenden von N^l auf obige Gleichung erhalten wir

$$\mu N^l y = e^\lambda N^l y,$$

also $\mu = e^\lambda$ wegen $N^l y \neq 0$, was $\sigma(e^a) \subset e^{\sigma(A)}$ impliziert. **q.e.d.**

Es sei nun $A \in \mathcal{L}(V)$, und A erzeuge einen hyperbolischen linearen Fluß e^{tA}, d.h. $\sigma_n(A) = \sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Dann folgt aus dem vorangehenden Lemma, daß $\sigma(e^A) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$ gilt, wobei $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ die Einheitskreislinie der komplexen Ebene ist. Mit anderen Worten $e^A \in \mathcal{L}(V)$ besitzt keine Eigenwerte vom Betrag 1. Allgemein heißt ein $T \in \mathcal{L}(V)$ hyperbolisch, wenn T keine Eigenwerte vom Betrag 1 besitzt, d.h. wenn $\sigma(T) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$ gilt. Ist $T \in \mathcal{L}(V)$ hyperbolisch, so gilt

$$\begin{array}{ll} \sigma(T) = \sigma_0(T) \cup \sigma_\infty(T) & \text{mit} \\ \sigma_0(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \mid |\lambda| < 1\} & \sigma_\infty(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \mid |\lambda| > 1\}. \end{array}$$

Bezeichnen wir wieder mit $m(\lambda)$ die algebraische Multiplizität des Eigenwertes $\lambda \in \sigma(T)$, dann sind für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$V_0 = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_0(T)} \{x \in V \mid (\lambda - T)^{m(\lambda)} x = 0\} \quad V_\infty = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_\infty(T)} \{x \in V \mid (\lambda - T)^{m(\lambda)} x = 0\}.$$

invariante Untervektorräume von V, die T reduzieren, d.h.

$$V = V_0 \oplus V_\infty \quad \text{und } T = T_0 \oplus T_\infty \quad \text{und } \sigma(T_0) = \sigma_0(T) \quad \text{und } \sigma(T_\infty) = \sigma_\infty(T).$$

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so wenden wir diese Zerlegung auf die Komplexifizierung an und restringieren anschließend auf die reellen Teilräume, d.h.

$$V_0 = (V_\mathbb{C})_0 \cap V \quad \text{und } V_\infty = (V_\mathbb{C})_\infty \cap V \quad \text{sowie } T_0 = (T_\mathbb{C})_0|_{V_0} \quad \text{und } T_\infty = (T_\mathbb{C})_\infty|_{V_\infty}.$$

Dann folgt wie im Beweis von Satz 2.9 die Aussage, weil $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ $\mathbb{S}^1$ invariant läßt.

Das folgende Lemma stellt ein Analogon zu Lemma 2.5 dar. Zur einfacheren Formulierung verwenden wir die vereinfachende Schreibweise

$$|\sigma(A)| < \alpha \Leftrightarrow |\lambda| < \alpha \quad \text{für alle } \lambda \in \sigma(A).$$

Andere Ungleichungen sind analog zu interpretieren.

Lemma 2.33. *Es sei $T \in \mathcal{L}(V)$ invertierbar und hyperbolisch, und für $\alpha \in (0,1)$ gelte*

$$|\sigma(T_0)| < \alpha \text{ und } |\sigma((T_\infty)^{-1})| < \alpha.$$

Dann gibt es eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf V so daß V_0 und V_∞ orthogonal sind und mit

$$\max\{\|T_0\|, \|(T_\infty)^{-1}\|\} \leq \alpha.$$

Beweis: Wegen $\|A_\mathbb{C}\| = \|A\|$ (vgl. den Beweis von Lemma 2.5 können wir o.B.A. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ annehmen. Nach dem Beweis von Lemma 2.5 wissen wir dann, daß $T_0 = D + N$ ist, mit einem nilpotenten Operator $N \in \mathcal{L}(V_0)$ und einem Diagonaloperator (bzgl. einer geeigneten Basis) $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_k)$, wobei $\mu_1, \ldots, \mu_k$ die gemäß ihrer Vielfachheit gezählten Eigenwerte von T_0 sind. Außerdem wissen wir, daß wir die Basis so wählen können, daß für die zugehörige euklidische Norm $\|\cdot\|_0$ auf V_0 gilt

$$\|N\|_0 \leq \alpha - \max\{|\mu_j| \mid j = 1, \ldots, k\}.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$\|T_0\|_0 \leq \|D\|_0 + \|N\|_0 \leq \max\{|\mu_j| \mid 1 \leq j \leq k\} + \|N\|_0 \leq \alpha.$$

Analog finden wir eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf V_∞, so daß für die zugehörige Operatornorm gilt: $\|T_\infty^{-1}\|_\infty \leq \alpha$. Dann wird durch

$$\|x\|^2 = \|x_0\|_0^2 + \|x_\infty\|_\infty^2 \quad \text{für alle } x = x_0 + x_\infty \in V_0 \oplus V_\infty = V$$

die gewünschte Hilbertnorm auf V definiert. **q.e.d.**

Bemerkung 2.34. *Ist $T \in \mathcal{L}(V)$ invertierbar und hyperbolisch, so ist*

$$|\sigma_0(T)| < 1 < |\sigma_\infty(T)|.$$

Da für jedes invertierbare $B \in \mathcal{L}(V)$ trivialerweise

$$\sigma(B^{-1}) = \sigma^{-1}(B) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \sigma(B)\}$$

gilt, folgt $|\sigma(T_\infty^{-1})| < 1$. Also existieren ein $\alpha < 1$ und eine Norm $\|\cdot\|$ auf V mit

$$\|T_0\| \leq \alpha < 1 \text{ und } \|T_\infty^{-1}\| \leq \alpha < 1.$$

Für $x \in V_0$ folgt hieraus

$$T^k x = (T_0)^k x \to 0 \text{ für } k \to \infty,$$

und für $y \in V_\infty$ ergibt sich

$$T^{-k} y = (T_\infty)^{-k} y \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

In Analogie zu linearen Flüssen nennt man deshalb V_0 den stabilen und V_∞ den instabilen Unterverktorraum von T (oder genauer: des von T erzeugten diskreten Flusses).

Für einen metrischen Raum sei $C_b(X, V)$ der Banachraum der beschränkten stetigen Funktionen von X nach V mit der Supremumsnorm. Ist X kompakt, so ist natürlich $C_b(X, V) = C(X, V)$ und

$$\|u\|_\infty = \max_{x \in X} \|u(x)\|.$$

Außerdem ist es klar, daß wir eine äquivalente Norm auf $C_b(X, V)$ erhalten, wenn wir die Norm in V durch eine äquivalente Norm ersetzen. Es sei nun $V = V_1 \oplus V_2$ eine direkte Summenzerlegung von V, und für die zugehörigen Projektionen $P_i : V \to V_i$ gelte $\|P_i\| \leq 1$. Dann läßt sich jedes Element $u \in V$ als $u = P_1 u + P_2 u$ schreiben, mit $P_i u \in C_b(X, V_i)$. Außerdem gilt trivialerweise

$$\|P_i u\|_\infty = \sup_{x \in X} \|P_i u(x)\| \leq \|P_i\| \cdot \|u\|_\infty \leq \|u\|_\infty$$

für $i = 1, 2$. Folglich werden durch $(P_i u)(x) = P_i u(x)$ für alle $x \in X$ stetige Projektionen $P_i : C_b(X, V) \to C_b(X, V_i)$, mit $P_1 + P_2 = \mathbb{1}$ definiert, d.h. es gilt $C_b(X, V) = C_b(X, V_1) \oplus C_b(X, V_2)$, und $P_i : C_b(X, V) \to C_b(X, V_i)$ sind die zugehörigen Projektionen. Setzen wir

$$\|u\|_{C_b(X,V)} = \max\{\|P_1 u\|_\infty, \|P_2 u\|_\infty\},$$

so folgt aus

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\|u\|_\infty &= \tfrac{1}{2}\|P_1u + P_2u\|_\infty \leq \tfrac{1}{2}(\|P_1u\|_\infty + \|P_2u\|_\infty)\\ &= \tfrac{1}{2}(\|P_1u\|_{C_b(X,V_1)} + \|P_2u\|_{C_b(X,V_2)}) \leq \|u\|_{C_b(X,V)} \leq \|u\|_\infty,\end{aligned}$$

daß $\|\cdot\|_{C_b(X,V)}$ eine äquivalente Norm auf $C_b(X,V)$ ist.

Schließlich benötigen wir noch das Analogon zum Begriff der "Flußäquivalenz" für den Fall topologischer Abbildungen. Sind X und Y topologische Räume und $A : X \to X$ sowie $B : Y \to Y$ Homöomorphismen, so heißt ein Homöomorphismus $\Psi : X \to Y$ eine topologische Konjugation von A nach B, falls $\Psi \circ A = B \circ \Psi$ gilt. Sind X und Y offene Teilmengen von Banachräumen und sind A, B und Ψ C^k-Diffeomorphismen, $1 \leq k \leq \infty$, so heißt Ψ eine C^k-Konjugation. Schließlich heißen A und B topologisch (bzw. C^k-)konjugiert, falls eine topologische (bzw. C^k-)Konjugation von A nach B existiert. Hierdurch wird trivialerweise eine Äquivalenzrelation in der Klasse der Homöomorphismen (bzw. der C^k-Diffeomorphismen) definiert. Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den globalen Hartmannschen Linearisierungssatz beweisen.

Satz 2.35. *Für ein invertierbares und hyperbolisches $T \in \mathcal{L}(V)$, und für jede lipschitzstetige Funktion $g \in C_b(V,V)$ mit genügend kleiner Lipschitzkonstanten, sind die Abbildungen T und $T+g$ topologisch konjugiert.*

Beweis: Wegen dem vorangehenden Lemma und der Bemerkung danach gibt es eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf V mit

$$\max\{\|T_0\|, \|T_\infty^{-1}\|\} \leq \alpha < 1.$$

Da beim Übergang zu einer äquivalenten Norm auf V die Lipschitzkonstante von g mit einem positiven Faktor multipliziert wird, können wir die Norm $\|\cdot\|$ auf V verwenden und annehmen, daß für ein $2\lambda < \min\{1-\alpha, \|T^{-1}\|^{-1}\}$ gilt:

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \lambda\|x-y\| \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

(i) Wir zeigen zuerst, daß $T + g \in C(V,V)$ ein Homöomorphismus ist. Da, für jedes $z \in V$, die Gleichung $Tx + g(x) = z$ äquivalent zur Fixpunktgleichung

$$x = T^{-1}(z - g(x)) = f_z(x)$$

ist, ist $T+g$ bijektiv, falls $f_z : V \to V$ genau einen Fixpunkt $x(z)$ hat. Wegen

$$\begin{aligned}\|f_z(x) - f_z(y)\| &\leq \|T^{-1}\| \cdot \|g(y) - g(x)\| &&\leq \lambda\|T^{-1}\| \cdot \|x-y\|\\ &\leq \tfrac{1}{2}\|x-y\| &&\text{für alle } x, y \in V\end{aligned}$$

folgt dies aus dem Banachschen Fixpunktsatz. Wir erhalten für $z, \tilde{z} \in V$

$$\begin{aligned}\|x(z) - x(\tilde{z})\| &= \|f_z(x(z)) - f_{\tilde{z}}(x(\tilde{z}))\| \\ &\le \|f_z(x(z)) - f_z(x(\tilde{z}))\| + \|f_z(x(\tilde{z})) - f_{\tilde{z}}(x(\tilde{z}))\| \\ &\le \tfrac{1}{2}\|x(z) - x(\tilde{z})\| + \|T^{-1}\| \cdot \|z - \tilde{z}\|,\end{aligned}$$

also $\|x(z) - x(\tilde{z})\| \le 2\|T^{-1}\|\|z - \tilde{z}\|$. Also ist $x(\cdot) = (T+g)^{-1} : V \to V$ lipschitzstetig.
(ii) Es sei nun $h \in C_b(V,V)$ eine zweite lipschitzstetige Funktion mit der Lipschitzkonstanten λ. Ferner nehmen wir an, daß es zu jedem Paar (g,h) solcher Funktionen genau ein $H = H(g,h) \in C(V,V)$ gibt mit

$$H - \mathbb{1}_V \in C_b(V,V) \qquad \text{und } (T+g) \circ H = H \circ (T+h).$$

Dann gilt für $a = H(g,0)$

$$(T+g) \circ a = a \circ T,$$

und für $b = H(0,g)$

$$T \circ b = b \circ (T+g).$$

Es folgt

$$(T+g) \circ a \circ b = a \circ T \circ b = a \circ b \circ (T+g).$$

Wegen $a \circ b - \mathbb{1}_V = (a - \mathbb{1}_V) \circ b + (b - \mathbb{1}_V) \in C_b(V,V)$ und der Eindeutigkeit von H ist $a \circ b = H(g,g) = \mathbb{1}_V$ ist. Analog folgt $b \circ a = \mathbb{1}_V$. Folglich ist a ein Homömorphismus von V auf sich, also eine topologische Konjugation von $T+g$ nach T.
(iii) Mit $H = \mathbb{1}_V + u$ bleibt zu zeigen, daß es genau ein $u \in C_b(V,V)$ gibt mit

$$(T+g) \circ (\mathbb{1}_V + u) = (\mathbb{1}_V + u) \circ (T+h).$$

Da nach (i) $T+h$ ein Homöomorphismus ist, ist das äquivalent zu

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_V + u &= (T+g) \circ (\mathbb{1}_V + u) \circ (T+h)^{-1} \\ &= g \circ (\mathbb{1}_V + u) \circ (T+h)^{-1} + T \circ (T+h)^{-1} + T \circ u \circ (T+h)^{-1}.\end{aligned}$$

Wegen $T \circ (T+h)^{-1} = \mathbb{1}_V - h \circ (T+h)^{-1}$ ist die letzte Gleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned}u = \tilde{F}(u) &= T \circ u \circ (T+h)^{-1} + G(u) \quad \text{mit} \\ G(u) &= g \circ (\mathbb{1}_V + u) \circ (T+h)^{-1} - h \circ (T+h)^{-1}.\end{aligned}$$

Offensichtlich bildet $\tilde{F}$ den Banachraum $C_b(V,V)$ in sich ab. Es bleibt zu zeigen, daß $\tilde{F}$ genau einen Fixpunkt in $C_b(V,V)$ hat.

Wegen $V = V_0 \oplus V_\infty$ und da V_0 und V_∞ orthogonal sind, folgt $\|P_0\|, \|P_\infty\| \leq 1$ für die zugehörigen orthogonalen Projektionen. Die Fixpunktgleichung für $\tilde{F}$ ist somit äquivalent zu dem Paar von Gleichungen

$$\begin{aligned} P_0 \circ u = F_0(u) &= T_0 \circ P_0 \circ u \circ (T+h)^{-1} + P_0 \circ G(u) \\ P_\infty \circ u &= T_\infty \circ P_\infty \circ u \circ (T+h)^{-1} + P_\infty \circ G(u). \end{aligned}$$

Da die letzte Gleichung durch Multiplikation von links mit T_∞^{-1} und von rechts mit $T+h$ in die äquivalente Gleichung

$$P_\infty \circ u = F_\infty(u) = T_\infty^{-1} \circ P_\infty \circ u \circ (T+h) - T_\infty^{-1} \circ P_\infty \circ G(u) \circ (T+h)$$

übergeht, ist die Fixpunktgleichung für $\tilde{F}$ äquivalent zu der letzten und der vorvorletzten Gleichung. Nach den vorangehenden Betrachtungen induziert die Zerlegung $V = V_0 \oplus V_\infty$ die Zerlegung $C_b(V,V) = C_b(V,V_0) \oplus C_b(V,V_\infty)$ mit

$$\begin{aligned} \|u\|_{C_b(V,V)} &= \max\{\|P_0 u\|_\infty, \|P_\infty u\|_\infty\} \\ \tfrac{1}{2}\|u\|_\infty \leq \|u\|_{C_b(V,V)} &\leq \|u\|_\infty \quad \text{für alle } u \in C_b(V,V). \end{aligned}$$

Also wird durch $F = F_0 + F_\infty$ eine Abbildung von $C_b(V,V)$ in sich definiert, derart, daß die beiden Fixpunktgleichungen $u = F(u)$ und $u = \tilde{F}(u)$ äquivalent sind. Für $u, v \in C_b(V,V)$ und $x \in V$ erhalten wir mit $y = (T+h)^{-1}(x)$ und $z = (T+h)(x)$ und unter Verwendung von der Abschätzung an die Normen von T_0 und T_∞ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|F_0(u)(x) - F_0(v)(x)\| &\leq \alpha\|P_0 u(y) - P_0 v(y)\| + \|g(y+u(y)) - g(y+v(y))\| \\ &\leq \alpha\|P_0(u-v)\|_\infty + \lambda\|u-v\|_\infty \leq (\alpha+2\lambda)\|u-v\|_{C_b(V,V)}, \\ \|F_\infty(u)(x) - F_\infty(v)(x)\| &\leq \alpha\|P_\infty u(z) - P_\infty v(z)\| + \alpha\|g(x+u(x)) - g(x+v(x))\| \\ &\leq \alpha\|P_\infty(u-v)\|_\infty + \lambda\|u-v\|_\infty \leq (\alpha+2\lambda)\|u-v\|_{C_b(V,V)}, \end{aligned}$$

woraus wegen $F_0(C_b(V,V)) \subset C_b(V,V_0)$ und $F_\infty(C_b(V,V)) \subset C_b(V,V_\infty)$

$$\|F(u) - F(v)\|_{C_b(V,V)} \leq (\alpha+2\lambda)\|u-v\|_{C_b(V,V)} \quad \text{für alle } u,v \in C_b(V,V)$$

folgt. Wegen $\alpha + 2\lambda < 1$ folgt die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes von F aus dem Banachschen Fixpunktsatz. **q.e.d.**

Bemerkung 2.36. (i) *Der obige Beweis zeigt, daß es genau eine topologische Konjugation H von T nach $T+g$ gibt, welche $H - \mathbb{1}_V \in C_b(V,V)$ erfüllt (falls natürlich die Lipschitzkonstante von g hinreichend klein ist).*

(ii) *Für $g \in C^k(V,V), 1 \leq k \leq \infty$ könnte man erwarten, daß die topologische Konjugation H von $T+g$ nach T auch in $C^k(V,V)$ liegt. Dies ist jedoch im allgemeinen nicht richtig. Für Ergebnisse in dieser Richtung verweisen wir auf Hartmann.*

Zur Lokalisierung des obigen Linearisierungssatzes benötigen wir das folgende

Lemma 2.37. *Es sei F ein beliebiger normierter Vektorraum, und $r_\delta : F \to \overline{B(0,\delta)}$ sei die radiale Retraktion:*

$$r_\delta(x) = \begin{cases} x & \text{für } \|x\| \le \delta \\ \delta \frac{x}{\|x\|} & \text{für } \|x\| > \delta \end{cases}.$$

Dann ist r_δ lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstanten 2.

Beweis: Für $\|x\| > \delta \ge \|y\|$ gilt

$$\begin{aligned} \|r_\delta(x) - r_\delta(y)\| = \left\|\delta\|x\|^{-1}x - y\right\| &\le \delta\|x\|^{-1}\|x-y\| + \left\|\delta\|x\|^{-1}y - y\right\| \\ &\le \|x-y\| + \|x\|^{-1}\|y\|(\|x\| - \delta) \\ &\le \|x-y\| + (\|x\| - \|y\|) \le 2\|x-y\|. \end{aligned}$$

Sind $\|x\| > \delta$ und $\|y\| > \delta$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \|r_\delta(x) - r_\delta(y)\| &= \left\|\delta\|x\|^{-1}x - \delta\|y\|^{-1}y\right\| \\ &\le \delta\|x\|^{-1}\|x-y\| + \delta\|y\| \cdot \left|\|x\|^{-1} - \|y\|^{-1}\right| \\ &\le \|x-y\| + \delta\|x\|^{-1}\left|\|y\| - \|x\|\right| \le 2\|x-y\|. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir das Hauptresultat dieses Abschnittes.

Satz 2.38 (Grobman und Hartmann)**.** *Sei X eine offene Teilmenge des endlichdimenisonalen Banachraums V, $f \in C^1(X,V)$ und x_0 ein hyperbolischer kritischer Punkt von Φ_f (d.h. $f(x_0) = 0$ und $\sigma_n(f'(x_0)) = \emptyset$). Dann gibt es Umgebungen $O \subset V$ von 0 und $U \subset X$ von x_0 so dass $\Phi_{f'(x_0)|_O}$ und $\Phi_{f|_U}$ flußäquivalent sind.*

Beweis: Der Beweis unterteilt sich in drei Schritte. Zuerst konstruieren wir einen globalen Fluss auf V, der in einer Umgebung mit Φ_f übereinstimmt. Danach zeigen wir die Aussage zuerst für die entsprechenden zeitdiskreten Systeme, die wir erhalten wenn wir die Zeit auf $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ einschränken. Als letztes zeigen wir, dass die so konstruierte Flussäquiavlenz auch eine Flussäquivalenz für die zeitkontinuierlichen Systeme ist.
(i) Mithilfe einer Translation können wir o.B.d.A. $x_0 = 0$ annehmen. Für alle $\lambda > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $\|f'(x) - f'(0)\| \le \frac{\lambda}{2}$ für alle $x \in \overline{B(0,\delta)}$. Aufgrund des Mittelwertsatzes ist die $x \mapsto f(x) - f'(0)x$ auf $\overline{B(0,\delta)}$ lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstanten $\frac{\lambda}{2}$. Wir definieren $g \in C_b(V,V)$ mittels der radialen Retraktion $r_\delta : V \to \overline{B(0,\delta)}$ durch

$$g = (f - f'(0)) \circ r_\delta.$$

Wegen dem vorangehenden Lemma ist g lipschitzstetig ist mit der Lipschitzkonstanten λ. Mit $A = f'(0) \in \mathcal{L}(V)$ gilt

$$(A + g)|_{B(0,\delta)} = f|_{B(0,\delta)}.$$

Der von $A + g$ auf V erzeugte Fluß Φ_{A+g} stimmt also auf dem Definitionsbreich von $\Phi_{f|_{B(0,\delta)}}$ mit Φ_f überein. Weil g und $A+g$ lipschitzstetig sind, ist Φ_{A+g} nach Satz 1.38 (v) ein globaler Fluss. Es genügt also zu zeigen, daß Φ_{A+g} und Φ_A flußäquivalent sind.
(ii) Wegen $\dot{x} = Ax + g(x)$ folgt aus der Variation der Konstanten

$$\Phi_{A+g}(t, x) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A} g(\Phi_{A+g}(s, x))ds \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Diese Formel wenden wir jetzt dreimal an. In der ersten Anwendung benutzen wir die Beschränktheit von $g \in C_b(V, V)$ und erhalten für $t \in \mathbb{R}$ und $x \in V$:

$$\|\Phi_{A+g}(t, x) - e^{tA}x\| \leq \|g\|_\infty \left| \int_0^t e^{(t-s)\|A\|} ds \right|.$$

Deshalb liegt $\Phi_{A+g}(t, \cdot) - e^{tA}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ in $C_b(V, V)$.

In der zweiten Anwendung zeigen wir die Lipschitzstetigkeit von $\Phi_{A+g}(t, \cdot)$:

$$\|\Phi_{A+g}(t, x) - \Phi_{A+g}(t, y)\| \leq e^{t\|A\|}\|x - y\| + \int_0^t e^{(t-s)\|A\|} \lambda \|\Phi_{A+g}(s, x) - \Phi_{A+g}(s, y)\| \, ds$$

für $t \geq 0$ und $x, y \in V$. Wir multiplizieren jetzt diese Ungleichung mit $e^{-t\|A\|}$

$$\begin{aligned} &\|\Phi_{A+g}(t, x)e^{-t\|A\|} - \Phi_{A+g}(t, y)e^{-t\|A\|}\| \leq \\ &\qquad \leq \|x - y\| + \lambda \int_0^t \|\Phi_{A+g}(s, x)e^{-s\|A\|} - \Phi_{A+g}(s, y)e^{-s\|A\|}\| ds \end{aligned}$$

und wenden Lemma 1.58 auf diese Ungleichung an:

$$\|\Phi_{A+g}(t, x)e^{-t\|A\|} - \Phi_{A+g}(t, y)e^{-t\|A\|}\| \leq \|x - y\| \left(1 + \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)} ds \right) = \|x - y\|e^{\lambda t}.$$

Daraus folgt zuerst die Lipschitzstetigkeit von $\Phi_{A+g}(t,\cdot)$:

$$\|\Phi_{A+g}(t,x)-\Phi_{A+g}(t,y)\| \leq \|x-y\|e^{(\lambda+\|A\|)t} \quad \text{für alle } x,y\in V \text{ und } t\geq 0.$$

Diese Ungleichung setzten wir in die dritte Anwendung der Formel ein, nachdem wir uns zuerst die Lipschitzstetigkeit von g zunutze machen:

$$\|(\Phi_{A+g}(t,x)-e^{tA}x-(\Phi_{A+g}(t,y)-e^{tA}y)\| \leq \int\limits_0^t e^{(t-s)\|A\|}\lambda\|\Phi_{A+g}(s,x)-\Phi_{A+g}(s,y)\|ds$$

$$\leq \lambda\|x-y\|e^{t\|A\|}\int\limits_0^t e^{\lambda s}ds = \|x-y\|e^{t\|A\|}(e^{\lambda t}-1) \quad \text{für } t\geq 0 \text{ und } x,y\in V.$$

Also ist $\Phi_{A+g}(t,\cdot)-e^{tA}$ lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $e^{t\|A\|}(e^{\lambda t}-1)$. Da $x_0=0$ nach Voraussetzung ein hyperbolischer kritischer Punkt ist, ist $\sigma_n(A)=\emptyset$. Also folgt aus Lemma 2.32, daß $T=e^A$ ein hyperbolischer Automorphismus von V ist. Für hinreichend kleines λ wird die Lipschitzkonstante $e^{\|A\|}(e^{\lambda}-1)$ von $\tilde{g}=\Phi_{A+g}(1,\cdot)-T$ beliebig klein. Mit $\tilde{g}\in C_b(V,V)$ folgt aus dem Hartmannschen Linearisierungssatz, daß T und $\Phi_{A+g}(1,\cdot)=T+\tilde{g}$ topologisch konjugiert sind. Wir wissen außerdem, daß es genau eine Flussäquivalenz Ψ von T nach $\Phi_{A+g}(1,\cdot)$ gibt mit $\Psi-\mathbb{1}_V\in C_b(V,V)$.
(iii) Aus $\Psi\circ T=\Phi_{A+g}(1,\cdot)\circ\Psi$ folgt für jedes $t\in\mathbb{R}$ (mit $T^t=e^{tA}$)

$$\begin{aligned}\Phi_{A+g}(1,\cdot)\circ(\Phi_{A+g}(t,\cdot)\circ\Psi\circ T^{-t}) &= \Phi_{A+g}(t,\cdot)\circ\Phi_{A+g}(1,\cdot)\circ\Psi\circ T^{-t}\\ &= \Phi_{A+g}(t,\cdot)\circ\Psi\circ T\circ T^{-t}\\ &= (\Phi_{A+g}(t,\cdot)\circ\Psi\circ T^{-t})\circ T.\end{aligned}$$

Also ist $\Phi_{A+g}(t,\cdot)\circ\Psi\circ T^{-t}$ eine Flussäquivalenz von T nach $\Phi_{A+g}(1,\cdot)$. Wegen

$$\Phi_{A+g}(1,\cdot)\circ\Psi\circ T^{-t}-\mathbb{1}_V=(\Phi_{A+g}(t,\cdot)-T^t)\circ\Psi\circ T^{-t}+T^t\circ(\Psi-\mathbb{1}_V)\circ T^{-t}$$

liegt dann mit $\Phi_{A+g}(t,\cdot)-e^{tA}$ und $\Psi-\mathbb{1}_V$ auch $\Phi_{A+g}(t,\cdot)\circ\Psi\circ T^{-t}-\mathbb{1}_V$ in $C_b(V,V)$. Also ist $\Phi_{A+g}(t,\cdot)\circ\Psi\circ T^{-t}=\Psi$ und somit $\Phi_{A+g}(t,\cdot)\circ\Psi=\Psi\circ e^{tA}$ für jedes $t\in\mathbb{R}$, d.h. Φ_{A+g} und e^{tA} sind flußäquivalent.

Wir fassen zuletzt zusammen, in welcher Reihenfolge wir die Voraussetzungen erfüllen. Für gegebenes $f\in C^1(X,V)$ mit hyperbolischem kritischen Punkt $x_0=0$ und $A=f'(0)$ wählen wir zuerst ein $\alpha\in(\max\{\sigma(e^{A_s})\cup\sigma(e^{-A_u})\},1)$ und eine entsprechende Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf V mit $\max\{\|e^{A_u}\|,\|e^{-A_u}\|\}\leq\alpha$. Dann wählen wir $\lambda>0$ so klein, dass $2e^{\|A\|}(e^{\lambda}-1)<\min\{1-\alpha,\|e^{-A}\|^{-1}\}$ gilt. Dann wählen wir $\delta>0$, so dass $f-f'(0)$ auf $\overline{B(0,\delta)}$ lipschitzstetig ist mit Lipschitzkonstante $\frac{\lambda}{2}$. Das entsprechende Ψ bildet die Ruhelage $x_0=0$ auf sich selber, und $O=\Psi^{-1}[B(0,\delta)]$ auf $U=B(0,\delta)$ ab. **q.e.d.**

2.6 Stabile Mannigfaltigkeiten

Der letzte Satz besagt, daß in der Nähe eines hyperbolischen kritischen Punktes x_0 das Phasenporträt des Flusses Φ_f die gleiche topologische Struktur wie das Phasenporträt der Linearisierung in der Nähe von 0 hat. In Analogie zum stabilen Untervektorraum V_s bzw. instabilen Untervektorraum V_u eines linearen Flusses definiert man die stabile Mannigfaltigkeit $W_s(x_0)$ bzw. die instabile Mannigfaltigkeit $W_u(x_0)$ von Φ_f in x_0 als

$$W_s(x_0) = \{x \in V \mid t \mapsto \Phi_f(t,x) \text{ existiert für } t \in [0,\infty) \text{ und } \lim_{t\to\infty} \Phi_f(t,x) = x_0\}$$
$$W_u(x_0) = \{x \in V \mid t \mapsto \Phi_f(t,x) \text{ existiert für } t \in (-\infty,0] \text{ und } \lim_{t\to-\infty} \Phi_f(t,x) = x_0\}.$$

Offensichtlich gilt $x_0 \in W_s(x_0) \cap W_u(x_0)$. Wir wollen nun zeigen, daß, in der Nähe von x_0, die Mengen $W_s(x_0)$ und $W_u(x_0)$ tatsächlich differenzierbare Untermannigfaltigkeiten von V sind, die sich in x_0 transversal schneiden, und daß die Tangentialräume an $W_s(x_0)$ bzw. $W_u(x_0)$ parallel zu V_s bzw. V_u sind:

$$T_{x_0}W_s(x_0) = x_0 + V_s \qquad\qquad T_{x_0}W_u(x_0) = x_0 + V_u.$$

Zum Beweis betrachten wir wieder zuerst zeitdiskrete Systeme, d.h. Homöomorphismen von V auf sich. Ist $h : V \to V$ ein Homöomorphismus mit $h(0) = 0$, so heißt

$$W_0 := \{x \in V \mid h^n(x) \to 0 \text{ für } n \to \infty\}$$

die stabile Menge von h in 0, wobei h^n die n-fache Iterierte von h bezeichnet. Analog definiert man die instabile Menge von h in 0 durch

$$W_\infty := \{x \in V \mid h^{-n}(x) \to 0 \text{ für } n \to \infty\},$$

wobei $h^{-n} := (h^{-1})^n$ gesetzt ist. Offensichtlich gehen W_0 und W_∞ ineinander über, wenn wir h durch h^{-1} ersetzen. Folglich genügt es, W_0 zu betrachten.

Sei $T \in \mathcal{L}(V)$ invertierbar und hyperbolisch, und $V = V_0 \oplus V_\infty, T = T_0 \oplus T_\infty$ sei die oben eingeführte Zerlegung in den stabilen und den instabilen Untervektorraum.

Satz 2.39. *Sei $g : V \to V$ lipschitzstetig mit $g(0) = 0$. Besitzt g eine genügend kleine Lipschitzkonstante, so existiert eine eindeutig bestimmte gleichmäßig lipschitzstetige Funktion $h : V_0 \to V_\infty$, so daß der Graph von h die stabile Menge W_0 von $T + g$ in 0 ist. Ist g auf einer Umgebung von 0 l-mal stetig differenzierbar für ein $1 \le l \le \infty$, so auch die Funktion h. Dann gibt es eine offene Umgebung Y von 0 in V_0, derart, daß*

$$W_0^Y = \{(x, h(x)) \mid x \in Y\}$$

eine C^l-Mannigfaltigkeit ist. Gilt außerdem $g'(0) = 0$, so ist $T_0 W_0^Y = V_0$.

Beweis: Es sei
$$B_0 = \{u : \mathbb{N}_0 \to V \mid u(k) \to 0 \text{ für } k \to \infty\}.$$
Ein $u \in B(\mathbb{N}_0, V)$ liegt genau dann nicht in B_0, wenn es einen Häufungspunkt $v \in V \setminus \{0\}$ hat. Dann haben alle Elemente von $w \in B(u, \frac{\|v\|}{2}) \subset B(\mathbb{N}_0, V)$ auch einen Häufungspunkt in $B(v, \frac{\|v\|}{2}) \subset V$. Also ist B_0 ein abgeschlossener Untervektorraum des Banachraums $B(\mathbb{N}_0, V)$ und damit selber ein Banachraum. Offenbar gilt
$$\begin{aligned} W_0 &= \{x \in V \mid ((T+g)^k x)_{k \in \mathbb{N}_0} \in B_0\} \\ &= \{x \in V \mid \exists u \in B_0 \text{ mit } x = u(0) \text{ und } u(k+1) = (T+g)(u(k)) \forall k \in \mathbb{N}_0\}. \end{aligned}$$
Mit den Projektionen $P_0 : V \to V_0$ und $P_\infty : V \to V_\infty$ wird die Bedingung an u zu
$$\begin{aligned} P_0 u(k+1) &= T_0 P_0 u(k) + P_0 g(u(k)) \quad P_\infty u(k+1) = T_\infty P_\infty u(k) + P_\infty g(u(k)), \text{ und} \\ P_0 u(k+1) &= T_0 P_0 u(k) + P_0 g(u(k)) \qquad P_\infty u(k) = T_\infty^{-1} P_\infty u(k+1) - T_\infty^{-1} P_\infty g(u(k)) \end{aligned}$$
für $k \in \mathbb{N}_0$. Wir ergänzen in der ersten Gleichung der unteren Zeile für $k = -1$ die Gleichung $P_0 u(0) = P_0 x$ und definieren für $x \in V_0$ und $u \in B_0$: $F(x,u)(k) =$
$$= \begin{cases} T_0 P_0 u(k-1) + T_\infty^{-1} P_\infty u(k+1) + P_0 g(u(k-1)) - T_\infty^{-1} P_\infty g(u(k)) & \text{für } k > 0 \\ P_0 x + T_\infty^{-1}(P_\infty u(1) - P_\infty g(u(0))) & \text{für } k = 0, \end{cases}$$
Dann gibt es genau dann ein Element $u(0) \in W_0$ mit $P_0 u(0) = x$, wenn u ein Fixpunkt von $F(x, \cdot)$ in B_0 ist. Wie im Beweis des Hartmannschen Linearisierungssatzes sei
$$\max\{\|T_0\|, \|T_\infty^{-1}\|\} \le \alpha < 1 \quad \max\{\|P_0\|, \|P_\infty\|\} \le 1 \quad \|g(x) - g(y)\| \le \lambda \|x - y\|$$
für alle $x, y \in V$ und für ein $2\lambda < 1 - \alpha$. Wir benutzen in B_0 die äquivalente Norm
$$\|u\|_B = \max\{\|P_0 u\|_\infty, \|P_\infty u\|_\infty\} \qquad \text{mit } \tfrac{1}{2}\|u\|_\infty \le \|u\|_B \le \|u\|_\infty$$
für alle $u \in B_0$. Für $x \in V$ und $u, v \in B_0$ schätzen wir $\|P_0(F(x,u) - F(x,v))\|$ und $\|P_\infty(F(x,u) - F(x,v))\|$ getrennt ab und erhalten die Abschätzungen
$$\begin{aligned} \|F(x,u) - F(x,v)\|_B &\le \alpha \|u - v\|_B + \lambda \|u - v\|_\infty \le (\alpha + 2\lambda)\|u - v\|_B, \\ \|F(x,u)(k)\| &\le (\alpha + \lambda)\|u(k-1)\| + \alpha\lambda \|u(k)\| + \alpha \|u(k+1)\| \quad \text{für } k > 0. \end{aligned}$$
Es folgt, daß $F(x, \cdot)$ den Banachraum B_0 in sich abbildet, und $F(x, \cdot) : B_0 \to B_0$ eine Kontraktion mit der von $x \in V$ unabhängigen Kontraktionskonstanten $\alpha + 2\lambda < 1$

ist. Der Banachsche Fixpunktsatz impliziert die Existenz eines eindeutig bestimmten Fixpunktes $U(x)$ von $F(x,\cdot)$ in B_0. Wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|U(x)-U(y)\|_B &= \|F(x,U(x))-F(y,U(y))\|_B\\ &\le \|F(x,U(x))-F(x,U(y))\|_B+\|F(x,U(y))-F(y,U(y))\|_B\\ &\le (\alpha+2\lambda)\|U(x)-U(y)\|_B+\|P_0x-P_0y\|\end{aligned}$$

$$\|U(x)-U(y)\|_B \le \frac{\|P_0x-P_0y\|}{1-\alpha-2\lambda} \quad \text{für alle } x,y\in V.$$

Deshalb definieren wir

$$h(x)=P_\infty U(x)(0) \quad \text{für alle } x\in V_0.$$

Dann bildet h den Raum V_0 lipschitzstetig in V_∞ ab, und

$$W_0=\{x,h(x))\mid x\in V_0\}=\mathrm{Graph}(h).$$

Wir bezeichnen mit $S_1, S_{-1}: B_0\to B_0$ die Verschiebungsoperatoren

$$(S_{-1}u)(k)=u(k+1) \text{ für alle } k\in\mathbb{N}_0 \qquad (S_1u)(k)=\begin{cases}u(k-1) & \text{für alle } k\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{für } k=0.\end{cases}$$

Dann sind S_{-1} und S_1 stetig mit $\max\{\|S_{-1}\|_B,\|S_1\|_B\}\le 1$. Zuletzt definieren wir

$$G: B_0\to B_0, \qquad \text{mit} \qquad G(u)(k)=g(u(k)) \text{ für alle } k\in\mathbb{N}_0.$$

Gilt dann $g\in C^l(B_V(0,\beta),V)$ für ein $\beta>0$ und ein $l\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, so folgt $G\in C^l(B_{B_0}(0,\beta),B_0)$ und für $g'(0)=0$ auch $G'(0)=0$. Mit dem Einheitsvektor $e_0=(1,0,\ldots)\in B_0$ kann $F(x,\cdot)$ in folgender Form geschrieben werden:

$$F(x,\cdot)=(P_0x)e_0+T_0P_0(S_1+G\circ S_1)+T_\infty^{-1}P_\infty(S_{-1}-G)$$

$$\text{Mit } H(x,u)=u-F(x,u) \quad \text{erhalten wir} \quad H\in C^k(V\times B_{B_0}(0,\beta),B_0)$$

$$K=\mathbb{1}_{B_0}-\frac{\partial H}{\partial u}(0,0)=T_0P_0S_1+T_\infty^{-1}P_\infty S_{-1}.$$

Mithilfe von $\max\{\|S_{-1}\|_B,\|S_1\|_B\}\le 1$ folgt die Abschätzung

$$\|K\|_{\mathcal{L}(B_0)}\le\alpha<1.$$

Wegen der Neumannschen Reihe ist $\frac{\partial H}{\partial u}(0,0) \in \mathcal{L}(B_0)$ invertierbar. Wegen $H(0,0) = 0$, und da $U(x) \in B_0$ für jedes $x \in V_0$ die eindeutige Lösung der Gleichung

$$H(x,u) = 0$$

ist, folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, daß die Abbildung

$$V_0 \to B_0, \quad x \mapsto U(x)$$

in einer Umgebung von $x = 0$ k-mal stetig differenzierbar ist. Da die Auswertungsabbildung $B_0 \to V, u \mapsto u(0)$ linear und stetig ist, ist die Funktion $h : V_0 \to V_\infty$ in einer offenen Umgebung Y von 0 auch k-mal stetig differenzierbar. Folglich ist W_0^Y als Graph einer C^k-Funktion eine C^k-Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim_{\mathbb{R}} V_0$. Da durch

$$V_0 \supset Y \ni x \mapsto (x, h(x))$$

eine Parametrisierung von W_0^Y gegeben wird, ist der Tangentialraum $T_0 W_0^Y$ das Bild von V_0 unter $(\mathbb{1}_{V_0} \times h'(0))$ in $V_0 \times V_\infty$, wobei wir o.B.d.A. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ annehmen können. Durch Differenzieren der Identität $H(x, U(x)) = 0$ im Punkt $x = 0$ folgt

$$\frac{\partial H}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial H}{\partial u}(0,0)U'(0) = 0 \qquad \text{mit}$$

$$U'(0) \in \mathcal{L}(V_0, B_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial x}(0,0)\xi = -(P_0\xi)e_0 \quad \text{für alle } \xi \in V.$$

Wir erhalten $P_\infty \frac{\partial H}{\partial x}(0,0)\xi = 0$ und mit der Definition von K und Anwenden von P_∞

$$P_\infty U'(0) - T_\infty^{-1} S_{-1} U'(0) = 0, \text{ d.h.} \qquad P_\infty(U'(0)x)(k) = T_\infty^{-1}(U'(0)x)(k+1)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in V_0$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} &\|P_\infty(U'(0)x)(k)\| \le \alpha \|P_\infty U'(0)\|_{\mathcal{L}(V_0,B_0)} \|x\|_V \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \\ &\|P_\infty U'(0)\|_{\mathcal{L}(V_0,B_0)} \le \alpha \|P_\infty U'(0)\|_{\mathcal{L}(V_0,B_0)}, \end{aligned}$$

d.h. $P_\infty U'(0) = 0$, da $\alpha < 1$ ist. Wegen $h'(0)\xi = P_\infty(U'(0)\xi)(0)$ für alle $\xi \in V_0$ erhalten wir $h'(0) = 0$ und somit die Behauptung. **q.e.d.**

Ist Y eine Umgebung eines kritischen Punktes x_0 des Flusses Φ_f, so definieren wir die lokalen stabilen bzw. instabilen Mannigfaltigkeiten von Φ_f in x_0 bzgl. Y durch

$$\begin{aligned} W_s^Y(x_0) &= \{x \in W_s(x_0) \mid \Phi_f(t,x) \in Y \text{ für } t \ge 0\} \\ W_u^Y(x_0) &= \{x \in W_u(x_0) \mid \Phi_f(t,x) \in Y \text{ für } t \le 0\}. \end{aligned}$$

I.a. gilt $W_s^Y(x_0) \neq W_s(x_0) \cap Y$ und $W_u^Y(x_0) \neq W_u(x_0) \cap Y$. Nach diesen Vorbereitungen können wir den angekündigten Satz über die lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten beweisen, der im wesentlichen auf Hadamard und Perron zurückgeht.

Satz 2.40. *Es sei $X \subset V$ eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Banachraums und $f \in C^k(X, V)$ für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ferner sei x_0 ein hyperbolischer kritischer Punkt des von f erzeugten Flusses Φ_f. Dann gibt es eine Umgebung Y von x_0, derart, daß $W_u^Y(x_0)$ C^k-Mannigfaltigkeiten sind. Außerdem gilt*

$$T_{x_0} W_s^Y(x_0) = x_0 + V_s \text{ und } T_{x_0} W_u^Y(x_0) = x_0 + V_u,$$

Wobei V_s und V_u die stabilen und instabilen Unterverktorräume von $e^{tf'(x_0)}$ sind.

Beweis: O.B.d.A. können wir $x_0 = 0$ annehmen. Wir setzen wieder

$$g = (f - f'(0)) \circ r_\delta,$$

wobei $r_\delta : V \to \overline{B(0,\delta)}$ die radiale Retraktion bezeichnet. Dann ist g gleichmäßig lipschitzstetig, $g(0) = 0$, und $g \in C^k(B(0,\delta), V)$ mit $g'(0) = 0$. Durch geeignete Wahl von $\delta > 0$ wird die Lipschitzkonstante von g beliebig klein. Mit $A = f'(0) \in \mathcal{L}(V)$ gilt

$$(A + g)|_{B(0,\delta)} = f|_{B(0,\delta)},$$

Also stimmt auf $B(0,\delta)$ der von $A + g$ erzeugte globale Fluß Φ_{A+g} mit dem von f erzeugten Fluß Φ_f überein. Wir setzen nun $T = e^A$. Dann ist T ein hyperbolischer Automorphismus, und wie im Beweis vom Satz von Grobman und Hartmann folgt, daß $\tilde{g} = \Phi_{A+g}(1, \cdot) - T$ global lipschitzstetig ist, wobei die Lipschitzkonstante von $\tilde{g}$ durch geeignete Wahl von δ beliebig klein wird. Wegen $g(0) = 0$ ist $x = 0$ eine Ruhelage von Φ_{A+g}, also $\tilde{g}(0) = 0$. Aus der Variation der Konstanten folgt wieder

$$\Phi_{A+g}(t, x) = e^{tA} x + \int_0^t e^{(t-s)A} g(\Phi_{A+g}(s, x)) ds \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Wegen Satz 1.23 ist Φ_{A+g} genauso oft differenzierbar wie g, und deshalb auch $\tilde{g}$. Außderdem ist $\frac{\partial}{\partial x} \Phi_{A+g}(\cdot, 0)$ die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$\dot{z} = (A + g'(0))z = Az, \quad z(0) = \mathbb{1}_V.$$

Daraus folgt $\tilde{g}'(0) = 0$, gilt. Folglich erfüllen T und $\tilde{g}$ die Voraussetzungen des vorangehenden Satzes. Somit ist die stabile Menge W_0 von $\Phi_{A+g}(1, \cdot) = T + \tilde{g}$ als Graph einer global lipschitzstetigen Abbildung $h : V_0 \to V_\infty$ darstellbar. Außerdem gibt es eine offene Umgebung Y von 0 in V_0 mit $h \in C^k(Y, V_\infty)$, derart, daß

$$W_0^Y = \{(x, h(x)) \in V \mid x \in Y\}$$

eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $T_0W_0^Y = V_0 = V_s$ ist. Wir behaupten nun, daß $W_0 = \tilde{W}_s(0)$ gilt, wobei $\tilde{W}_s(0)$ die stabile Mannigfaltigkeit von Φ_{A+g} im Punkt 0 ist. Da aus $\lim_{t\to\infty} \Phi_{A+g}(t,x) = 0$ auch $\lim_{k\to\infty} \Phi_{A+g}(k,x) = 0$ folgt, ist $\tilde{W}_s(0) \subset W_0$. Zum Beweis der umgekehrten Inklusion bemerken wir, daß Φ_{A+g} für hinreichend kleines $\delta > 0$ auf den kompakten Mengen $(t,x) \in [-1,1] \times \overline{B(0,\delta)}$ gleichmäßig stetig ist, und es deshalb zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\|\Phi_{A+g}(t,x)\| \leq \epsilon \text{ für } |t| \leq 1 \text{ und } \|x\| \leq \delta.$$

Es sei $\epsilon > 0$ beliebig und es gelte $\lim_{k\to\infty} \Phi_f(k,x) = 0$. Dann existiert ein $k(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\|\Phi_{A+g}(k,x)\| \leq \delta$ für $k \geq k(\epsilon)$, wobei $\delta > 0$ wie oben gewählt ist. Also folgt

$$\|\Phi_{A+g}(t,x)\| = \|\Phi_{A+g}(t-k, \Phi_{A+g}(k,x))\| \leq \epsilon \quad \text{ für } t \geq k(\epsilon) \text{ und } t \in [k, k+1),$$

d.h. $\Phi_{A+g}(t,x) \to 0$ für $t \to \infty$, und somit $W_0 \subset \tilde{W}_s(0)$.

Nach dem Beweis von dem vorangehenden Satz ist $h(x) = P_\infty U(x)(0)$ für $x \in V_0$, wobei die Funktion

$$V \to B_0, \quad y \mapsto U(y)$$

stetig ist, in $y = 0$ verschwindet und $U(y)(k) = (T + \tilde{g})^k(y) = \Phi_{A+g}(k,y)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt. Also existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\{(x, h(x)) \mid \|x\| \leq \delta\} \subset \{y \in W_0 \mid \|\Phi_{A+g}(k,y)\| \leq \epsilon \quad \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\}.$$

Aus $\|\Phi_{A+g}(t,x)\| \leq \epsilon$ für $|t| \leq 1$ und $\|x\| \leq \delta$ folgt wie im Beweis der Inklusion $W_0 \subset \tilde{W}_s(0)$, daß wir zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ die Zahl $\delta > 0$ so wählen können, daß

$$\{(x, h(x)) \mid \|x\| \leq \delta\} \subset \{y \in W_0 \mid \|\Phi_{A+g}(t,y)\| \leq \epsilon \quad \text{ für alle } t \in \mathbb{N}\}.$$

gilt. Wegen $W_0 = \tilde{W}_s(0)$ existieren also Nullumgebungen Y in V und $\hat{Y} \subset V_0$ in V_0 mit $W_0^{\hat{Y}} \subset \tilde{W}_s^Y(0)$. Da in der Nähe von 0 die Flüsse übereinstimmen, können wir Y so klein wählen, daß $\tilde{W}_s^Y(0) = W_s^Y(0)$ gilt. Insbesondere ist $W_s^Y(0) \subset W_0$, und da W_0 der Graph einer auf V_0 definierten Funktion ist, gilt $W_s^Y(0) \subset W_0^{V_0}$ für eine genügend kleine Umgebung Y von 0. Also ist $W_s^Y(0)$ eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $T_{x_0}W_s^Y(0) = V_s$. Die Behauptung für $W_u^Y(0)$ folgt nun durch Zeitumkehr $t \leftrightarrow -t$. **q.e.d.**