

13. Übung

41. Ein Kriterium für Instabilität nach Lyapunov

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $0 \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig mit $f(0) = 0$. Wir betrachten das autonome System

$$\dot{y}(t) = f(y(t)). \quad (1)$$

Sei $L : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare *Lyapunov-Funktion* zum System (1), d.h. es gilt

$$\nabla L(y) \cdot f(y) \leq 0 \quad \text{für alle } y \in D.$$

Beweisen Sie folgendes Kriterium für Instabilität: Falls L zusätzlich

$$L(0) = 0 \quad \text{und} \quad \nabla L(y) \cdot f(y) < 0 \quad \text{für alle } y \in D \setminus \{0\} \quad (2)$$

erfüllt und es in jeder Umgebung von $0 \in D$ einen Punkt gibt, in dem L einen negativen Wert annimmt, dann ist die Ruhelage $y^* \equiv 0$ von (1) instabil. (7 Punkte)

[Tipp: Nehmen Sie an, y^* wäre stabil und führen Sie einen Widerspruchsbeweis: Zeigen Sie dazu, dass für einen geeigneten Anfangswert $y(0) = y_0$ die Trajektorie der zugehörigen Lösung $t \mapsto y(t)$ in einer in D kompakten Menge enthalten ist, zugleich jedoch $L(y(t)) \rightarrow -\infty$ für $t \rightarrow \infty$ gilt.]

42. Stabilitätsuntersuchung nach Lyapunov

Gegeben sei das autonome System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x^3 \\ \dot{y} &= x + y^3 \end{aligned}$$

mit gesuchter Lösungsfunktion $t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie durch Konstruktion einer geeigneten Lyapunov-Funktion, dass der Nullpunkt $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ eine instabile Ruhelage obigen Systems ist. (3 Punkte)

43. Erste Integrale

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Wir betrachten das autonome System

$$\dot{y}(t) = f(y(t)). \quad (3)$$

Eine stetig differenzierbare Funktion $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *erstes Integral* zum System (3), wenn

$$\nabla H(y) \cdot f(y) = 0 \quad \text{für alle } y \in D.$$

Erste Integrale sind also insbesondere Lyapunov-Funktionen.

- (a) Sei $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ ein erstes Integral zu (3). Zeigen Sie, dass H längs jeder Trajektorie des durch (3) definierten dynamischen Systems konstant ist, d.h. $H(\Phi(t; y_0)) = H(y_0)$ für alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ und alle t aus dem jeweiligen maximalen Existenzintervall. Mit $t \mapsto \Phi(t; y_0)$ bezeichnen wir jeweils die Lösung von (3) zum Anfangswert $y(0) = y_0$. (2 Punkte)

Bitte wenden.

- (b) Für den Rest der Aufgabe betrachten wir das autonome System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= 2x - 4x^3\end{aligned}\tag{4}$$

mit gesuchter Lösungsfunktion $t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie ein erstes Integral $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zu diesem System. [Tipp: Bestimmen Sie Gleichungen, die $\frac{\partial H}{\partial x}$ und $\frac{\partial H}{\partial y}$ erfüllen müssen. Hieraus lässt sich dann leicht ein geeignetes H finden.] (2 Punkte)

- (c) Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems (4) und untersuchen Sie sie auf Stabilität (stabil, instabil, asymptotisch stabil). (6 Punkte)

- (d) Zeigen Sie, dass alle Lösungen von (4) auf ganz \mathbb{R} existieren. [Tipp: Teil (a) und (b)] (4 Punkte)

- (e) Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ so, dass in der Niveaumenge $N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = H(x_0, y_0)\}$ keine Ruhelagen von (4) enthalten sind. Zeigen Sie: Für alle $(x, y) \in N$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass

$$B((x, y), \epsilon) \cap N \subseteq \{\Phi(t; x, y) : t \in \mathbb{R}\}$$

gilt (hierbei bezeichnet $B((x, y), \epsilon)$ den Ball um (x, y) mit Radius ϵ ; mit $t \mapsto \Phi(t; x, y)$ bezeichnen wir wie in Teil (a) die Lösung von (4) zum Anfangswert (x, y)).

(4 Zusatzpunkte)

- (f) Seien (x_0, y_0) und N wie in Teil (e). Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (e), dass dann für alle $(x, y) \in N$ der Orbit zu $t \mapsto \Phi(t; x, y)$ periodisch ist. (6 Punkte)

- (g) Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ beliebig und N wie in (e) mit dem Zusatz, dass N nun auch Ruhelagen von (4) enthalten darf. Begründen Sie kurz, dass für N je einer der folgenden 4 Fälle in Abhängigkeit von (x_0, y_0) auftritt und charakterisieren Sie diese 4 Fälle durch die Werte von $H(x_0, y_0)$ (z.B. "Fall 1 $\Leftrightarrow H(x_0, y_0) > 0$ " usw.):

- Fall 1: N besteht aus einem periodischen Orbit (und ist insbesondere zusammenhängend).
- Fall 2: N besteht aus zwei periodischen Orbits.
- Fall 3: N besteht aus drei Orbits, wovon einer eine Ruhelage ist.
- Fall 4: N besteht aus zwei Ruhelagen.

Skizzieren Sie nun mit dieser Kenntnis und dem Wissen aus den vorherigen Aufgabenteilen das Phasenportrait zum System (4). (5 Zusatzpunkte)

Abgabe bis spätestens Freitag, den 26. Mai 2017, 12:00h, im Briefkasten Nr. 46260

Hinweis: Die auf den Übungsblättern 1 bis 13 erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 400 Punkte, so dass die 50%-Grenze demzufolge bei 200 Punkten liegt.