

Prof. Dr. Martin Schmidt
Eva Lübcke

Zusatzaufgaben

Analysis II
Woche 10

1. Nullmengen.

(a) Zeige:

(i) $M_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ist keine Nullmenge.

(ii) $M_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ist eine Nullmenge.

(iii) $M_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$ ist eine Nullmenge.

(iv) $M_4 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \leq 1\}$ ist keine Nullmenge.

(v) $M_5 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$ ist eine Nullmenge.

(b) Ist der Rand einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ (versehen mit der Standardmetrik) immer eine Nullmenge?

(c) Zeige mit Hilfe der bekannten Aussagen über Nullmengen, dass \mathbb{R} überabzählbar ist.

2. Lebesgue-Integrierbarkeit.

(a) Zeige, dass die Funktion

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{für } x \in (0, \infty), \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

zwar uneigentlich Riemann-integrierbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar ist.

(b) Es sei $q \in (0, 1)$, $I_n := \left[n, n + \frac{q^n}{n} \right]$ und

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} n, & \text{falls } x \in I_n \text{ für } n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n. \end{cases}$$

Zeige, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq 0$ und bestimme $\int f \, d\mu$.