

Prof. Dr. Martin Schmidt  
Eva Lübcke

**Zusatzaufgaben**

Analysis II  
Woche 1

**1. Metrik und Norm.**

(a) Sei  $\|\cdot\|_2$  die euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^2$  und für  $x, y \in \mathbb{R}^2$  definiere man

$$d(x, y) := \begin{cases} \|x - y\|_2, & \text{falls } x \text{ und } y \text{ auf einer Geraden durch den Ursprung liegen,} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass  $d$  eine Metrik auf  $\mathbb{R}^2$  ist.

Warum wird diese Metrik auch mit Metrik der französischen Eisenbahn bezeichnet?

(b) Sei  $\mathbb{R}[x]$  der Vektorraum der Polynome über  $\mathbb{R}$ , das heißt

$$\mathbb{R}[x] := \left\{ p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \left| p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \text{ mit } n \in \mathbb{N} \text{ und } a_k \in \mathbb{R} \right. \right\}.$$

(i) Zeige, dass  $\mathbb{R}[x]$  ein Vektorraum ist.

(ii) Für  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  definiere man  $\|p\| := \sum_{k=0}^n |a_k|$ . Zeige, dass durch  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $\mathbb{R}[x]$  definiert ist.

**2. Offene und abgeschlossene Mengen.**

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Zeige die folgenden Aussagen:

- (a) Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.
- (b) Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen in  $(X, d)$  sind abgeschlossen
- (c) Beliebige Vereinigung abgeschlossener Mengen in  $(X, d)$  sind nicht unbedingt abgeschlossen.